# Note di didattica.
# (Versione preliminare: Giugno 2004)

Ph. Ellia

Printed:

14-6-2004

# Indice

# 1. Il concetto di dimostrazione; dimostrazione per induzione.

## 1.1. Prematematica.

Agli inizi (Babilonesi, Egiziani,...) la matematica era per lo più una scienza empirica, sperimentale, cioè basata sull'osservazione. Una serie di regole da applicare in determinate circonstanze. Se A prestava tre monete a B e se dopo un pò B restituiva due monete, allora B era sempre debitore di una moneta. Perchè se indichiamo, negli scambi tra A e B, quello che A ha dato a B con le dita della mano destra e quello che B ha dato a A con quelle della mano sinistra, "vediamo" che bisogna ancora alzare un dito nella mano sinistra per avere lo stesso numero da entrambe le parti. Tutto questo è molto pratico, ma se le monete sono più di dieci, abbiamo già qualche problema.

## 1.2. I Greci e la nascita della matematica.

La matematica nasce con i Greci e il primo trattato che getta le basi di questa nuova scienza sono gli "Elementi" di Euclide. L'aspetto più importante di questo trattato è la sua impostazione che può essere riassunta nel modo seguente:

(1) Ci sono degli assiomi. Gli assiomi sono asserzioni vere per definizione.
(2) Ci sono delle regole di deduzioni fornite dalla logica. Queste regole garantiscono che partendo da asserzioni vere e facendo determinate operazioni, si ottengono altre asserzioni vere.

Quindi partendo dagli assiomi e usando le regole della logica si tratta di "fabbricare" il più grande numero possibile di asserzioni vere. Queste asserzioni potranno, al pari degli assiomi, essere usate per dedurre altre asserzioni vere. Le asserzioni vere vengono chiamate *teoremi* (o anche *proposizioni, lemmi, corollari,...*).

Con questa impostazione la matematica diventa una scienza **ipotetico-deduttiva**, anzi la matematica è *l'unica* scienza ipotetico-deduttiva.

Questo significa che si parte da "ipotesi" (assiomi, asserzioni vere), si usano regole di deduzione (logica) e si arriva a conclusioni ("tesi"), che sono necessariamente vere. Questo procedimento si chiama **dimostrazione**: alla fine del procedimento la tesi è dimostrata e quindi può essere considerata un'asserzione vera e quindi essere utilizzata a sua volta per dimostrare altre asserzioni, ecc...

Per capire la singolarità di questa impostazione consideriamo la fisica. La fisica è una scienza sperimentale. Questo significa che la validità di una teoria fisica si misura nella sua capacità di prevvedere l'esito di vari esperimenti. La fisica deve fare i conti con la natura. La fisica di Galileo non è sbagliata, per determinati fenomeni ("esperimenti") fornisce previsioni ottimali, ma quella di Newton è più generale, "spiega" più fenomeni. Quella di Einstein è ancora più generale di quella di Newton. Ma nessuna di queste teorie può essere considerata "vera in assoluto": si può solo dire che non sono sbagliate (non si conoscono contresempi, cioè sperimenti

che dano risultati opposti a quelli previsti dalla teoria) e che si applicano in un ambito più o meno generale.
La fisica degli antichi Greci ormai non viene più studiata (corpi pesanti, corpi leggeri; i cinque elementi,...) è completamente sorpassata, le sue previsioni erano decisamente troppo limitate. Invece la matematica di Euclide è sempre valida e viene ancora studiata.

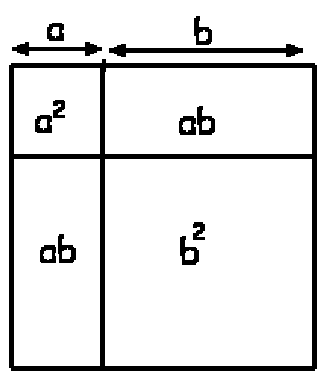
Quindi vediamo che tra le scienze (fisica, chimica, biologia, ecc...) la matematica ha uno statuto decisamente singolare. *Inoltre vediamo che l'essenza della matematica sta nel procediemnto di dimostrazione.* È quindi singolare osservare quanta poca attenzione viene data a questo procedimento nell'insegnamento della matematica, soprattutto a scuola, ma purtroppo, certe volte, anche all'università.

### 1.3. Metodi di dimostrazione, evoluzione del concetto di dimostrazione.

Non è il caso di addentrarci qui nei meandri della logica formale, pertanto diremo in un primo tempo, che una dimostrazione è esattamente quello che avevano già stabilito gli Antichi Greci:

*uno sforzo cosciente* per ordinare le argomentazioni in una successione tale che *il passaggio da una tappa all'altra non lasci alcun dubbio:* in modo che un virtuale interlocutore non potrebbe che acconsentire.

Tutto questo sembra inappuntabile, ma in realtà c'è ancora molto da dire... facciamo alcuni esempi.
Gli Antichi Greci rappresentavano i numeri geometricamente (tramite lunghezze, rapporti tra lunghezze di segmenti, aree, ecc...), non conoscevano il calcolo formale ("con le lettere"), malgrado ciò conoscevano la formula:
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ e la dimostravano così:

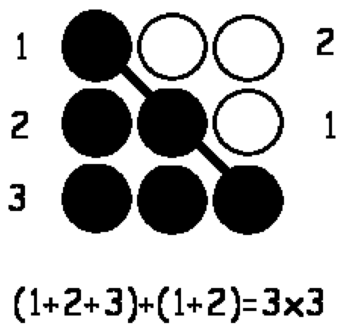



$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Noi oggi facciamo la stessa dimostrazione ma in modo più formale, "astratto": $(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Abbiamo $1+2=3$, $1+2+3=6$, quanto vale in generale la somma dei primi $n$ numeri: $S(n) := 1+2+3+\cdots+n$?

La risposta è: $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Lo si può vedere così: consideriamo un quadrato $n \times n$, per esempio se $n=3$:



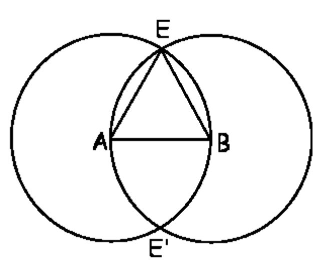

Si capisce che questo è un procedimento generale e quindi che abbiamo $S(n) + S(n-1) = n^2$. Pertanto: $2S(n) = S(n) + S(n-1) + n = n^2 + n$, da cui $S(n) = n(n+1)/2$. Possiamo cercare di essere un pò più convincenti. Possiamo pensare al quadrato $n \times n$ come a una tabella con $n$ righe e $n$ colonne. Ci sono quindi $n^2$ elementi in questa tabella. Abbiamo $n$ elementi sulla diagonale (uno su ogni riga: sulla riga $i$ è quello che sta all'incrocio tra la riga $i$ e la colonna $i$ e $i$ varia da 1 a $n$). Vediamo che $S(n)$ è il numero di elementi che stanno su la diagonale e sotto la diagonale:

Se togliamo gli elementi della diagonale, rimangono $n^2 - n$ elementi: sono quelli che stanno sotto e sopra la diagonale. Chiaramente ci sono altrettanto elementi sopra la diagonale che sotto. Quindi ci sono $(n^2 - n)/2$ elementi sotto la diagonale. Siccome $S(n) =$ il numero di elementi sotto la diagonale $+$ il numero di elementi su la diagonale, abbiamo $S(n) = (n^2 -)/2 + n = n(n+1)/2$.

Stando a quanto detto prima, queste dimostrazioni sembrano ineccepibili: il passaggio da una tappa all'altra non lascia alcun dubbio e un virtuale interlocutore non potrebbe che acconsentire. Beh, non è esattamente così. L'interlocutore potrebbe essere assai pignolo e potrebbe fare questa obbiezione: entrambe le dimostrazioni si basano su un disegno, ma questo disegno non può rappresentare tutte le situazioni possibili (tutti i possibili valori di $a$, $b$; oppure di $n$), chi mi garantisce che per particolari valori di $a$, $b$ (risp. $n$) non salti fuori una situazione completamente diversa? Più precisamente quale regola della logica stai usando per passare dal disegno alla tesi? Formulata in questi termini l'obbiezione è molto forte. E poi potrebbe aggiungere: quando dici "Chiaramente ci sono altrettanto elementi sopra la diagonale che sotto", potresti essere più preciso, per me non è chiaro, "non lo vedo". Questa obbiezione è giustificata ("Chiaramente si vede che..." non è il massimo dello sforzo per far sì che il passaggio da una tappa all'altra non lasci alcun dubbio) ma si può risolvere facilmente con un semplice ragionamento di simmetria. Inoltre potrebbe anche aggiungere: nella dimostrazione "formale" di $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ si usano delle regole che sono vere per i numeri (naturali, reali) ma che potrebbero essere false per altri oggetti matematici. Quindi bisognerebbe precisare l'ambito in cui siamo. Per esempio non è sempre vero che $ab = ba$. Infatti sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$. La funzione composta $f \circ g$ è definita da $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x^2$, mentre $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 4x^2$, quindi $f \circ g \neq g \circ f$. Se invece di scrivere $\circ$ scrivo ., mi viene $f.g \neq g.f$. Anche questa obbiezione, giustificata, si può risolvere facilmente precisando bene gli oggetti (numeri e non funzioni) e le regole di calcolo (commutatività, distributività, ecc...).

Ma, come già detto, la prima obbiezione rimane, da un punto di vista formale, molto forte.

Un esempio classico di quello che si potrebbe chiamare la "trappola del disegno" ci è fornito da Euclide stesso. Infatti la prima proposizione degli Elementi riguarda la costruzione, con riga e compasso, di un triangolo equilatero. Dato un segmento $AB$, Euclide procede nel modo seguente: punta il compasso in $A$, lo apre fino a $B$ e traccia la circonferenza, $C$, di centro $A$, raggio $\overline{AB}$; poi punta il compasso in $B$ e traccia la circonferenza, $C'$, di centro $B$, raggio $\overline{AB}$. Finalmente afferma che $C$ e $C'$ s'intersecano in due punti, $E, E'$, uno "sopra" e uno "sotto" il segmento $AB$. Il triangolo $ABE$ è equilatero (come pure il triangolo $ABE'$).



Bene, purtroppo non c'è nulla negli assiomi che permetta di dimostrare che le due circonferenze debbano incontrarsi! In effetti due circonferenze possono anche non incontrarsi! Peggio ancora: se lavoriamo non con numeri reali, ma solo con numeri razionali, la costruzione di Euclide può anche far acqua! Infatti se $A = (0,0)$ e $B = (1,0)$, allora $E = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $E' = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, ma $\sqrt{3}$ non è razionale! Quindi nel "piano razionale" $\mathbb{Q}^2$ i punti $E, E'$ non esistono!

Per dare una dimostrazione formalmente inattacabile della formula per $S(n)$ si può usare il metodo di dimostrazione per induzione. Di cosa si tratta? L'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ dei numeri naturali ha una proprietà notevole: ogni sottoinsieme (non vuoto) $X \subset \mathbb{N}$ possiede un più piccolo elemento; in particolare ogni elemento $n \in \mathbb{N}$ ha un "successore": $n+1$. Quindi possiamo rappresentarci $\mathbb{N}$ come una scala, infinita, a pioli. Il primo piolo è 0, il successivo è 1, ecc... Sia adesso $P(n)$ una proprietà dipendente da $n \in \mathbb{N}$ (per esempio $P(n)$ potrebbe essere: $S(n) = n(n+1)/2)$. Dimostrare $P(n)$ significa dimostrare $P(n)$ <u>per ogni</u> piolo della scala infinita. Come possiamo essere sicuri di percorrere la scala (infinita) senza tralasciare alcun piolo? Per questo basta sapere fare due cose:

(1) Sapere mettere il piede sul primo piolo
(2) Ogni volta che si mette il piede sul piolo $n$, sapere che lo si può mettere anche sul successivo (il piolo $n+1$)

Infatti, per 1.) posso mettere il piede sul piolo 0. Poi, per 2.), su quello successivo, cioè il piolo 1. Poi, sempre per 2.), sul piolo 2, ecc...in questo modo sono sicuro di percorrere la scala senza tralasciare alcun piolo. In matematichese 1.) si chiama caso iniziale (dell'induzione) e 2.) "passo d'induzione". Per dimostrare $P(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (per ogni $n$ in $\mathbb{N}$) basta quindi:

(1) Dimostrare $P(0)$
(2) Dimostrare che, per ogni $n$, se $P(n)$ è vera, allora anche $P(n+1)$ lo è

In matematichese:

(1) $P(0)$ è vera
(2) $\forall n \in \mathbb{N}$: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (per ogni $n$, $P(n)$ implica $P(n+1)$, in questa situazione $P(n)$ viene chiamata "ipotesi di induzione")

Osserviamo che per dimostrare $P(n)$ non per tutti gli $n$, ma solo per quelli $\geq a$ (cioè si vuole percorrere la scala ma partendo dal piolo $a$), si può procedere nello stesso modo predendo come caso iniziale $P(a)$.
Cerchiamo di dimostrare $S(n) = n(n+1)/2$ per ogni $n \geq 1$, dobbiamo quindi dimostrare:

(1) $S(1) = 1$
(2) $\forall n \geq 1$, se $S(n) = n(n+1)/2$, allora $S(n+1) = (n+1)(n+2)/2$

La condizione 1.) è evidente.
Per la condizione 2.): $S(n+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = S(n) + (n+1)$. Per

ipotesi di induzione, $S(n) = n(n+1)/2$. Riscrivo l'espressione di $S(n+1)$ usando questa ipotesi: $S(n+1) = n(n+1)/2 + (n+1)$. Adesso $n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)[\frac{n}{2} + 1] = (n+1)(n+2)/2$. Quindi $S(n+1) = (n+1)(n+2)/2$ e 2.) è dimostrato. Questo dimostra la formula $S(n) = n(n+1)/2$ per ogni $n \geq 1$.

Questa dimostrazione è formalmente inattacabile (non c'è più alcun disegno, nè "chiaramente si vede che..."), però per l'addetto ai lavori presenta un grosso inconveniente: per dimostrare la formula per $S(n)$ bisogna prima conoscerla! Al contrario, invece, la dimostrazione precedente permette di *trovare* la formula anche se uno non la conosce. Il matematico procederà nel modo seguente: prima cercherà di "trovare" (o anche solo *indovinare*!) la formula, la risposta e, poi, cercherà di dimostrarla in modo rigoroso e formale affinchè "il passaggio da una tappa all'altra non lasci alcun dubbio".

## ESERCIZI.

**Esercizio 1.1:** *(i) Dimostrare, per induzione su $k$, che la somma dei primi $k$ numeri dispari: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)$ vale $k^2$.*
*(ii) Trovare una dimostrazione "geometrica" (con un disegno) di (i).*
*(iii) Dimostrare una formula analoga per la somma dei primi $k$ numeri pari. Ritrovare così la formula per $S(n)$.*

**Esercizio 1.2:** *Scopo di questo esercizio è di dimostrare una formula per $Q(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, la somma dei primi $n$ quadrati. Dobbiamo prima "trovare" ("indovinare") la formula. Per analogia possiamo provare la cosa seguente: la formula per $S(n)$ era un polinomio del secondo grado in $n$, potrebbe essere (why not?) che quella per $Q(n)$ sia un polinomio del terzo grado: $an^3 + bn^2 + cn + d$. Proviamo e cerchiamo di determinare $a, b, c, d$:*
*(i) Determinare $a, b, c, d$ (porre $n = 0, 1, 2, 3$ e scrivere un sistema lineare di quattro equazioni nelle incognite $a, b, c, d$, poi risolvere).*
*(ii) Adesso che abbiamo un candidato come formula di $Q(n)$, possiamo dimostrare, per induzione su $n$ che questa formula è effettivamente valida per ogni $n$.*

**Esercizio 1.3:** *Dimostrare, per induzione su $n$, che:*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{(n^2+n)^2}{4}.$$

*N.B. La somma dei cubi è il quadrato di $S(n)$.*

**Esercizio 1.4:** *(i) Sia $C$ la circonferenza di centro l'origine e di raggio 1. Sia $C'$ la circonferenza di centro $B = (1, 0)$ e di raggio 1. Dimostrare che $C$ e $C'$ s'intersecano nei due punti $E = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $E' = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (Si ricorda che l'equazione della circonferenza di centro $P = (a, b)$ e raggio $r$ è $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$).*
*(ii) Come possono intersecarsi due circonferenze (del piano reale)?*
*(a) Mostrare che due circonferenze (distinte) possono intersecarsi in al più due punti (provare per credere!).(hint: fare la differenza delle due equazioni.)*
*(b) Mostrare che le possibilità sono tutte e sole:*

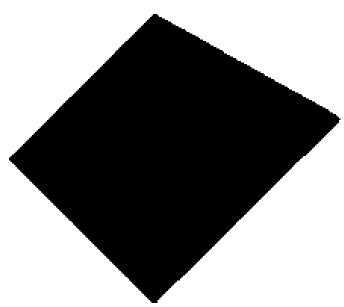
(1) *Le due circonferenze non s'intersecano*
(2) *Le due circonferenze s'intersecano in un punto (in questo caso sono tangenti in quel punto)*
(3) *Le due circonferenze s'intersecano in due punti*

**Esercizio 1.5:** *Siano $a, b, c$ tre numeri reali. Dare una condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un triangolo in cui lati abbiano lunghezze $a, b, c$. (Suggerimento: "la strada più corta tra due punti è la linea retta" poi usare la riga e il compasso).*

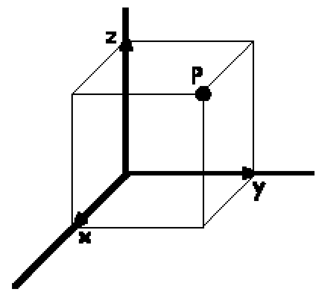
## 2. La nozione di dimensione in geometria.

**2.1. Quello che vogliamo.** Intuitivamente la dimensione di una figura geometrica è il numero di gradi di libertà con cui un punto della figura può muoversi (sulla figura). Per esempio su una retta un punto ha un unico grado di libertà.


Questo è abbastanza chiaro perchè possiamo individuare un punto su una retta con un'unica coordinata. In modo analogo un punto su una curva (che sia nel piano o nello spazio) ha un unico grado di libertà. Questo è abbastanza chiaro intuitivamente, ma più difficile da precisare matematicamente. Si può pensare, per esempio, che dopo tutto, una curva non è nient'altro che una retta "deformata". In modo analogo un punto nel piano ha due gradi di libertà perchè possiamo individuare un punto nel piano con due coordinate.

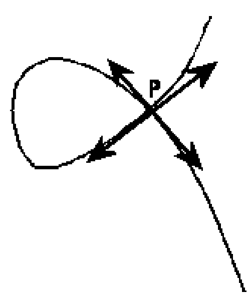


Invece nello spazio servono tre coordinate, ecc...



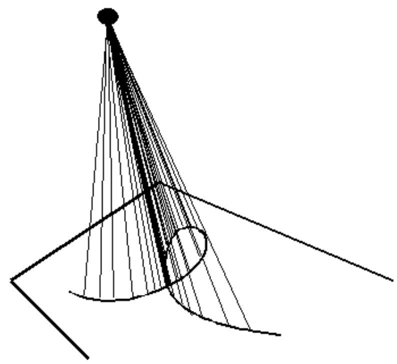

Stando a quanto detto finora, una curva ha dimensione uno; una superficie, dimensione due; un volume, dimensione tre ecc...

**2.2. La realtà (matematica).** Il discorso precedente è sensato ma non del tutto corretto. Per esempio, punti particolari (chiamati *punti singolari* o *singolarità*) su certe curve possono muoversi con *due* gradi di libertà:

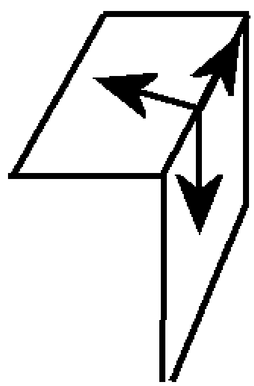



Questa è la cubica (piana) nodale, la curva passa due volte per il nodo, nel nodo ci sono due gradi di libertà (due tangenti).

Stessa cosa per punti particolari (singolari) di alcune superfici:



Questo è il cono sulla cubica nodale. Lungo la retta in rosso (che passa per il nodo) la superficie ha due falde, localmente in un punto generale della retta in rosso la superficie è come l'unione di due piani:



Un punto della retta d'intersezione dei due piani ha tre gradi di libertà sulla superficie costituita dall'unione dei due piani.

Ma c'è ben di peggio! Nel 1877 il matematico Georg Cantor (il creatore della teoria degli insiemi) si accorse, con stupore ("lo vedo ma non posso crederci!"), che era possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti di un segmento e quelli di un quadrato: quindi ad ogni punto del segmento è possibile associare uno, ed un unico, punto del quadrato e viceversa ad ogni punto del quadrato corrisponde uno, ed un unico, punto del segmento! In altri termini, le due coordinate del quadrato si riducono all'unica coordinata del segmento, insomma il piano ha dimensione uno!
Dobbiamo quindi rinunciare alle nostre intuizioni, al tradurre matematicamente la nostra percezione dello spazio?

No, si tratta solo di fare un pò d'ordine... Ormai dopo secoli di dibattiti e scoperte sconcertanti si ha una buona e ragionevole traduzione matematica della nozione di dimensione. La si può riassumere, molto brutalmente, nel modo seguente:

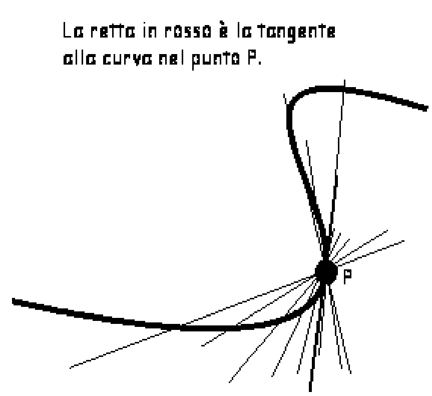
(1) Si inizia con le figure ("varietà") geometriche più semplici: retta, piano, spazio,... Queste sono le varietà "lineari", in prima approssimazione possiamo pensare ad una retta come alla retta reale $\mathbb{R}$, ad un piano come a $\mathbb{R}^2$, lo spazio $\mathbb{R}^3$, uno spazio $n$-dimensionale come ad $\mathbb{R}^n$. Un punto $P \in \mathbb{R}^n$ è univocamente determinato dalle sue $n$ coordinate $P = (x_1, ..., x_n)$ quindi diciamo che $\mathbb{R}^n$ ha dimensione $n$.

(2) Una figura geometrica, $V$, si dice "regolare" se la si può approssimare (localmente nel punto $P$) da una varietà lineare $L$. In questo caso si dice che $V$ ha dimensione (localmente in $P$) $dim(L)$.

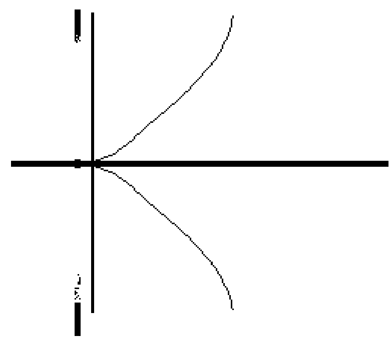
(3) Si usano solo trasformazioni "regolari" (per rimanere nell'ambito delle figure "regolari")

L'ultima condizione è importante: se ho una varietà "regolare" di dimensione $n$, voglio che la varietà risultante da una trasformazione "regolare" abbia ancora dimensione $n$, di modo che la dimensione sia un invariante intrinseco della mia varietà. In questo modo abbiamo una buona nozione di dimensione per le varietà geometriche "regolari". E le altre? beh, lì, ci si arrangia... È forse bene aggiungere che la corrispondenza di Cantor tra i punti di un segmento e quelli di un quadrato non è "regolare".

**2.3. Varietà lineari e varietà regolari.** Per chiarire la nozione di varietà "regolare" consideriamo il caso di una curva, si potrebbe dire che una curva è regolare se ammette una, ed una sola, tangente in ogni punto. Questo significa la cosa seguente: se prendo un punto $P$ della curva $C$, allora se $Q \neq P$ è un altro punto di $C$, posso considerare la retta $[P, Q]$. Adesso si fa tendere $Q$ a $P$ sulla curva $C$, allora, le rette $[P, Q]$, al variare di $Q$ hanno un limite e la retta limite è la tangente.



Si può dire che, infinitesimalmente, intorno al punto $P$, la tangente "approssima" la nostra curva $C$, quindi, "localmente", $C$ è una retta (pensate di fare un disegno al computer di una curva e la sua tangente in $P$, se usate lo strumento zoom su $P$, vedrete che i pixels di $C$ e della tangente sono gli stessi), quindi $C$ ha dimensione uno (in $P$).
Stessa cosa con una superficie, ma questa volta si usa un piano tangente.
Vediamo così che i contresempi di Sezione 2.2 non sono varietà regolari.
Nei corsi di analisi e di geometria verrano date definizioni rigorose di varietà "regolari" (ci sono vari tipi di regolarità). Certe volte può essere abbastanza sottile decidere se una varietà è o meno regolare. Per esempio la cuspide di equazione $y^2 = x^3$ si presenta così:



Nell'origine c'è un'unica tangente (l'asse delle $x$), però questa curva non è regolare nell'origine (è una curva parametrica data da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \to (t^2, t^3)$, la derivata $Df = (2t, 3t^2)$ si annulla quando $t = 0$). Il fatto è che la tangente è unica ma deve essere contata con molteplicità due, è una tangente "doppia".

**2.4. Algebra lineare.** L'idea quindi è di approssimare figure complesse con figure semplici che conosciamo bene (rette, piani, ecc...). Più generalmente si cerca di approssimare fenomeni complessi con fenomeni più semplici. La curva più semplice è la retta, la superficie più semplice, il piano: sono varietà lineari, cioè varietà che possono essere descritte dalle funzioni più semplici, cioè le funzioni lineari (polinomi di grado uno). Un fenomeno è lineare se l'output è proporzionale all'input (con sempre lo stesso fattore di proporzionalità): $y = ax$. Pagare la spesa è un fenomeno lineare: se $a = 3$ è il prezzo al kilo dei pomodori e se $x$ è la quantità di pomodori che comprate $(2, 3, 5$ kili), $y$ è quanto spendete $(6, 9, 15)$: spendete proporzionalmente a quanto comprate (il fattore di proporzionalità è $a = 3$). L'equazione $y = ax$ rappresenta una retta nel piano che passa per l'origine. Una retta che non passa per l'origine ha un'equazione della forma $y = ax + b$. Anche questa rappresenta un fenomeno lineare, ma "con una tassa in partenza". Per esempio consumare bibite

in discoteca: $a$ è il prezzo di una bibita, $x$ il numero di bibite che consumate, $b$ è quanto pagate per entrare in discoteca e $y$ i soldi che spendete. Una volta entrati (e pagata la "tassa" $b$), la vostra spesa sarà proporzionale al numero di bibite che consumate (invece in un bar l'equazione è come prima $y = ax$).
Un punto $P = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ è sulla retta $R$ di equazione $y = ax + b$ se e solo se le sue coordinate verificano l'equazione della retta: $y' = ax' + b$, cioè: $y' - ax' - b = 0$. Se moltiplico entrambi i membri per $d \neq 0$, viene: $d(y' - ax' - b) = d.0 = 0$. Siccome $d \neq 0$, $d(y' - ax' - b) = 0$ se e solo se $y' - ax' - b = 0$. Quindi anche $dy - dax - db = 0$ è un'equazione della retta $R$. Quindi vediamo che la forma più generale per l'equazione di una retta nel piano è: $ax + by + c = 0$ ($ax + by = 0$ se $R$ passa per l'origine). Possiamo facilmente convincerci che la retta $R$ di equazione $ax + by = 0$ ha dimensione uno. Se $b \neq 0$, $y = -\frac{a}{b}x$. Quindi per darsi un punto di $R$ basta darsi una coordinata: se mi do $x$, ricupero $y$ tramite $y = -\frac{a}{b}x$ (quindi un grado di libertà). (Se $b = 0$, l'equazione diventa $ax = 0$, siccome deve essere $a \neq 0$, l'equazione si riduce a $x = 0$ e $R = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.)

Siano $R$, $R'$ due rette del piano di equazioni: $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$. Un punto dell'intersezione $R \cap R'$ deve verificare entrambe le equazioni, quindi è una soluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Per commodità supponiamo $a, b, a', b', c, c'$ tutti non nulli. Dalla prima equazione: $y = \frac{c-ax}{b}$. Inserendo nella seconda: $x(\frac{a'b-ab'}{b}) = \frac{c'b-cb'}{b}$ (+). Se $a'b - b'a \neq 0$, allora si ricava $x$ e quindi $y$: le due rette s'intersecano in un punto. Se $a'b - b'a = 0$, (+) diventa $0 = \frac{c'b-cb'}{b}$. Se questa relazione non è verificata ($c, c', b, b'$ sono noti), allora il sistema non ha soluzioni (le due rette sono parallele distinte); se invece la relazione è verificata, abbiamo $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$: le due equazioni rappresentano la stessa retta, il sistema ha un'infinità di soluzioni (i punti della retta).

Nello spazio $\mathbb{R}^3$ l'equazione $ax + by + cz = 0$ rappresenta un piano, $\Pi$, che passa per l'origine. Se $c \neq 0$, possiamo scrivere $z = -\frac{ax+by}{c}$ $(*)$ e vediamo che per darsi un punto di $\Pi$ basta darsi le due coordinate $x, y$, poi con $(*)$ si ricupera $z$. (Osservare che uno tra $a, b, c$ è diverso da zero). Ritroviamo così che un piano ha dimensione due.

Più generalmente in $\mathbb{R}^n$ un'equazione del tipo $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ (con gli $a_i$ non tutti nulli) rappresenta una varietà lineare di dimensione $n - 1$ (una tale varietà viene chiamata *iperpiano*). Se per esempio $a_n \neq 0$, $x_n = -\frac{a_1x_1+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}}{a_n}$ e basta darsi $x_1, ..., x_{n-1}$ per poi ricuperare $x_n$.

Siano $\Pi, \Pi'$ due piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$. I punti dell'intersezione $\Pi \cap \Pi'$ sono le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

Supponiamo, per commodità, $c \neq 0$. Dalla prima equazione si ricava: $z = \frac{-d-by-ax}{c}(+)$. Inserendo nella seconda equazione: $Ax + By + D = 0$ (@) dove $A = a'c - c'a$, $B = b'c - c'b$, $D = cd' - c'd$. Se $A = B = 0$, rimane $D = 0$ se questa relazione è verificata, le due equazioni del sistema iniziale sono proporzionali e rappresentano lo stesso piano ($\Pi = \Pi'$), il sistema ha infinite soluzioni. Se $D \neq 0$, il sistema non ammette soluzioni, in questo caso $\Pi$ e $\Pi'$ sono paralleli disgiunti. Se uno tra $A$ o $B$ è diverso da zero (caso generico), diciamo $A \neq 0$, da (@) si ricava: $x = \frac{-By-D}{A}$ $(**)$ e per ogni valore di $y$ abbiamo una soluzione: con $(**)$ si ottiene $x$ e poi con $(+)$ si ottiene $z$. In questo caso l'insieme delle soluzioni ha dimensione uno (parametrizzato da una variabile ($y$) tramite $(+)$ e $(**)$): i due piani s'intersecano lungo una retta.

Quindi nello spazio, due piani non paralleli s'intersecano lungo una retta. Viceversa, data una retta $R$, $R$ è l'intersezione di due piani che la contengono (osservare che ci sono infiniti piani che contengono $R$). Per riassumere:

**Proposizione 2.1:** *Due piani non paralleli di $\mathbb{R}^3$ s'intersecano lungo una retta. Una retta $R \subset \mathbb{R}^3$ è definita da due equazioni, cioè $R$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare del tipo:*

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

Osservare che una retta ha dimensione uno e che ci vogliono $3-1=2$ equazioni per definirla. In generale se $V \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà di dimensione $d$, il numero $dim(\mathbb{R}^n) - dim(V) = n - d$ si chiama la *codimensione* di $V$ in $\mathbb{R}^n$. In generale si può dimostrare:

**Proposizione 2.2:**
(1) *Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ una varietà lineare. Allora $V$ è definita da $codim(V)$ equazioni lineari, cioè $V$ può essere rappresentata come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di $codim(V)$ equazioni in $n$ incognite.*
(2) *In generale l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di $r$ equazioni in $n$ incognite è una varietà lineare $V \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione $n-r$.*

Si può dare un senso molto preciso alla locuzione "In generale" del secondo punto della Proposizione 2.2: significa che le equazioni sono *linearmente indipendenti* (nell'esempio qui sopra dei due piani di $\mathbb{R}^3$ questo equivale a $A \neq 0$ o $B \neq 0$). Uno degli obbiettivi del corso di Geometria 1 è di sviluppare una teoria ("teoria dei

determinanti") che ci fornisca degli strumenti per verificare con facilità se siamo o meno in questa situazione.
Nell'enunciato precedente, se $n - r < 0$, s'intende che il sistema non ha soluzioni ($V = \emptyset$).
La Proposizione 2.2 è più o meno il cosidetto teorema di Rouché-Cappelli. Idea della dimostrazione: Sia:

$$\begin{cases} f_1(X) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + d_1 = 0 \\ f_2(X) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + d_2 = 0 \\ \qquad \cdots \\ f_r(X) = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n + d_r = 0 \end{cases}$$

il nostro sistema lineare. Con la prima equazione $f_1(X) = 0$ si esprime una delle variabili in funzione delle altre $n - 1$ (per esempio, se $a_{11} \neq 0$, $x_1$ in funzione di $x_2, ..., x_n$). Si inserisce nelle altre equazioni. La seconda equazione è adesso un'equazione in $n - 1$ variabili. Si esprime una delle variabili in funzione delle altre $n - 2$. Si inserisce nelle altre equazioni. Si procede così fino all'ultima equazione (la $r$-esima) che è ormai un'equazione in $n - (r - 1) = n - r + 1$ variabili. Si esprime una delle variabili in funzione delle altre $n - r$. Se tutto è andato liscio, "tornando indietro", abbiamo (per esempio):

$$\begin{cases} x_1 = L_1(x_{r+1}, ..., x_n) \\ x_2 = L_2(x_{r+1}, ..., x_n) \\ \qquad \cdots \\ x_r = L_r(x_{r+1}, ..., x_n) \end{cases}$$

e ogni volta che diamo dei valori a $x_{r+1}, ..., x_n$, ricaviamo con queste relazioni i corrispondenti valori di $x_1, ..., x_r$, quindi l'insieme delle soluzioni è:

$$\{(x_1 = L_1(x_{r+1}, ..., x_n), ..., x_r = L_r(x_{r+1}, ..., x_n), x_{r+1}, ..., x_n)) | (x_{r+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-r}\}$$

quindi l'insieme delle soluzioni è parametrizzato dalle $n - r$ variabili $x_{r+1}, ..., x_n$ e pertanto ha dimensione $n - r$.

Questo procedimento è lo standard della *teoria dell'eliminazione* (man mano, si eliminano le variabili), un argomento piuttosto importante in algebra e geometria algebrica. Per quanto riguarda i sistemi lineari esistono dei metodi pratici, espliciti ("metodo di Gauss" o "del pivot").

Abbiamo detto che questa è la situazione *in generale*, cosa può andare storto? Facciamo un esempio semplice con tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \\ f_3(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Se $f_1 = f_3$, chiaramente la terza equazione è superflua, possiamo toglierla e il nostro sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni avrà dimensione $\geq 1$ e non zero. Infatti se si esprime, diciamo, $x$ in funzione di $y, z$ con $f_1$ e poi $y$ in funzione di $z$ con $f_2$ quando poi si inserisce in $f_3 = f_1$ si trova, giustamente, l'identità $0 = 0$ che non ci dà nessuna ulteriore informazione. Questo caso è facile perchè si vede "a occhio".
Supponiamo adesso $f_3 = 2f_1 - 3f_2$ (per esempio $f_1 : x + y + z - 1 = 0$, $f_2 : x - y + z - 2 = 0$, $f_3 = -x + 5y - z + 4 = 0$). In queste condizioni si dice che $f_3$ è *combinazione lineare* di $f_1, f_2$.
Anche in questo caso $f_3$ è superflua: infatti se $f_1(X) = 0$ e $f_2(X) = 0$, allora $f_3(X) = 2f_1(X) - 3f_2(X) = 0$. Ma questa volta è più difficle accorgersene "a occhio".
In generale, una o più delle $r$ equazioni potrebbe essere combinazione lineare di altre...
Infine un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1 \\ g_2(X) = d_2 \\ \cdots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_r \end{cases}$$

con $d_1 \neq d_r$, chiaramente, non ammette soluzioni. Anche qui si possono fare delle "combinazioni lineari" per complicare questo esempio.

**2.5. Conclusioni.** Il contenuto della Sezione 2.4 rappresenta, in forma molto condensata, una buona parte del corso di Geometria 1 il cui argomento è appunto l'algebra lineare. L'algebra lineare è omnipresente in matematica (calcolo differenziale, analisi funzionale, geometria differenziale, geometria algebrica, analisi numerica, informatica teorica, ecc...) e questo non è sorprendente in quanto, come abbiamo già detto, consiste nello studio dei fenomeni lineari, i fenomeni che meglio capiamo e che ci servono a studiare (approssimare) fenomeni più complessi.
Il corso di Geometria 2 (geometria affine ed euclidea) può essere visto come semplici applicazioni dell'algebra lineare.
Il lettore avrà osservato l'interazione tra algebra (equazioni) e geometria. Geometricamente la Proposizione 2.2 significa che una varietà lineare $V \subset \mathbb{R}^n$ è l'intersezione di $codim(V)$ iperpiani che la contengono. Questa interazione si sviluppa ulteriormente in geometria algebrica, materia che si occupa dello studio dei sistemi di equazioni polinomiali (con polinomi di grado qualsiasi).

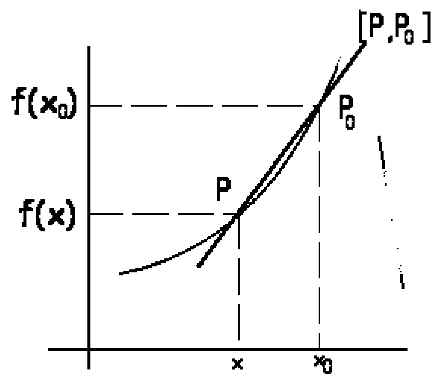
Per concludere, due parole su l'importanza della nozione di dimensione. In matematica questo concetto è fondamentale e affonda le sue radici in questioni

basilari come per esempio le nozioni di limite e continuità e la costruzione dei numeri reali ("la retta reale è un continuum a una dimensione"). La nozione di dimensione è importante anche in fisica. Per esempio la relatività afferma che viviamo in uno spazio a 4 dimensioni. Riusciamo a muoverci e viaggiare nelle tre dimensioni spaziali ma siamo completamente incanalati nella dimensione temporale, prigionieri. Anzi si potrebbe dire che non abbiamo veramente coscienza di questa dimensione. Uno dei più grandi sogni dell'uomo è di addomesticare anche questa dimensione. Per questo bisogna capirla meglio...
Teorie fisiche più recenti ("teoria delle stringhe") affermano che l'universo avrebbe un numero esagerato di dimensioni (26 o 28, credo), più precisamente in alcuni punti ("punti singolari") l'universo sarebbe incurvato su stesso e lì ci sarebbero ulteriori dimensioni... Tutto ciò è assai fantascientifico, ma potrebbe spiegare parecchie cose. A questo proposito raccomando, per chi riuscisse a trovarlo, la lettura di "Flatland" di Abbott che descrive un mondo ipotetico a due dimensioni. Per esempio in un simile mondo (immerso in un mondo a tre dimensioni) il teletrasporto "à la Star Streck" è possibile.

## ESERCIZI.

**Esercizio 2.1:** *L'equazione generale di una retta nel piano è della forma* $ax+by+c=0$. *Se* $b \neq 0$ *questa equazione si può scrivere nella forma* $y=\alpha x+\beta$, *più familiare.*
*(i) Descrivere le rette di equazione* $ax+c=0$.
*(ii) Sia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to f(x)$ *una funzione. Può il grafico di* $f$ *incontrare una retta di equazione* $ax+c=0$ *in più di un punto?*

**Esercizio 2.2:** *Sia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to f(x)$ *una funzione derivabile. La derivata in* $x_0$ *è* $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$.




*La retta* $[P,P_0]$ *ha un'equazione della forma* $y=ax+b$ *(cf Esercizio 2.1). Mostrare che* $a=\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$. *(Quindi la derivata* $f'(x_0)$ *è la pendenza della tangente al grafico di* $f$ *nel punto* $(x_0,f(x_0))$*.) Scrivere l'equazione della tangente al grafico di* $f$ *nel punto* $P_0=(x_0,f(x_0))$.

**Esercizio 2.3:** *Risolvere il sistema lineare:*

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$$

**Esercizio 2.4:** *Risolvere il sistema lineare:*

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-y+3z=-1 \\ -x+3y-5z=4 \end{cases}$$

**Esercizio 2.5:** *Un piano (non un iperpiano) in* $\mathbb{R}^4$ *è una varietà lineare di dimensione due.*
*(i) Da quante equazioni è definito un piano in* $\mathbb{R}^4$ *?*
*(ii) Determinare tutte le possibili dimensioni dell'intersezione di due piani in* $\mathbb{R}^4$.