quaderni di CABRIRRSAE

Presentazione a cura di
Franca Noè
e
Aurelia Orlandoni

FLAT*landia*

anno X

geometria on-line nella scuola secondaria

n° 31

Franca Noè, insegnante di matematica, collaboratore di ex-IRRE-ER, fa parte della redazione di **FLAT*landia*** e coordina le attività.

Aurelia Orlandoni, insegnante di matematica, ricercatore ex-IRRE-ER, è responsabile del sito FARDICONTO e delle attività collegate.

Il gruppo che gestisce FLAT*landia* è composto da:

- *Giuliana BETTINI - Insegnante di matematica*
- *Giuliano MAZZANTI - Docente di geometria, Univ. di Ferrara*
- *Franca NOE' - Insegnante di matematica*
- *Valter ROSELLI - Ricercatore, Univ. di Ferrara*
- *Luigi TOMASI - Insegnante di Matematica*

Indice

FLAT*landia*

E' un'attività dell'IRRE Emilia-Romagna rivolta principalmente agli alunni del terzo anno della Scuola Media Inferiore e del biennio della Scuola Secondaria Superiore.
La partecipazione all'attività è stata allargata agli studenti del terzo anno di scuola superiore per permettere ai "fedelissimi" di misurarsi ancora con quesiti di geometria sintetica e di approfondire le conoscenze acquisite nel biennio.
Ogni mese viene chiesto ai ragazzi di risolvere un problema di geometria. Entro lo stesso mese vengono valutate le risposte pervenute e vengono segnalate quelle ritenute meritevoli.
Testo e soluzioni sono inviati usando esclusivamente collegamenti telematici.

Un po' di storia

I problemi raccolti in questo quaderno testimoniano il decimo anno di attività dell'iniziativa. FLATlandia, nata come supporto alla lista di discussione Cabrinews, gode ormai di una sua vita autonoma ed ha un piccolo pubblico di affezionati.
Le scuole partecipanti sono passate da ventuno, nel primo anno, alle attuali quindici con un picco di trentotto nell'anno 2000/2001.

Il progetto

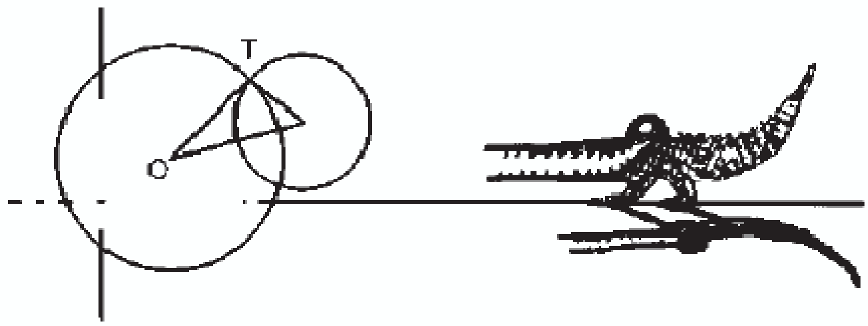
E' gestito da un comitato composto da due insegnanti di scuola secondaria, da due docenti universitari e da un tecnico informatico. Come negli anni passati, il problema proposto mensilmente richiede di solito una costruzione ed una dimostrazione.
L'intento è quello di coinvolgere gli alunni in una attività che richiede sì conoscenze, ma anche fantasia, creatività, immaginazione.
In questo momento di forte auspicio di utilizzo di nuove tecnologie nell'insegnamento/apprendimento di varie discipline, FLATlandia si propone come attività al passo coi tempi, senza nulla concedere all'improvvisazione e al pressapochismo.
I problemi proposti richiedono, per essere risolti, sicure competenze e conoscenze matematiche; sollecitano, come già detto, fantasia e creatività, che sono gli aspetti forse più caratteristici di questa disciplina. Qualora vengano utilizzati software, è necessario averne una conoscenza abbastanza approfondita. Per spedire i materiali in forma adeguata (testo e figure) bisogna padroneggiare discretamente le tecnologie informatiche.
La partecipazione a FLATlandia può essere inoltre anche un incentivo, per i ragazzi, a migliorare le loro capacità di argomentazione e di esposizione.

Come partecipare

I problemi sono inviati alla lista di discussione Cabrinews (cabrinews@liste.keynes.scuole.bo.it) il primo lunedì di ogni mese, da ottobre a maggio, oppure sono consultabili in rete negli archivi del progetto all'indirizzo: http://www.fardiconto.it/flatlandia.
Gli alunni possono partecipare singolarmente, per gruppi, o inviando un'unica soluzione a nome di tutta la classe. Le soluzioni dovranno pervenire entro il terzo lunedì del mese, al seguente indirizzo di posta elettronica: flatlandia@fardiconto.it, inserendo nel mail il nome, la classe e il nominativo dell'Istituto.

Ulteriori informazioni

Le soluzioni possono essere scritte o direttamente nel messaggio di posta elettronica o in un file in formato Word, inviato in allegato. Se si vuole allegare un disegno deve essere inviato o in formato Cabri-géomètre per Windows, altrimenti in formato Word.

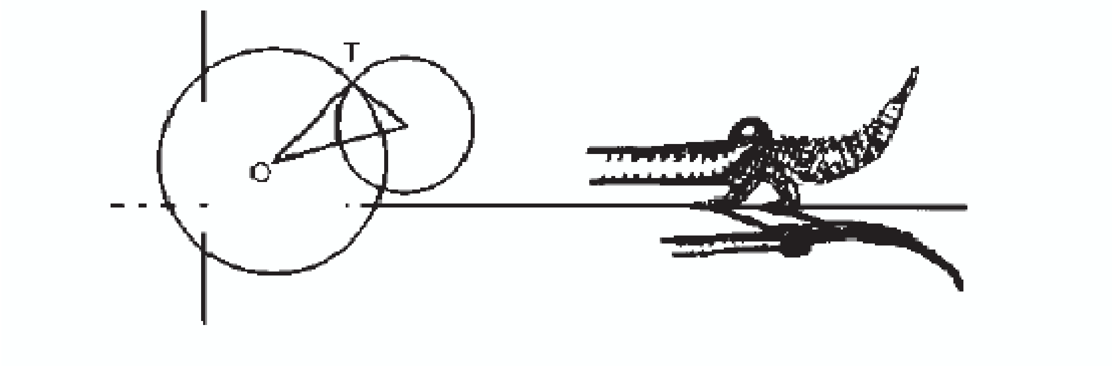


FLAT*landia*

Attività 2006-2007

Tabella riassuntiva delle scuole che hanno inviato soluzioni nel 2006-2007

			Scuola	Frequenza							
				O	**N**	**D**	**G**	**F**	**M**	**A**	**M**
MEDIE	INFERIORI	1	SM "C. A. Dalla Chiesa" S. Genesio (PV)	♦	♦	♦	♦		♦	♦	♦
		2	SM "Galilei", Sasso Marconi (BO)	♦							
		3	SM "Giusti-Gramsci", Monsummano Terme (PT)		♦						
		4	SM "G.B.Tiepolo", Milano (MI)					♦			
ISTITUTI	TECNICI	5	ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR)				♦	♦			♦
		6	ITCG "Ruffini" Imperia (IM)	♦							
		7	ITI "G. Giorgi" Brindisi (BR)	♦							
LICEI SCIENTIFICI	e GINNASI	8	LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)	♦	♦		♦				
		9	LS "G.C. Vanini", Lecce (LE)	♦							
		10	LS "Aristosseno", Taranto (TA)			♦	♦	♦	♦	♦	♦
		11	LC "T.L. Caro" Sarno (SA)	♦							
		12	LS "T. Gullace", Roma (RM)		♦		♦				
		13	LS "A. Righi", Bologna (BO)			♦					
		14	LS "G.C. Vanini", Casarano (LE)					♦			
		15	LS "A. Roiti", Ferrara (FE)							♦	



FLAT*landia*

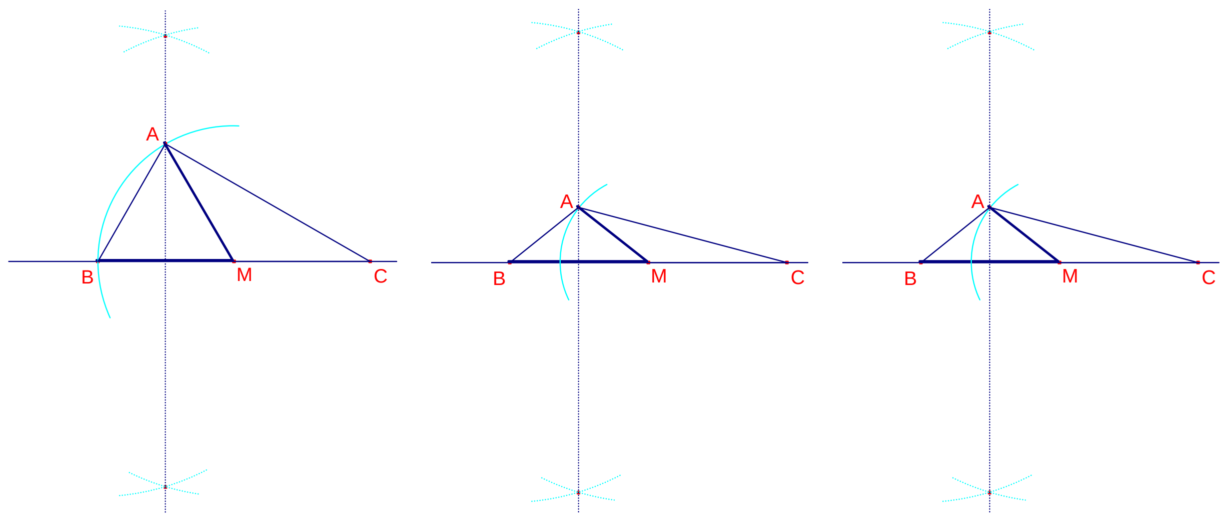
Problemi e soluzioni

Ottobre 2006

1) Fissato un segmento BC, costruire un triangolo ABC in cui la mediana AM sia congruente al lato AB.

2) Come si dovrà scegliere AM affinché il triangolo ABC sia rettangolo o acutangolo o ottusangolo?

Giustificare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto otto risposte, due da scuole secondarie inferiori, cinque da scuole superiori, una non ha dichiarato la provenienza.
Diamo il benvenuto alle scuole e agli studenti che per la prima volta partecipano a questa attività. Contiamo di riuscire a coinvolgerli anche in seguito con i nostri quesiti.

- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)*
- *ITI "G. Giorgi", Brindisi (BR)*
- *LS "G.C. Vanini", Lecce (LE)*
- *LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)*
- *ITCG "Ruffini" Imperia (IM)*
- *SM "Galilei", Sasso Marconi (BO)*
- *LC "T.L. Caro" Sarno (SA)*

Nel problema proposto si chiedeva prima una semplice costruzione basata sulla proprietà dell'asse di un segmento, poi la discussione sui vari tipi di triangoli che si potevano ottenere con quella costruzione.
Tutti gli studenti che hanno risposto hanno "tracciato" e non "costruito" l'asse necessario per ottenere il triangolo richiesto nella prima parte.

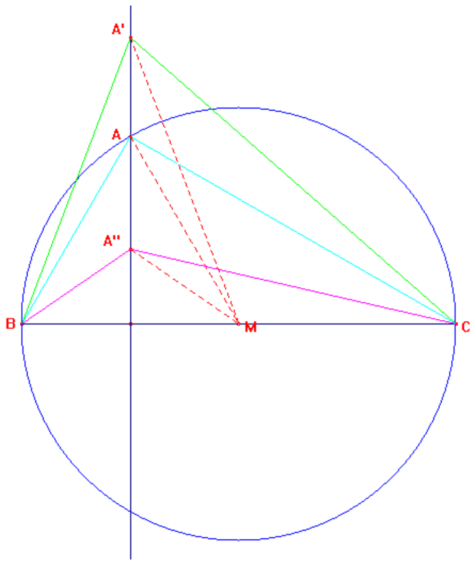
La seconda domanda era stata formulata (*Come scegliere il segmento AM …*) con l'intento di suggerire un confronto operativo (con compasso puntato in M) fra i segmenti AM e MB (o MC), come illustrato nelle figure allegate al testo del problema.
L'uso di software geometrici, che permettono di far scorrere un punto su una retta, ha portato la maggior parte degli studenti verso altre considerazioni, non più legate alla costruzione della figura.
Inoltre chi ha accolto la nostra indicazione non ha sempre costruito e giustificato il suo operato.
Riassumendo: nelle risposte ricevute non abbiamo riscontrato errori, ma carenze nelle costruzioni, come già detto, e/o nelle motivazioni, come succede spesso quando le proprietà osservate sono evidenti.

Abbiamo stabilito di presentare le risposte ritenute più complete nelle giustificazioni.
SM "C.A. Dalla Chiesa", risposta completa, esaurienti le giustificazioni in ogni parte.
ITI "G. Giorgi", risposta completa in cui si risolve in modo diverso dalla precedente la seconda parte.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Bonalda Francesco, Lenti Mattia, Pallestrini Gaia, Rivero Alfredo, Usai Michael e Veronesi Chiara, classe 3S
S.M. "C.A. Dalla Chiesa", S.Genesio ed Uniti (PV)



Per costruire un triangolo ABC avente la mediana AM e il lato AB congruenti bisogna costruire l'asse del segmento BM; […] l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento e quindi prendendo un qualsiasi punto A sull'asse di BM e unendo quest' ultimo (il punto A) con B, con M e con C si ottiene un triangolo ABC avente la mediana AM uguale al lato AB.

Il triangolo ABC sarà:

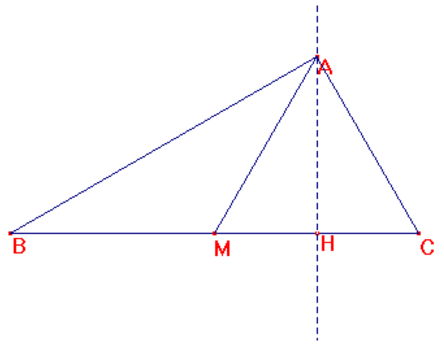
1) **Rettangolo** nel caso in cui il punto A sarà l'intersezione tra l'asse del segmento BM e la circonferenza di centro M e raggio BM, perché tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza sono sempre rettangoli. In questo caso i segmenti BM, AB, AM, MC sono congruenti e pertanto il triangolo ABM è equilatero.

2) **Acutangolo**: nel caso in cui sposto il vertice lungo l’asse di BM verso l’esterno della circonferenza utilizzata per costruire il triangolo rettangolo. In questo modo le ampiezze degli angoli ABC e ACB (complementari nel caso 1) aumentano entrambe e pertanto l’ampiezza dell’angolo BAM diminuirà se la somma [dei tre angoli] deve essere di 180°.

3) **Ottusangolo**: Viceversa se il vertice A si trova sull’asse del segmento BM, all’interno della circonferenza, l’ampiezza degli angoli ABC e ACB diminuirà e per il ragionamento fatto sopra aumenterà l’ampiezza dell’angolo BAC.

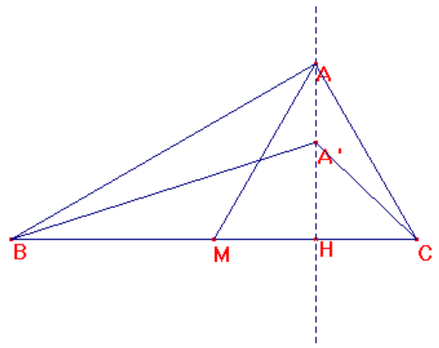
[[…]]

Laguercia Elisa, Classe 3A spec. Informatica
ITI “G. Giorgi”, Brindisi (BR)



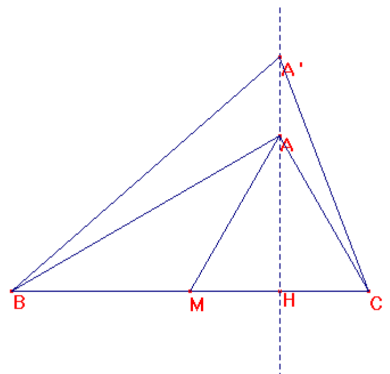
1) Il vertice A del triangolo si deve trovare sull’asse del segmento MC in modo che il triangolo ACM risulti un triangolo isoscele su base CM, così i lati AC ed AM sono congruenti come richiesto.
2) Affinché il triangolo ACB risulti rettangolo bisogna costruire la mediana AM ≅ MB. Infatti poiché MB ≅ MC per ipotesi (essendo M punto medio di BC), per la proprietà transitiva sarà AM ≅ MC, per cui il triangolo AMC risulterebbe equilatero e di conseguenza il suo angolo esterno $\widehat{BMA}$ risulterebbe di 120° ed i due angoli acuti del triangolo isoscele BMA, di 30° ciascuno.

Concludendo : $\widehat{CAB} = \widehat{CAM} + \widehat{MAB} = 60° + 30° = 90°$ e il triangolo CAB è rettangolo.



Se il vertice A’ si trova al di sotto di A l’angolo $\widehat{A'BC} < \widehat{ABC}$ essendo la semiretta A’B interna all’angolo $\widehat{ABC}$ e quindi la sua misura è minore di 30°. Di conseguenza l’angolo $\widehat{HA'B}$, complementare di $\widehat{A'BH}$, sarà sicuramente maggiore di 60°.

Allo stesso modo si dimostra che l’angolo $\widehat{CA'H}$ è maggiore di 30°.



Di conseguenza l’angolo $\widehat{BA'C}$ è maggiore di 90° in quanto è la somma di $\widehat{BA'H}$ > 60° e di $\widehat{CA'H}$ > 30°.

Analogamente si dimostra che se A’ si trova al di sopra di A l’angolo $\widehat{BA'C}$ è minore di 90°.

Novembre 2006

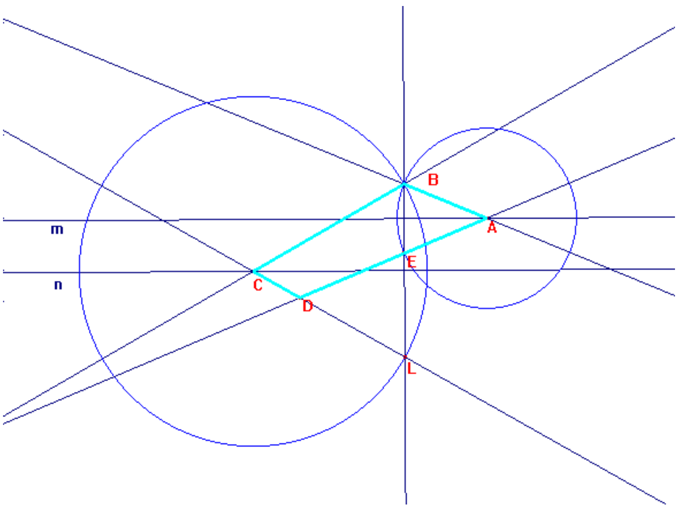
Costruire un quadrilatero in cui le bisettrici di due angoli opposti (di vertici A e C) siano parallele.

1) **Quali caratteristiche presenta il quadrilatero così ottenuto?**

2) **Potrebbe essere un trapezio o un parallelogrammo?**

Descrivere la costruzione e giustificare le risposte.

Costruzione eseguita da **Alfredo Rivero, Francesca Giacovelli, Gaia Pallestrini, Michel Usai, Classe 3S, SM di San Genesio ed Uniti (PV)**



- rette parallele "m" ed "n";
- A punto su "m", C su "n";
- retta per A, retta per C e punto di intersezione B;
- circonferenza con centro A e raggio AB;
- circonferenza con centro C e raggio CB;
- retta per B perpendicolare alle rette "m" ed "n";
- E e L intersezione con le due circonferenze;
- retta CL, retta AE, punto di intersezione D.

ABCD è un quadrilatero generico che ha le bisettrici di due angoli opposti parallele.

Commento

Abbiamo ricevuto sette risposte provenienti da cinque scuole, alcune nuove. Una delle risposte è stata inviata dagli studenti di una prima classe di scuola media inferiore, che invitiamo a seguirci ancora. Uno studente non ha dichiarato la scuola di appartenenza.

- *LS "G.B. Scorza", Brindisi (CS)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV) – tre risposte*
- *Nicola Eslava ????*
- *LS "T. Gullace", Roma (RM)*
- *SM "Giusti-Gramsci", Monsummano Terme (PT).*

Dopo aver costruito un quadrilatero con le bisettrici di due angoli opposti parallele, si doveva individuare una ulteriore caratteristica della figura ottenuta, ad esempio di avere gli altri due angoli fra loro congruenti.

Tale proprietà avrebbe consentito di rispondere in modo immediato alle successive domande, ma non è stata rilevata o evidenziata in modo esplicito nelle risposte pervenute ad eccezione di quella del LS "T. Gullace", in cui si imposta la costruzione proprio sulla congruenza dei due angoli.
È possibile infatti dimostrare anche il teorema inverso: *se un quadrilatero ha due angoli opposti congruenti, allora le bisettrici degli atri due sono fra loro parallele.*
Dalla SM "C.A. Dalla Chiesa" sono giunte due costruzioni simili fra loro, basate sulla proprietà del triangolo isoscele di avere l'altezza relativa alla base anche bisettrice dell'angolo al vertice. Una di queste verrà proposta per illustrare il testo del problema (una terza costruzione tratta solo un caso particolare).

Abbiamo convenuto di presentare tre risposte

SM "C:A: Dalla Chiesa"; in essa Chiara Veronesi giustifica in modo esauriente la sua costruzione, ma non tutti i casi particolari. Considera anche il caso in cui le bisettrici siano coincidenti.

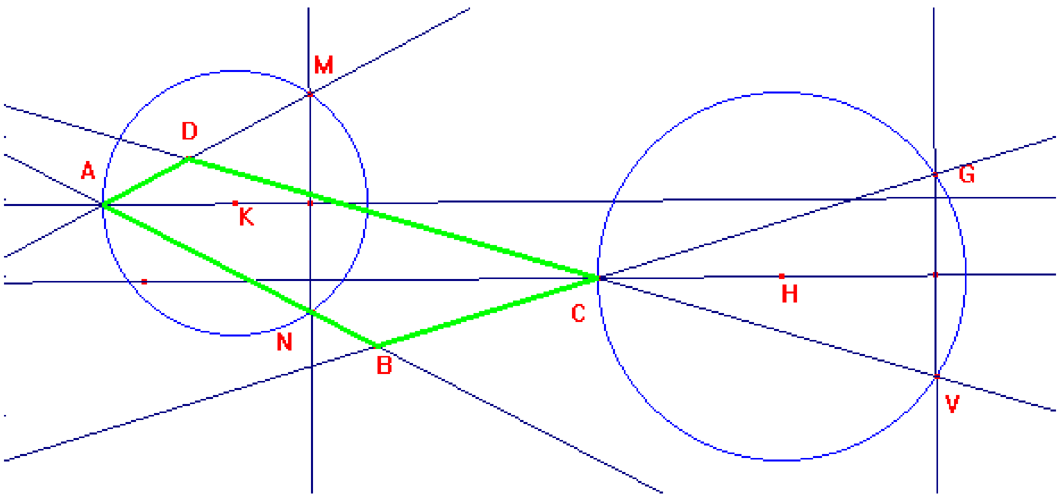
LS "G.B. Scorza"; Alfonso Scarpino propone una costruzione molto semplice ricorrendo alla simmetria rispetto a una retta. Non avendo constatato la congruenza degli angoli D e B, fornisce una giustificazione un po' complessa nella seconda parte.

LS "T. Gullace"; nella costruzione proposta dalla classe 2F, come già detto, si utilizza la congruenza degli angoli B e D facendo ricorso agli angoli alla circonferenza. Semplice e corretta la conclusione nella seconda parte.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Chiara Veronesi
Classe 3S Scuola Media di San Genesio ed Uniti (PV).



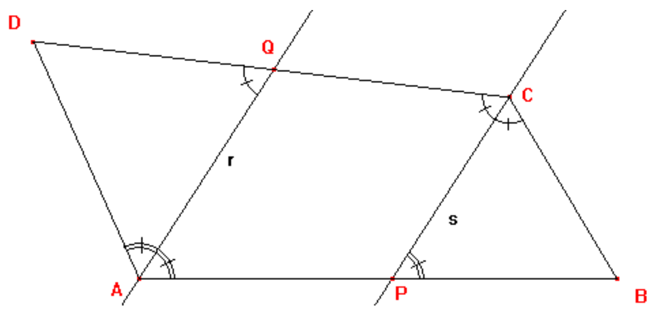
QUADRILATERO IRREGOLARE
Traccio due rette parallele e prendo su ciascuna retta un punto che chiamo A e C. Individuo su ciascuna di esse un altro punto che chiamo K e H.
Con apertura AK e CH puntando in K e in H traccio due circonferenze.

Traccio in ciascuna circonferenza una retta perpendicolare rispettivamente ad AK e CH ed individuo i punti di intersezione tra queste rette e le circonferenze che chiamo rispettivamente M ed N, G e V.
Trovo l'intersezione tra le rette AM e CV che chiamo D e l'intersezione tra le rette AN e CG che chiamo B.
Quindi traccio i segmenti AB, BC, CD, DA ed ottengo il quadrilatero ABCD.

1) Il quadrilatero ABCD è un quadrilatero irregolare che ha le bisettrici AK e CH di due angoli opposti parallele per costruzione; AK e CH sono bisettrici perché AK e CH sono perpendicolari alle corde MN e GV, passano per il punto medio delle corde e quindi sono bisettrici, nei triangoli isosceli AMN e CGV, degli angoli MAN e GCV = DCB.
2) Il quadrilatero è un parallelogramma quando i triangoli AMN e CGV inscritti nelle circonferenze sono simili, non si potrà trovare un trapezio, otterrò invece un rombo quando le bisettrici dell'angolo MAN e DCB saranno sovrapposte **[ciascuna di queste risposte poteva essere motivata con brevi riflessioni]**.

Alfonso Scarpino, Classe 2G,
Liceo Scientifico "G.B. Scorza" Cosenza (CS)

1.

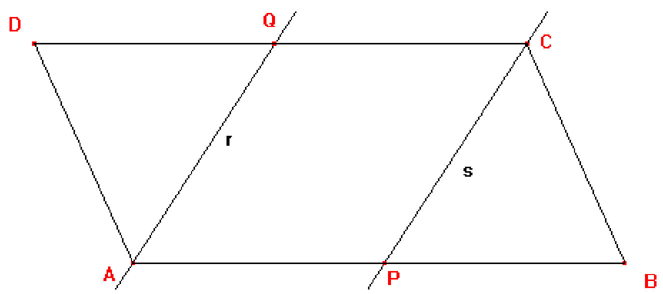


Partendo dal segmento AD si traccia una retta r passante per A e rispetto a questa si costruisce la semiretta simmetrica ad AD.

Successivamente si costruisce la retta s, parallela ad r,che passi per un punto C a piacere. Da C tracciamo una semiretta che passa per D e la sua simmetrica rispetto alla retta s. Chiamiamo B il punto di intersezione tra quest'ultima semiretta e quella simmetrica al segmento AD.

Nel quadrilatero così ottenuto i triangoli ADQ (dove Q è il punto di intersezione tra la retta r e CD) e BCP (dove P è il punto di intersezione tra la retta s e AB) sono simili per avere due angoli rispettivamente congruenti. Infatti DAQ e PAQ sono congruenti per costruzione, PAQ e BPC sono congruenti perché corrispondenti rispetto alle parallele r ed s e alla trasversale per AB, quindi, per la proprietà transitiva, DAQ e BPC sono congruenti. Similmente AQD è congruente a BCP.

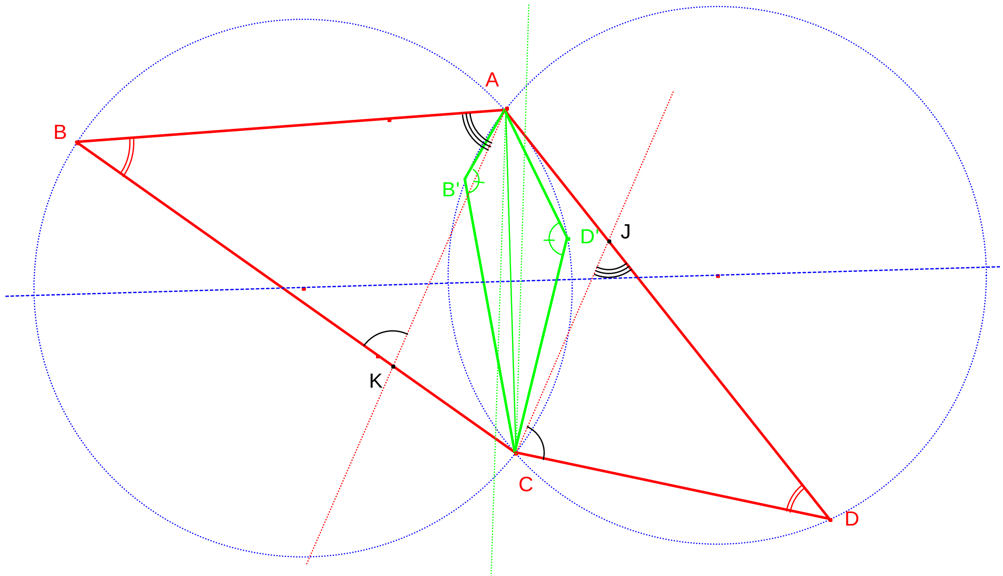
2.



Il quadrilatero non può essere un trapezio. Infatti, ipotizzando che AD e BC siano paralleli, gli angoli BAD e ABC, che sono coniugati interni, sarebbero supplementari; per lo stesso motivo PAQ e APC sono supplementari. Da ciò segue che l'angolo APC dovrebbe essere congruente alla somma di DAQ e PBC. Ma APC è anche l'angolo esterno di BPC nel triangolo BCP, quindi è uguale alla somma di CBP e BCP. Ne segue perciò che DAQ dovrebbe essere congruente a BCP e quindi BAD congruente a DCB. Si avrebbe perciò che, essendo DCB supplementare di ABC, i lati DC e AB sarebbero paralleli e quindi il quadrilatero ABCD un parallelogrammo e non semplicemente un trapezio.

Dalla dimostrazione precedente possiamo dire che il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo a patto che DAB sia congruente a DCB oppure abbia due lati opposti paralleli.

Classe 2F,
Liceo Scientifico "T. Gullace", Roma (RM)



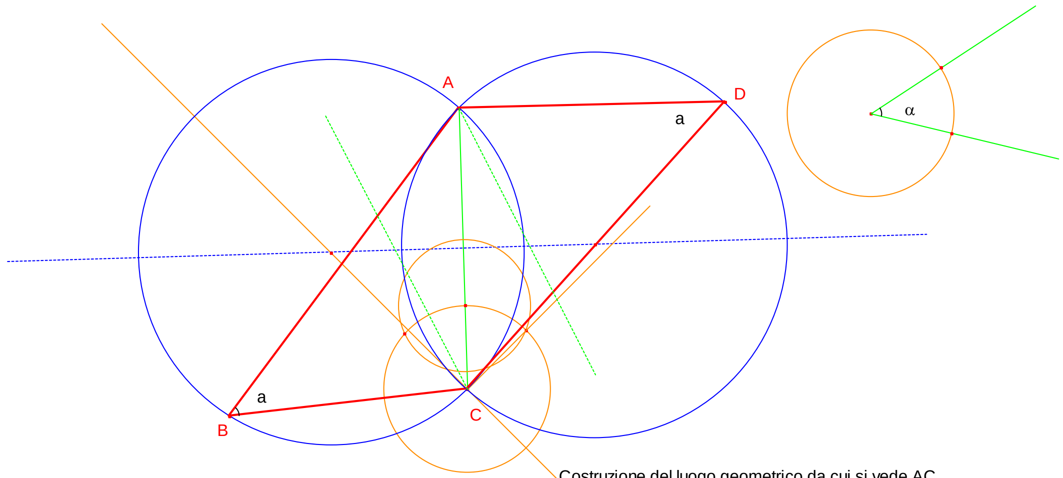
È possibile costruire un quadrilatero del tipo descritto nel testo del problema nel modo seguente. Per costruire un quadrilatero che abbia due bisettrici parallele basta disegnare due circonferenze secanti si e aventi lo stesso raggio. I punti di intersezione delle circonferenze (chiamati A e C) saranno i due vertici del quadrilatero da cui partono le bisettrici parallele. La corda AC comune alle due circonferenze è una diagonale del quadrilatero ABCD. I vertici B e D, invece, possono essere due punti qualsiasi rispettivamente dei due archi di circonferenza che vedono la corda AC sotto lo stesso angolo: quindi esistono infinite coppie di punti B e D ed infiniti quadrilateri che avendo la stessa diagonale AC hanno le bisettrici parallele.

In figura è possibile osservare che i punti possono essere presi sugli archi maggiori (ABC e ADC) o sugli archi minori (AB'C e AD'C) e quindi si originano due famiglie di quadrilateri segnate in rosso o verde in figura.

La costruzione è giustificata dal fatto che gli altri due angoli del quadrilatero (B e D) sono congruenti. Infatti, considerando K e J i punti di intersezione delle bisettrici con i lati opposti all'angolo relativo (K appartiene a BC , J appartiene ad AD), si osserva che l'angolo BKA è congruente all'angolo JCD perché JCD=JCB per ipotesi (CJ bisettrice) e BKA=JCB perché angoli corrispondenti in un fascio di rette parallele tagliate da una trasversale. Stesso ragionamento per gli angoli BAK e CJD.
I triangoli ABK e JCD hanno due coppie di angoli corrispondenti congruenti e quindi per il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo (la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180°) hanno gli angoli ABC e ADC congruenti **[data la costruzione eseguita era più oppotuno giustificarla ricorrendo al teorema inverso: assumere come ipotesi la congruenza degli angoli B e D e dimostrare che le bisettrici degli altri due angoli sono parallele].**

Per costruire quindi il quadrilatero ABCD che ha una coppia di angoli opposti congruenti si può sfruttare il luogo geometrico dei punti del piano dai quali è possibile vedere la diagonale AC del quadrilatero sotto lo stesso angolo: tale luogo geometrico è un arco di circonferenza, per il teorema che dice che gli angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco sono tutti uguali tra loro.

[[…]]



Costruzione del luogo geometrico da cui si vede AC sotto lo stesso angolo

Per quanto riguarda il secondo quesito si può affermare con certezza che il quadrilatero in questione può essere un trapezio solo nel caso in cui sia anche un parallelogramma perché solo i parallelogrammi hanno gli angoli opposti congruenti.

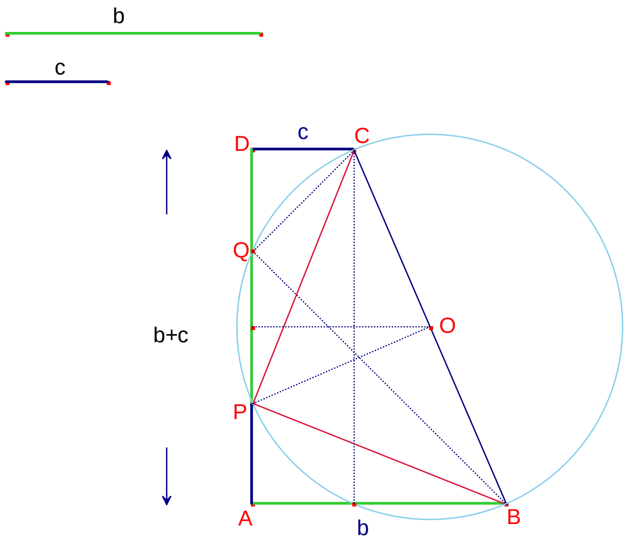
Quindi i parallelogrammi, avendo gli angoli opposti congruenti, hanno le bisettrici a due a due parallele. Se soltanto una coppia di bisettrici è parallela allora i quadrilateri del tipo ABCD non sono parallelogrammi.

Dicembre 2006

Sono dati due segmenti *b* e *c* (*b*>*c*).
Disegnare con essi un trapezio rettangolo ABCD di basi AB=b, DC=*c* e di altezza AD=*b*+*c*.

1) Verificare, e poi dimostrare, che la circonferenza di diametro CB incontra il lato AD in due punti che chiameremo P e Q (AP<AQ).

2) Determinare in funzione di *b* e *c* la lunghezza della corda PQ, le distanze di P e Q dai vertici A e D del trapezio e l'area del triangolo BPC.



Commento

Abbiamo ricevuto tre risposte dalle seguenti scuole:

- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)*
- *LS "A. Righi", Bologna (BO)*
- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*

Diamo il benvenuto agli studenti del LS "Righi", contiamo di vederli ancora impegnati nei quesiti che proporremo.
Nel problema dato si dovevano determinare le intersezioni fra un un lato di un particolare trapezio rettangolo, costruito mediante due segmenti assegnati, e la circonferenza avente come diametro il lato obliquo. Per non appesantire il problema, abbiamo chiesto di dimostrare l'esistenza di tali punti dopo aver verificato dalla figura che sono interni al lato AD (altezza del trapezio).
Si chiedeva inoltre la misura di alcuni elementi della figura in funzione di quella dei segmenti dati.
Il trapezio assegnato presentava alcune caratteristiche che potevano essere giustificate sia con considerazioni di geometria sintetica, sia ricorrendo al calcolo algebrico.
Questo aspetto risulta anche nelle risposte ricevute; in esse i quesiti vengono risolti con approcci diversi che commenteremo brevemente:

SM "C.A. Dalla Chiesa": alcuni studenti della classe 3S hanno costruito sul lato AD i due punti per i quali dovrà necessariamente passare la circonferenza data, utilizzando opportuni triangoli rettangoli. Questo ha permesso poi di rispondere in modo immediato alle successive domande.

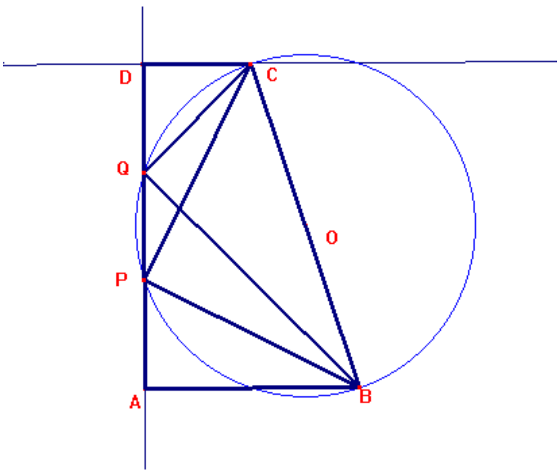
LS "Aristosseno": gli studenti della classe 3D hanno dimostrato l'esistenza di tre intersezioni fra il trapezio e la circonferenza (oltre gli estremi C e B), confrontando con il raggio la distanza fra il centro e i lati AD e AB.
Da questa distanza deducono rapidamente le misure richieste.
Propongono anche una risoluzione per via analitica.

LS "A. Righi": gli studenti della classe 2B dimostrano l'esistenza delle due intersezioni con il lato AD, valutando la sua distanza dal centro della circonferenza. Non indagano ulteriormente sulle caratteristiche geometriche della figura, rispondono alle successive domande ricorrendo esclusivamente al calcolo algebrico.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Chiara Veronesi, Francesco Bonalda, Francesca Giacovelli, Gaia Pallestrini, Alfredo Rivero
Classe 3S Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)



1. Tracciamo un segmento AB = b e una retta "r" perpendicolare al segmento passante per A, con il compasso puntiamo in A con apertura AB e troviamo il punto Q **[era più corretto assegnargli temporaneamente un altro nome]**, tale che AQ = AB = b. Prendiamo poi un punto D sulla retta "r" in modo che DQ = c sia minore di QA. Ora tracciamo una retta "s" perpendicolare ad AD e passante per D. Con il compasso con apertura DQ puntando in D troviamo l'intersezione con la retta "s" che chiamiamo C. Unendo i punti C e B troviamo il trapezio ABCD.
I triangoli DCQ e QAB sono triangoli rettangoli isosceli per costruzione, quindi gli angoli acuti misurano 45°. Allora L'angolo CQB = 90° e quindi il triangolo CQB è un triangolo rettangolo di ipotenusa CB.

Prendiamo su AD un punto P **[vedi punto Q]** tale che AP=c. Consideriamo i triangoli PDC e PAB. Sono due triangoli rettangoli uguali perché AB = PD = b e AP = DC = c. Pertanto gli angoli ABP = DPC e APB = DCP ed essendo gli angoli DPC e APB complementari risulta che CPB è un angolo retto.

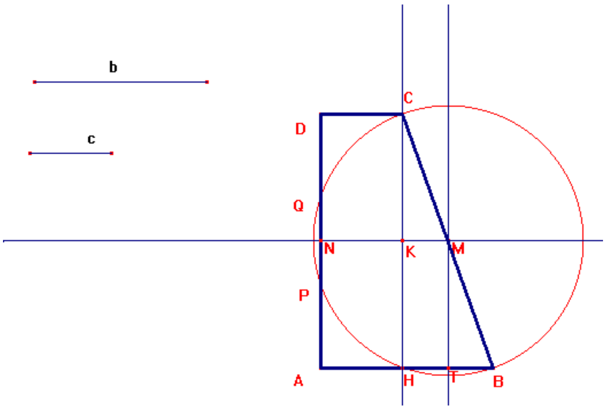
Il triangolo CPB è quindi un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa CB.

I triangoli CQB e CPB sono triangoli rettangoli ed hanno come ipotenusa lo stesso segmento CB, quindi la circonferenza ad essi circoscritta avrà come diametro il segmento CB. Quindi i punti Q e P appartengono sia al segmento AD che alla circonferenza di diametro CB e pertanto la circonferenza sarà secante al segmento in questi due punti.

2. Poiché:
DQ = PA = c
QA = DP = b
La lunghezza della corda sarà :QP = b-c.

Considero il triangolo rettangolo ABP: $PB^2 = b^2 + c^2$; essendo il triangolo CPB un triangolo rettangolo isoscele PB = PC, la sua area sarà:
Area = $PB^2/2 = (b^2 + c^2)/2$

Classe 3 D, Liceo Scientifico "Aristosseno"
Taranto (TA)



1) Dopo aver costruito la figura è immediato constatare che la circonferenza incontra AD in due punti. Per la dimostrazione, tracciate da M la parallela e la perpendicolare e da C la perpendicolare alla base AB del trapezio, si ha che da CM = MB, per il teorema di Talete, segue che AN = ND e CK = KH =MT

Essendo AD = $b + c$, AN = ND = $\dfrac{b+c}{2}$ e
MN = AB – TB = AB – TH = AB – (MN – CD) da cui MN = (AB + CD)/2 = $\dfrac{b+c}{2}$
(ovvero: il segmento che unisce i punti medi dei lati di un trapezio è parallelo alle basi e congruente alla loro semisomma)

Da MN = MT < MB (nel triangolo rettangolo MTB il cateto è sempre minore dell'ipotenusa) deriva che la circonferenza di centro M e raggio MB è secante sia AB che AD , essendo la distanza del suo centro da questi due segmenti minore del suo raggio.

2) Le corde intercettate dalla circonferenza sui due lati AB e AD sono HB (perché l'angolo CHB è retto) e PQ; esse sono congruenti perché equidistanti dal centro della circonferenza (MN = MT). Essendo HB = $b-c$, anche PQ = $b-c$.

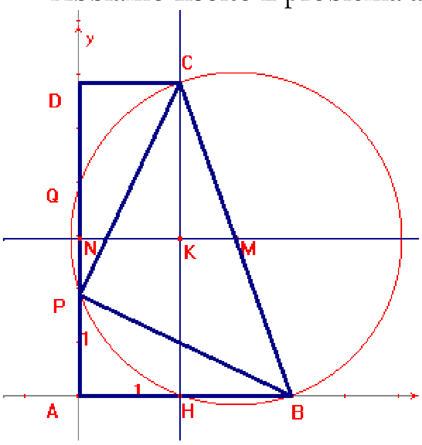
Il segmento MN è asse della corda PQ ;sarà quindi AP = QD = $\dfrac{b+c}{2}-\dfrac{b-c}{2}=c$

mentre AQ = PD = $\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{b-c}{2}=b$

L'area del triangolo BPC , infine , si può calcolare in due modi:

a) essendo PB = PC = $\sqrt{b^2+c^2}$ (ipotenuse dei triangoli rettangoli congruenti BAP e PDC), il triangolo BPC è la metà del quadrato inscritto nella circonferenza per cui
S(BPC) = ½ (b^2+c^2)
b) sottraendo dall'area del trapezio il doppio dell'area di ciascuno dei due triangoli congruenti BAP e PDC : S (PBC) = $\dfrac{(b+c)^2}{2}-2\dfrac{bc}{2}=\dfrac{b^2+c^2}{2}$.

Abbiamo risolto il problema anche per via analitica, avendo trattato in classe la circonferenza.



Fissato quindi un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui A ≡O (0,0), B(b,0), C(c,b+c) e D(0,b+ c), il punto medio M di BC ha coordinate ($\dfrac{b+c}{2},\dfrac{b+c}{2}$) e il raggio della circonferenza è la metà di BC: MB = ½$\sqrt{(b-c)^2+(b+c)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{b^2+c^2}$

L'equazione della circonferenza di centro M e raggio MB è allora:

$$\left(x-\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{b^2+c^2}{2}$$

Risolvendo il sistema formato dall'equazione della circonferenza e da quella dell'asse y , otteniamo le ordinate dei due punti di intersezione della circonferenza con tale asse, ovvero le ordinate dei punti P e Q.

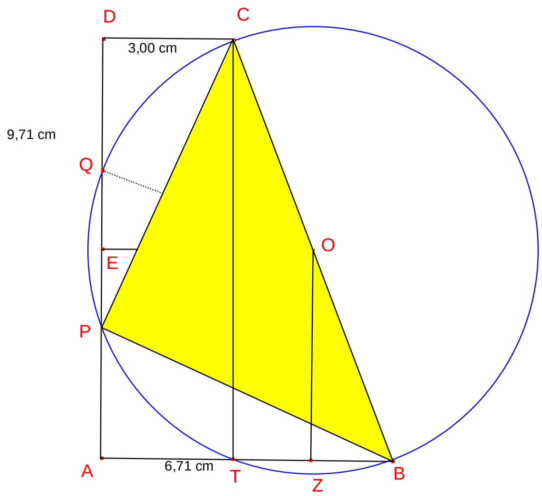
$$\begin{cases} x^2+y^2-(b+c)x-(b+c)y+bc=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-(b+c)y+bc=0 \\ x=0 \end{cases}$$ P(0,c) e Q (0,b)

La lunghezza della corda PQ = b-c è la distanza tra i due punti trovati; AP = QD = c e AQ = PD = b.
L'area del triangolo PBC la calcoliamo utilizzando il **[valore assoluto del]** determinante:

$$S(PBC) = \tfrac{1}{2} \left\| \begin{matrix} b & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 \\ c & b+c & 1 \end{matrix} \right\| = \tfrac{1}{2}(b^2+c^2).$$

[Come simbolo di determinante non si usa di solito la doppia linea]

Classe 2B PNI, Liceo Scientifico "A. Righi"
Bologna (BO)



Ipotesi
AB = *b*
DC = *c*
DA = *b*+*c*
b > *c*
2*r* = CB
ABCD trapezio rettangolo
Tesi
1) DA è secante a cfr. M
2) QP = ?
PA = ?
$A_{(BPC)}$=?

1) Dimostrazione
[Sia OE la distanza da O del lato AD. OE è parallela alle basi]
Considero DA: è composto da DE + EA, congruenti tra loro per il teorema del fascio di rette parallel: DE = **E**A = (*c*+*b*)/2
Considero EO: per teorema noto è congruente alla metà della somma delle due basi,
EO = (*c*+*b*)/2
Perciò DE = EO
Nel triangolo rettangolo **[CHO, H intersezione di EO con l'altezza CT]**, il cateto CH = DE < CO (ipotenusa), ma EO = DE perciò EO < CO.
È così dimostrata la prima tesi

2) Dimostrazione
Applicando il teorema di Pitagora al trg. CTB si ottiene che CB = $\sqrt{2(b^2+c^2)}$ da cui essendo CO=CB/2 abbiamo

$$CO = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)}}{2}$$

Applicando il teorema di Pitagora al trg. EPO si ottiene

$$EP=\sqrt{QO^2-EO^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)}}{2})^2-(\frac{b+c}{2})^2}=\sqrt{\frac{b^2-2bc+c^2}{4}}=\frac{b-c}{2}$$

QP è doppio di EP perché la perpendicolare condotta dal centro ad una corda la dimezza
QP = 2EP = b-c
AP = EA – EP = (b+c-b+c)/2 = c
PBC è un trg. rettangolo poiché inscritto in una semicirconferenza.

Notiamo che i triangoli **[rettangoli]** DPC e PAB sono congruenti essendo DC=PA=c, DP=AB=b **[quindi PB = PC]**

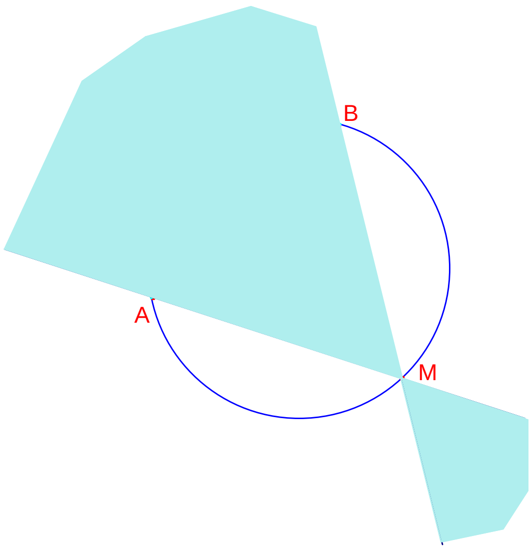
$$PB=\sqrt{b^2+c^2}$$

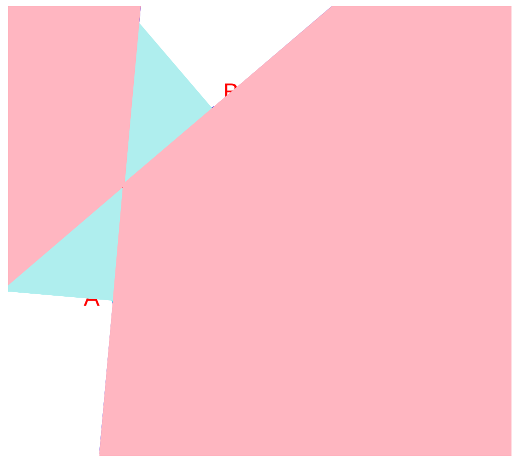
L'area del trg. PBC=(PB*PC)/2=$\frac{\sqrt{(b^2+c^2)^2}}{2}=\frac{b^2+c^2}{2}$

Gennaio 2007

1) Sono dati un arco AB di circonferenza e un punto P non appartenente ad essa. Individuare sull'arco AB un punto C tale che la bisettrice dell'angolo ACB passi per P.
La costruzione precedente è possibile per ogni scelta del punto P?

2) E'facoltativo risolvere ora il seguente quesito: costruire un quadrato essendo dati un vertice e due punti appartenenti ai due lati (o ai loro prolungamenti) che non concorrono in quel vertice.





[Attenzione: nella stampa il colore copre la figura sottostante]

Commento

Sono giunte cinque risposte dalle scuole:

- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)*
- *LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)*
- *LST,ITI "Berenini", Fidenza (PR)*
- *LS "Teresa Gullace", Roma (RM)*

Nel problema proposto si richiedevano due costruzioni, la prima delle quali forniva un metodo per risolvere la seconda.

Primo quesito.
Si trattava di costruire, scelto un arco di circonferenza, l'angolo in esso inscritto la cui bisettrice passasse per un punto P prefissato, non appartenente alla circonferenza. Si chiedeva inoltre di indagare sulla possibilità di ottenere il risultato richiesto.
Nelle risposte ricevute è stata individuata solo parzialmente la regione di piano in cui considerare i punti P che consentono di eseguire la costruzione.
Gli studenti del LS "Aristosseno" non hanno fissato un solo arco, ma considerato la possibilità di utilizzare l'uno o l'altro dei due archi che vengono a formarsi, giungendo poi alla errata conclusione che il problema abbia una soluzione dovunque si prenda il punto P. Si veda in proposito la seconda figura che illustra il problema.

Secondo quesito.
Si chiedeva di costruire un quadrato dati un vertice e due punti appartenenti ai due lati (o ai loro prolungamenti) che non concorro in quel vertice. In tal modo diventa possibile ottenere la soluzione utilizzando la costruzione precedente, nel caso particolare che l'arco sia una semicirconferenza, qualunque sia la posizione dei tre punti.
Gli studenti della SM "C.A. Dalla Chiesa" non hanno raccolto tale suggerimento, ma hanno fornito una costruzione basata sulle proprietà della rotazione attorno a un punto, dedotta da osservazioni sulla figura risultante.

Abbiamo stabilito di presentare le seguenti risposte, corredate da ulteriori nostre osservazioni contenute in parentesi quadra:

LS "Teresa Gullace": alcuni studenti della classe 2F hanno risolto entrambi i quesiti e motivato le costruzioni. Sono stati un po' imprecisi nelle conclusioni.

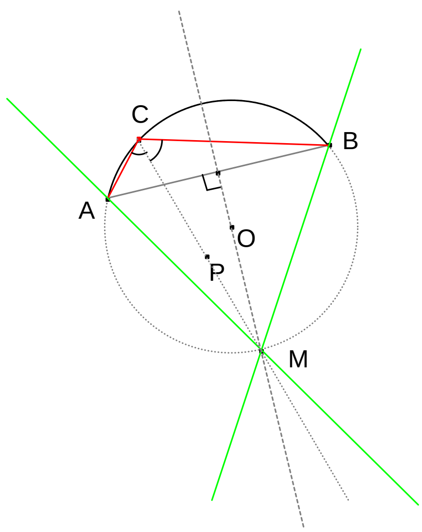
SM "C.A. Dalla Chiesa": la risposta del gruppo di studenti della classe 3S presenta qualche carenza nelle motivazioni, giustificabile, come più volte detto, per una scuola media inferiore.

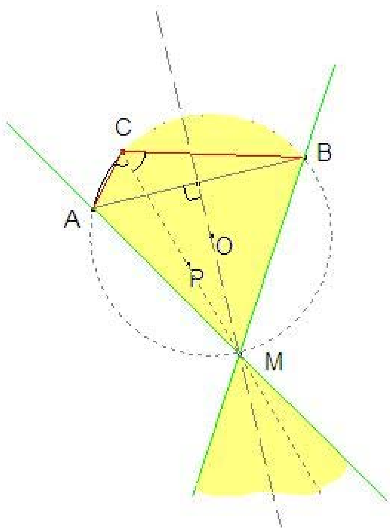
NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

G. Gennari, D. Incletoli, F. Di Paolo, M. Fantauzzi, Classe 2F,
Liceo Scientifico "Teresa Gullace", Roma

Osservando la figura costituita da un arco AB della circonferenza e un punto P esterno ad esso, si può notare che tutte le bisettrici degli angoli ACB, i cui vertici C sono punti appartenenti all'arco AB, passano per uno stesso punto M. Il punto M indicato è il punto medio dell'altro arco AB individuato sulla stessa circonferenza . Questa proprietà è una conseguenza del teorema sugli angoli al centro e alla circonferenza: angoli alla circonferenza congruenti sottendono archi congruenti.
Per costruire quindi la bisettrice che passi per il punto P è sufficiente tracciare la corda AB e il suo asse in modo da incontrare in M l'arco AB opposto a quello su cui deve trovarsi il punto C.
La retta PM intersecherà l'arco AB nel punto C e sarà la bisettrice dell'angolo ACB.





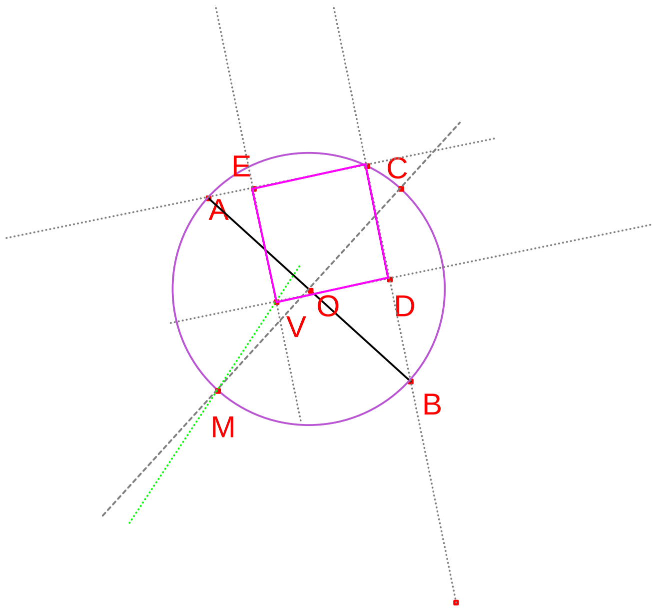
Non sempre tale costruzione è possibile.

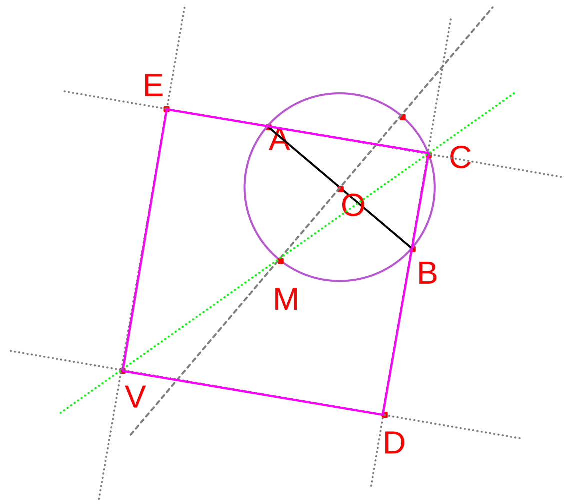
Soltanto quando il punto P si trova nella regione di piano colorata in figura costituita dalla regione delimitata dalle rette AM e BM **[**[e dall'arco AB di circonferenza]**]** **[si devono considerare tutto l'angolo AMB e il suo opposto al vertice]** è possibile far passare la bisettrice di un qualsiasi angolo alla circonferenza che ha vertice su AB per P.

Risposta al quesito n. 2

Utilizzando la costruzione descritta al punto 1 possiamo costruire il quadrato avente vertice in V e due lati (o i loro prolungamenti) a cui appartengono i punti A e B.
I punti A e B devono giacere su due rette perpendicolari tra loro, quindi detto C il loro punto d'intersezione il triangolo ABC è un triangolo rettangolo. E' per tale motivo inscrivibile nella semicirconferenza di diametro AB.
Inoltre il segmento VC, diagonale del quadrato, è anche la bisettrice dell'angolo ACB.
La costruzione del quadrato si basa quindi sui seguenti passaggi:

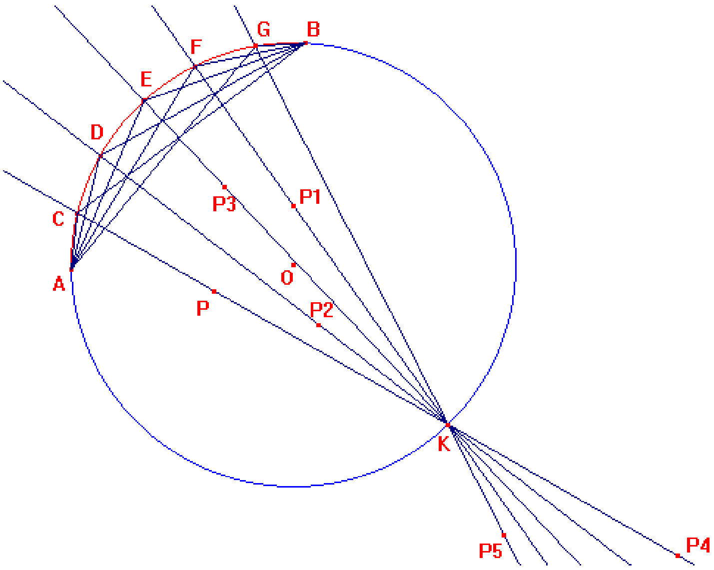
1. disegno della circonferenza di diametro AB
2. disegno dell'asse del diametro AB che incontra in M la semicirconferenza che si trova dalla stessa parte di V
3. disegno della retta VM che incontra in C l'altra semicirconferenza
4. disegno delle rette AC e BC, perpendicolari tra loro.
5. disegno di due rette per V parallele rispettivamente ad AC e BC che le intersecano in D e E
6. disegno del quadrato DVEC richiesto dal testo del problema





Nelle due figure sono riportate le figure ottenute utilizzando la costruzione descritta: si può osservare che se il punto V è interno alla circonferenza di diametro AB allora i punti A **[e]** B apparterranno ai prolungamenti del quadrato, mentre se V è esterno i punti A e B apparterranno ai lati del quadrato **[non è sempre così, dipende dalla scelta della semicirconferenza in cui inscrivere l'angolo ACB]**.
La costruzione è possibile qualsiasi sia la posizione del punto V rispetto ad A e B **[vero, perché?].**

Alfredo Rivero, Chiara Veronesi, Giorgia Tavella, Edoardo Pasquini, Classe 3S, Scuola Media "C.A.Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)



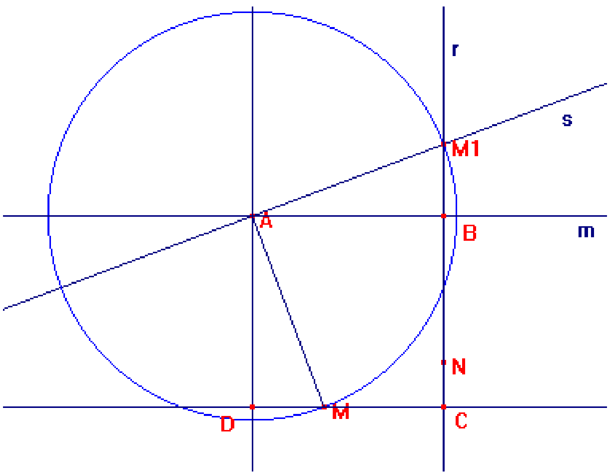
1. Per trovare le possibili posizioni del punto P sul piano, abbiamo preso alcuni punti appartenenti all'arco AB, costruito gli angoli aventi i vertici in questi punti e i lati passanti per A e B e poi abbiamo costruito le loro bisettrici ; abbiamo notato che tutte le bisettrici si incontravano in uno stesso punto, che abbiamo chiamato K e che questo punto apparteneva alla circonferenza di cui AB è un arco **[è anche punto medio dell'altro arco di estremi A e B]**.

Quindi il punto P, per poter fare la costruzione richiesta, deve appartenere alla parte di cerchio delimitata dalle corde AK e BK e dall'arco AB **[si deve considerare tutto l'angolo limitato dalle semirette KA e KB contenente l'arco AB]** oppure deve appartenere all'angolo di vertice K esterno alla circonferenza e delimitato dai prolungamenti delle corde AK e BK.

Dato un arco AB e un punto P possiamo individuare sull'arco un punto C tale che la bisettrice dell'angolo ACB passi per P, prendendo un punto D sull'arco AB, costruendo l' angolo ADB e la sua bisettrice, trovando l'intersezione tra questa bisettrice e la circonferenza che chiameremo K. Tracciando una retta KP, questa intersecherà l'arco AB nel punto C richiesto.

2. Per costruire un quadrato partendo da un vertice e da due punti appartenenti ai suoi lati o ai loro prolungamenti abbiamo analizzato la figura partendo dal quadrato stesso. Così facendo abbiamo notato che, costruito un quadrato ABCD, presi sui lati DC e CB i punti M ed N, unendo il vertice A con M si ottiene un triangolo rettangolo ADM che si può far ruotare di 90° attorno al punto A in modo da far coincidere il lato AD con il lato AB. Chiamiamo M1 il corrispondente di M nella rotazione. Di conseguenza essendo l'angolo DAB retto (perché angolo del quadrato) anche l'angolo MAM1 sarà retto.

Concluse queste osservazioni siamo riusciti ad ottenere un quadrato dato un vertice A e due punti (M ed N) appartenenti ai suoi lati o ai loro prolungamenti in questo modo:



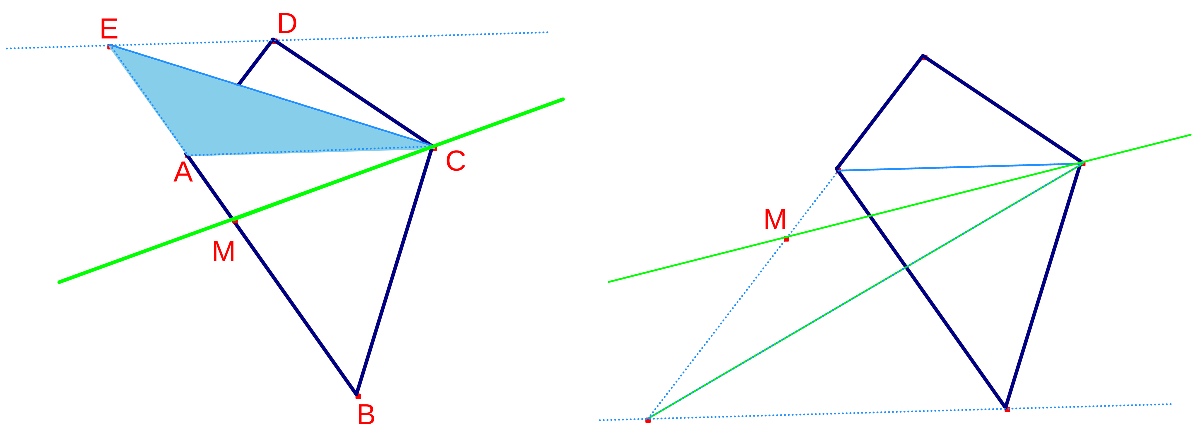
Prendiamo nel piano tre punti A, M ed N. Uniamo A con M e tracciamo una retta "s" perpendicolare in A al segmento AM.
Successivamente con la funzione compasso puntando in A con apertura AM riportiamo la misura del segmento AM su "s".
Troviamo il punto di intersezione tra la circonferenza e la retta "s" e lo chiamiamo M1.
Tracciamo poi la retta "r" passante per M1 ed N e poi la retta "m " passante per A e perpendicolare alla retta "r". Chiamiamo B l'intersezione tra le rette "r" ed "m". Tracciamo poi una retta passante per A e parallela alla retta "r" e una retta passante per M e parallela alla retta "m". L'intersezione tra queste ultime rette sono i punti D e C, vertici del quadrato ABCD **[non si può ancora affermare che ABCD è un quadrato, occorre dimostrare che ha due lati consecutivi congruenti, in questo caso AD e AB, perché …]**.

Febbraio 2007

Per dividere in due parti equivalenti la superficie di un triangolo mediante una retta passante per un vertice è sufficiente congiungere quel vertice con un opportuno punto del lato opposto. Quale?

E' possibile dividere un quadrilatero in due parti equivalenti con una retta passante per un vertice? Come?

Motivare le risposte.



S(MCE) = S(MCDA) = S(MBC)

Se il punto M non è su un lato del quadrilatero, la costruzione non riesce.

Commento

Abbiamo ricevuto cinque risposte, una da una scuola che finora non aveva partecipato, alla quale diamo il benvenuto, e una priva dei dati richiesti per essere inserita nell'elenco.

- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*
- *LST,ITI "Berenini", Fidenza (PR)*
- *LS "G.C. Vanini", Casarano (LE)*
- *SM "G.B.Tiepolo", Milano (MI)*

Nel problema di questo mese si chiedeva di dividere un quadrilatero in due parti equivalenti mediante una retta passante per un suo vertice, dopo aver ricordato come si riesce ad ottenere lo stesso risulato in un triangolo.

Si precisa che per quadrilatero, senza altri attributi, si deve intendere un generico quadrilatero convesso.

Si ribadisce inoltre che le costruzioni geometriche debbono essere eseguibili con riga e compasso anche quando si fa ricorso allo strumento informatico, quindi non ammettono il trasporto di misure derivate da calcoli aritmetici.

Le risposte ai problemi di FLATlandia riservano spesso delle sorprese: avevamo pensato che il primo quesito avrebbe indirizzato gli studenti a trasformare il generico quadrilatero in un triangolo, come mostra la nostra costruzione allegata al testo, per cercare poi la risposta al problema individuando

il vertice più opportuno per il quale far passare la retta richiesta. Non sempre è andata così nelle risoluzioni ricevute.
Esaminiamo brevemente quelle che presenteremo:

LS "G.C. Vanini", Parrotta Lorenzo, dopo aver risolto con prontezza il primo quesito, non ha utilizzato subito la trasformazione suddetta nel quadrilatero, ha seguito un percorso meno immediato che ha portato alla risoluzione senza incontrare la difficoltà della scelta del vertice più idoneo.

LST "Berenini", Nicola Eslava e Gabriele Artusi hanno risolto la prima parte ricorrendo a un ragionamento laborioso e non completamente giustificato. Nella seconda, hanno trasformato subito il quadrilatero in un triangolo individuando la retta cercata, senza chiedersi se la soluzione sia possibile per ogni scelta del vertice. Presenteremo la seconda parte.

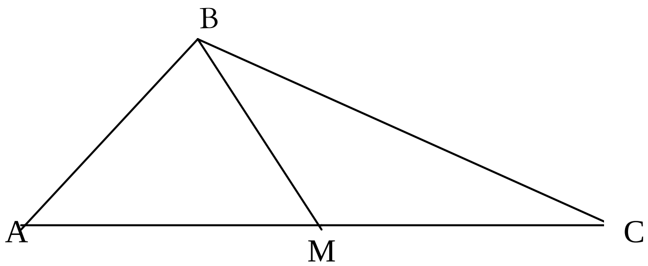
LS "Aristosseno", gli studenti della classe 2M hanno considerato, nella seconda parte, solo quadrilateri particolari, trovando per i trapezi una interessante costruzione. Proporremo questa parte della loro risposta.

Ci dispiace di non poter presentare alcuna risposta delle scuole medie inferiori, in quanto abbiamo riscontrato in esse varie imprecisioni di procedimento.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

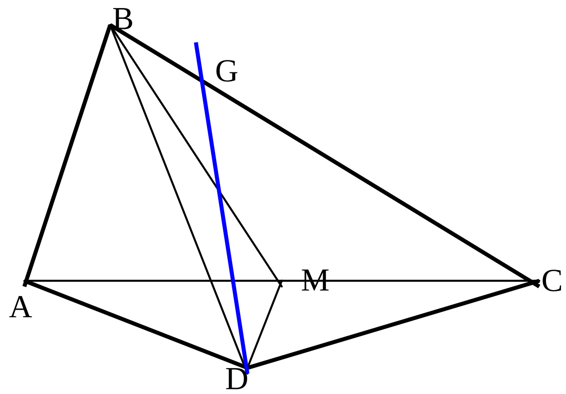
Soluzioni

Parrotta Lorenzo, Classe 2A Sperimentale
Liceo scientifico "G.C. Vanini", Casarano (LE)



- Per dividere in due parti equivalenti un triangolo è sufficiente tracciare un segmento che va da un vertice qualsiasi al punto medio del lato opposto (la mediana). In tal modo i due triangoli che si formano hanno base ed altezza congruenti, quindi sono equivalenti.

- Per dividere la superficie di un quadrilatero in due parti equivalenti, si estende il ragionamento.



Consideriamo ad esempio un quadrilatero qualunque ABCD, tracciamo la diagonale AC e di quest'ultima il suo punto medio M. Si ha che il triangolo AMD è equivalente al triangolo DMC e il triangolo ABM è equivalente al triangolo MBC per i motivi precedentemente esposti, quindi il quadrilatero ABMD è equivalente al quadrilatero BMDC perché equicomposti.
Tracciamo ora la parallela *r*, passante per M, alla diagonale DB, che incontra CB in G. Il triangolo DMB è equivalente al triangolo DGB: il quadrilatero ABGD è equivalente al quadrilatero ABMD, perché rispettivamente somme tra il triangolo ABD e il triangolo DBG, tra il triangolo ABD e il triangolo DMB. Allo stesso modo il quadrilatero DMBC è equivalente al triangolo DGC perché

rispettivamente differenze tra il triangolo DBC e il triangolo DMB, tra il triangolo DBC e il triangolo DBG.

Per transitività il triangolo DGC è equivalente al quadrilatero ABGD.

Il quadrilatero ABCD è stato così diviso in due parti equivalenti, ABGD e DGC mediante la retta cercata DG. Q.E.D.

Gabriele Artusi, Nicola Eslava, Classe 2B,
Liceo scientifico tecnologico, ITI "Berenini, Fidenza (PR)

1. [[…]]

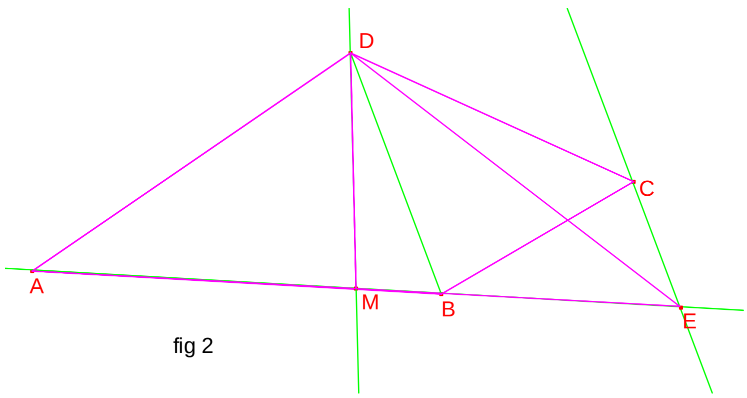


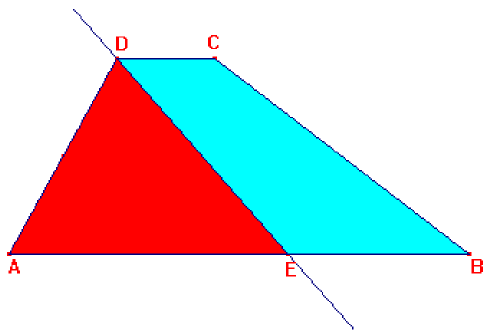
fig 2

2. Se in un quadrilatero ABCD si traccia la diagonale DB e la parallela a DB passante per il vertice C fino a farla incontrare con il prolungamento del lato AB nel punto E, il triangolo AED e il quadrilatero ABCD sono equivalenti. Infatti i due poligoni sono composti dalla parte comune ABD e dai due triangoli BDE e BCD, che sono equivalenti perché hanno la stessa base BD e altezze congruenti (perché i vertici opposti alla base comune stanno sopra una medesima parallela a DB). Si traccia la retta passante per il vertice D che interseca AE nel punto medio M. Quindi per la proprietà transitiva il triangolo AMD e il quadrilatero MBCD sono equivalenti (vedi fig. 2).

Classe 2M, Liceo scientifico "Aristosseno"
Taranto (TA)

1. [[…]]

2. [[…]]



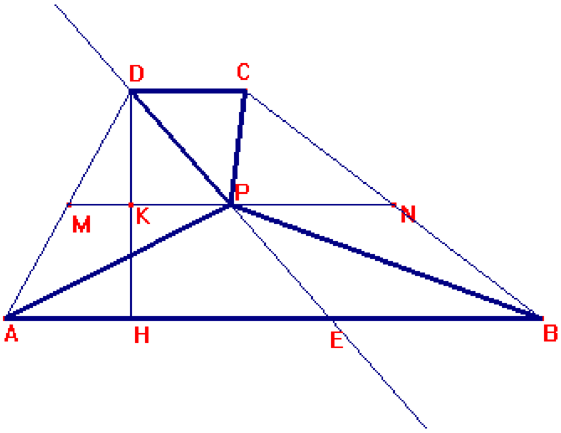
Un trapezio qualunque viene diviso in due parti equivalenti mediante una retta condotta da uno dei suoi vertici e passante per il punto medio del segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui
(figura qui sotto)

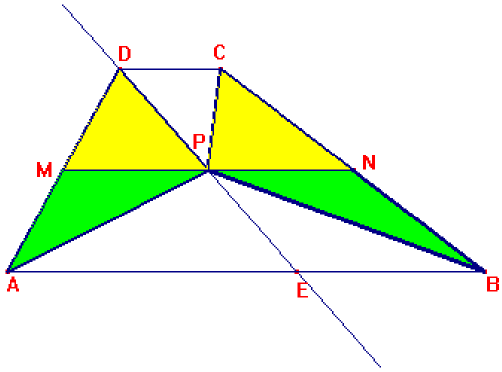
Infatti, tracciato il segmento MN che congiunge i punti medi dei lati obliqui AD e BC, sia P il punto medio di MN. La retta DP divide allora il trapezio in due parti: il triangolo AED ed il quadrilatero EBCD.

Osserviamo che i triangoli CDP ed ABP hanno come basi le basi del trapezio e come altezza la metà dell'altezza del trapezio (questo per il teorema di Talete: DM = MA quindi DK = KH).

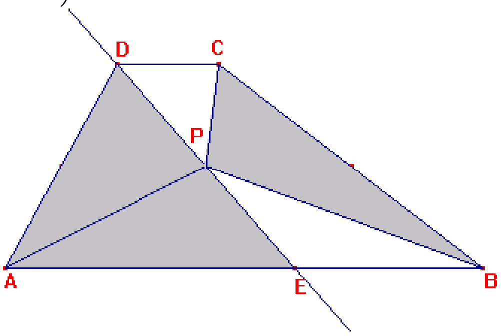
La somma delle aree di questi due triangoli è perciò pari alla metà dell'area del trapezio stesso: S(CDP) + S(ABP) = $\frac{1}{2}$S(ABCD)

Per differenza allora, la somma delle aree dei triangoli APD e BPC è anch'essa pari alla metà dell'area del trapezio: S(APD) + S (BPC) = $\frac{1}{2}$S(ABCD)





Ma i triangoli APD e BPC sono equivalenti fra loro : APD è infatti composto da APM ed MPD che sono rispettivamente equivalenti ai triangoli BPN ed NPC (avendo basi congruenti e congruenti altezze) che formano BPC.



Inoltre risulta S(APD) = S(AEP) poiché P è punto medio di DE (per il teorema di Talete) e quindi i triangoli hanno basi congruenti e stessa altezza.
In conclusione

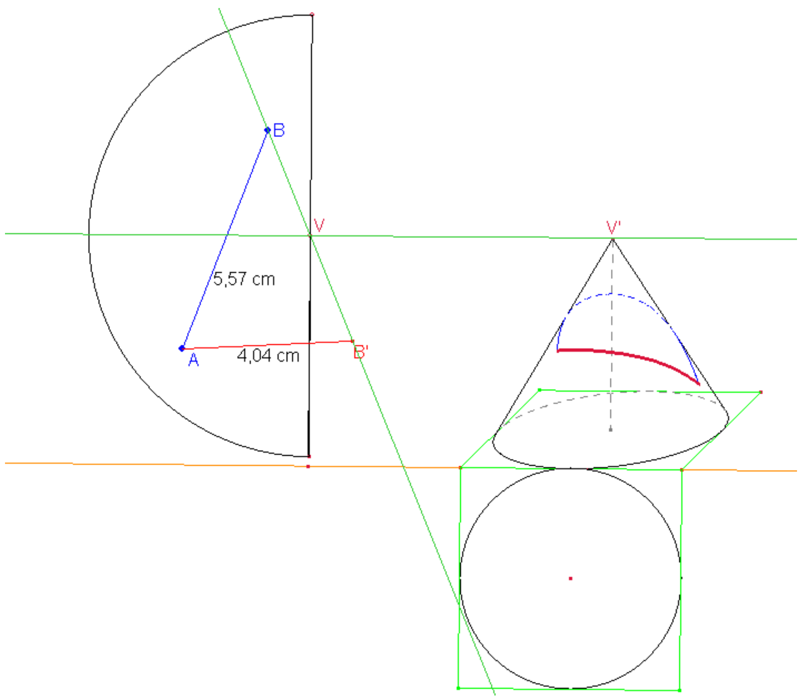
$$S(APD)+S(APE)=S(APD)+S(BPC)=\frac{1}{2}S(ABCD).$$

Marzo 2007

1) Sia u una arbitraria unità di misura di lunghezza. Ritagliare da un cartoncino un semicerchio di diametro 20u e con esso formare un cono. Quali caratteristiche presenta il cono ottenuto?

2) Si vuole tagliare il cono ottenuto in due solidi equivalenti con un piano parallelo alla base. Quale sarà la distanza del piano dal vertice del cono?

3) Siano A e B due punti che stanno sulla superficie laterale del cono. Qual è il cammino più breve per andare da A a B? Motivare la risposta.



Il percorso minimo si ottiene tracciando il segmento che congiunge i punti A e B oppure, in alternativa, i punti A e B', essendo B' il simmetrico del punto B rispetto al centro V del semicerchio che costituisce lo sviluppo laterale del cono.

Commento

Abbiamo ricevuto due risposte dalle scuole

- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa" San Genesio ed Uniti, (PV)*

Ci complimentiamo con gli studenti e gli insegnanti di queste classi per l'assiduo interesse che mostrano nei confronti della geometria euclidea, disciplina che viene spesso trascurata a favore delle tecniche di calcolo.

Nel problema si chiedeva di formare un cono da un semicerchio, di individuarne le caratteristiche, di dividerlo in due parti equivalenti con un piano parallelo alla base calcolando la distanza di quel piano dal vertice del cono.

Si chiedeva inoltre il minimo percorso per andare da un qualunque punto ad un altro sulla superficie laterale del cono.
In entrambe le risposte sono state risolte correttamente le prime due parti anche se con calcoli un po' laboriosi, specialmente da parte degli studenti del liceo "Aristosseno".
Si fa notare che due coni (o piramidi o prismi) simili hanno i volumi proporzionali ai cubi delle rispettive altezze. Questo consente di rispondere al secondo quesito in modo semplice e rapido.

Per quanto riguarda il terzo quesito, dobbiamo convenire che individuare quel percorso come tratto curvilineo sulla superficie del cono non è un quesito alla portata degli studenti di scuola secondaria. Hanno pensato bene gli studenti della scuola media "Dalla Chiesa" a cercare la risposta considerando un opportuno sviluppo piano della superficie laterale del cono. Si vedano in proposito anche le nostre figure inserite nella loro risposta.

La figura allegata al testo illustra il terzo quesito nel caso analizzato (e non risolto) dagli studenti del liceo "Aristosseno". Altre nostre figure sono inserite nella loro risposta

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Classe 3S,
Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)

1. I coni che abbiamo ottenuto partendo da un semicerchio in cartoncino avente il diametro di 20**u** hanno le seguenti caratteristiche:

- sono coni retti per il fatto che lo sviluppo della superficie laterale è un settore circolare (in questo caso un semicerchio)
- l'apotema del cono misura 10
- la lunghezza della circonferenza di base misura 10π
- il diametro del cerchio, che costituisce la base del cono, misura 10
- i coni sono pertanto equilateri
- l'area della superficie laterale del cono misura 50π
- l'area della superficie di base del cono misura 25π e quindi è ½ di quella laterale.

2. Per trovare a quale distanza **[dal vertice]** far passare un piano affinché i due solidi che si ottengono siano equivalenti, calcoliamo il volume del nostro cono:

$$h = 5\sqrt{3}; \qquad V_1 = \frac{25\pi \bullet 5\sqrt{3}}{3}$$

Sezionando il cono con un piano parallelo alla base otteniamo un secondo cono il cui volume V_2 dovrà essere la metà del volume del primo cono e quindi:

$$V_2 = \frac{25\pi \bullet 5\sqrt{3}}{6} = \frac{125\pi\sqrt{3}}{6}$$

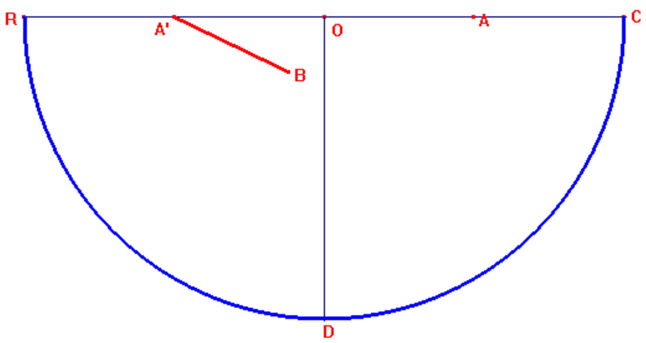
Utilizziamo una equazione per trovare il raggio di base di questo secondo cono (x) e poi la sua altezza:

$$\frac{x^2\pi \bullet x\sqrt{3}}{3} = \frac{125\pi\sqrt{3}}{6}$$, risolvendo l'equazione si ottiene $x = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$

L'altezza del cono e cioè la distanza dal vertice per cui far passare il piano sarà $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$, cioè $h_2 = \frac{h_1}{\sqrt[3]{2}}$

[vedere in proposito il commento].

3. Costruiamo il cono e sulla sua superficie laterale individuiamo due punti A e B.



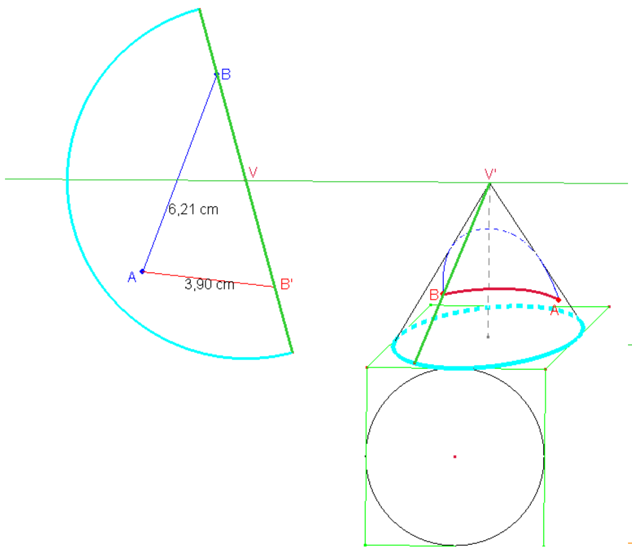
Consideriamo l'apotema del cono passante per A e tagliando la superficie laterale lungo questo apotema otteniamo questo sviluppo piano del cono.

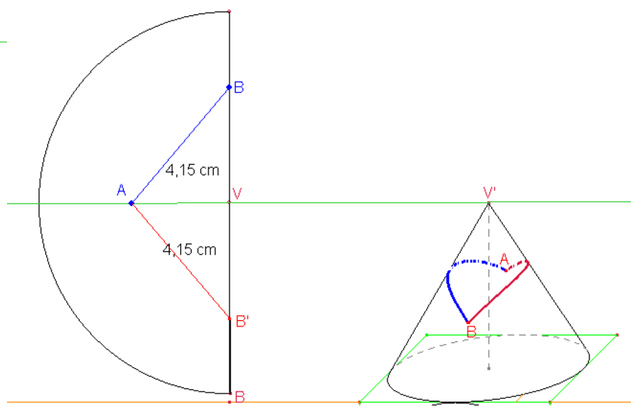
Individuiamo il segmento OD che funge da asse di simmetria del semicerchio e chiamiamo ROD e DOC i due settori circolari congruenti che si individuano.

Trovo il simmetrico del punto A **[rispetto al contro O]** e lo chiamo A'.

Se il punto B si trova nel settore circolare ROD il percorso minimo tra A e B sarà il segmento A'B, se il punto B si trova nel settore DOC il percorso più corto tra A e B sarà il segmento AB, invece se il punto B si trova sul segmento DO è indifferente considerare il segmento AB o il segmento A'B perché sono uguali.

[L'idea di prendere una generatrice passante per uno dei due punti è ottima.
Gli allievi hanno esaminato molto bene i vari casi che si possono presentare nello sviluppo piano della superficie laterale del cono.
Alleghiamo due nostre figure per visualizzare i diversi casi.]



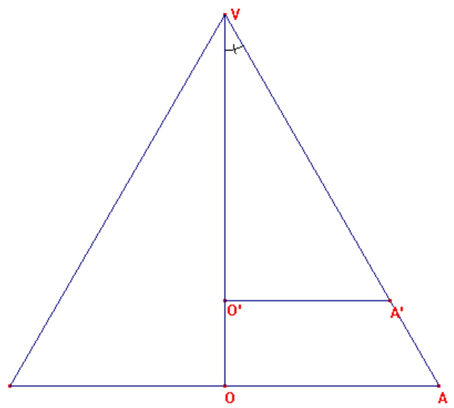


Classe 2M,
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto

1) Il cono è equilatero. Infatti essendo il diametro d=20u , la lunghezza della semicirconferenza di base misura $C = 10\pi$ e quindi il raggio di base del cono è $r = \frac{C}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5$

Essendo quindi il diametro di base del cono uguale al suo apotema, il cono è equilatero.

2) Il piano che taglia il cono lo divide in sue solidi, un cono (anch'esso equilatero) ed un tronco di cono. Questi solidi devono avere lo stesso volume, ovvero il rapporto tra i loro volumi deve essere uguale ad 1.



Esaminando la figura ottenuta in sezione , essendo il cono equilatero la sua altezza VO misura

VO = $\frac{l}{2}\sqrt{3} = \frac{10}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Essendo poi i triangoli rettangoli VOA e VO'A' simili (rettangoli con l'angolo di vertice V in comune) posto OA' = *r'*, sarà VO' = $r'\sqrt{3}$. L'altezza del tronco è perciò: OO'=VO - VO'=$5\sqrt{3} - r'\sqrt{3} = (5 - r')\sqrt{3}$

Il volume del cono è: $V_{cono} = \frac{\pi}{3} r'^2\, VO' = \frac{\pi}{3} r'^3 \sqrt{3}$ ed il volume del tronco di cono è:

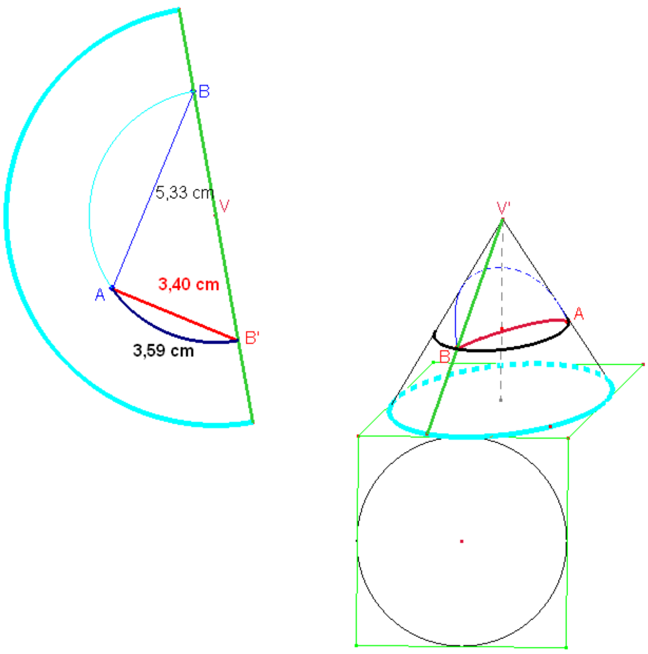
$$V_{tronco} = \frac{\pi}{3} OO'\left(r^2 + r'^2 + rr'\right) = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}(5 - r')\left(25 + r'^2 + 5r'\right) = \frac{\pi}{3}\sqrt{3}(125 - r'^3).$$

Da $\frac{V_{cono}}{V_{tronco}} = 1$ segue: $\frac{r'^3}{125 - r'^3} = 1$ e da qui si ottiene $r' = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}$

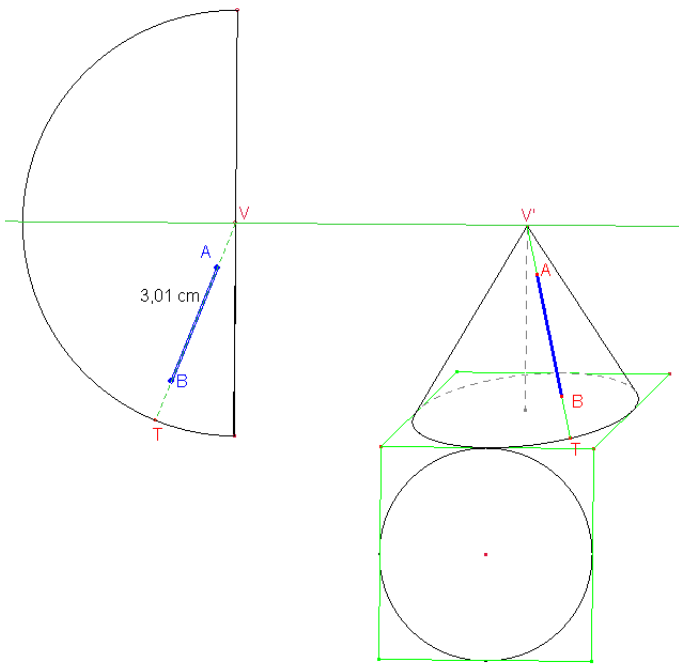
La distanza del piano dal vertice del cono è allora VO' $= \frac{5}{\sqrt[3]{2}}\sqrt{3} = 5\sqrt[6]{\frac{27}{4}}$ **[vedere in proposito il commento].**

3) Presi due punti A e B sullo sviluppo del cono nel piano , abbiamo considerato che nella rotazione di 180° il segmento AB si trasforma in A'B' ma **[[…]] [vedere la figura allegata al testo del problema]**

Nel caso in cui il segmento AB è parallelo al diametro della semicirconferenza sviluppo del cono, **[[…]] [si rientra nel caso precedente; vi rientra anche il caso in cui A e B appartengano a una circonferenza parallela al piano di base: la corda AB' (in rosso nella figura) è minore dell'arco AB' (in nero)]**



Nel caso in cui AB è su uno dei raggi (generatrici) del cono, la linea di lunghezza minima è il segmento rettilineo AB. **[Giusto, vedere la figura qui allegata]**



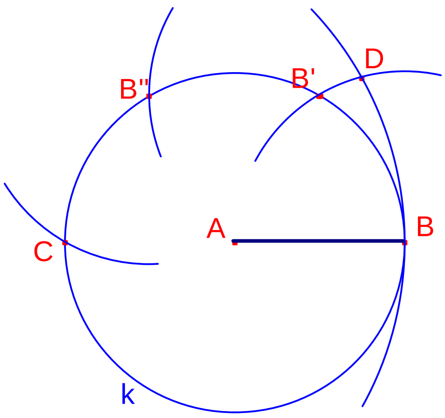
Aprile 2007

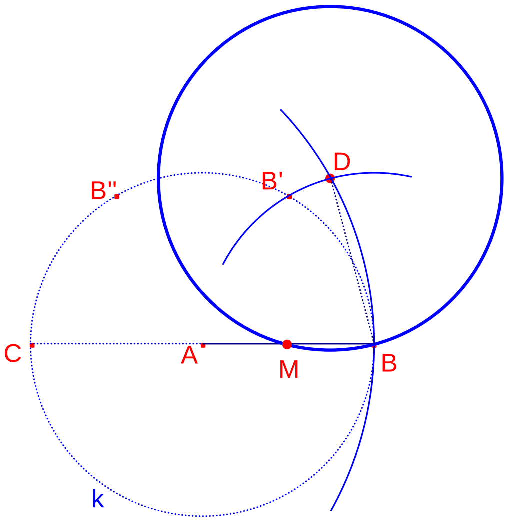
Si racconta che Leonardo Pisano, detto Fibonacci, appena decenne, avendo smarrito la squadra e non volendo farlo scoprire al padre, avesse ideato un ingegnoso metodo per trovare il punto medio di un segmento con l'uso del solo compasso.

Ecco la costruzione:
Dato un segmento AB si tracci la circonferenza ***k*** di centro A e raggio AB; con lo stesso raggio si traccino un arco di centro B che intersechi ***k*** in B', poi un arco di centro B' che intersechi ***k*** in B" e uno di centro B" che intersechi ***k*** in C.
Ora con centro C si tracci un arco di raggio CB e sia D il punto di intersezione con l'arco di centro B già tracciato.
[[…]]
Lasciamo a voi l'ultimo passaggio che permette di individuare il punto medio M di AB

Non sappiamo se il piccolo Leonardo abbia giustificato la sua costruzione.
Volete provarci?

NOTA: Non dimenticate di dimostrare prima che i punti C, A, B sono allineati.





Commento

Abbiamo ricevuto tre risposte dalle scuole:

- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)*
- *LS "A.Roiti", Ferrara (FE)*

Nel problema dato si descriveva la parte iniziale costruzione del punto medio di un segmento con l'uso del solo compasso, attribuita a Leonardo Pisano, detto Fibonacci, appena decenne, lasciando agli studenti il compito di trovare il passaggio conclusivo e di giustificare il risultato raggiunto.
La costruzione richiesta era abbastanza semplice, ma ci è piaciuta l'idea di presentare agli studenti, mediante un aneddoto, un altro aspetto di questo grande personaggio, noto soprattutto per la celebre successione che porta il suo nome e per la diffusione in Europa delle cifre arabe e della scrittura posizionale dei numeri.

Abbiamo inoltre facilitato la giustificazione suggerendo di dimostrare prima l'allineamento dei punti A, B, C, evitando agli studenti di lasciarsi ingannare dalla evidenza della figura.

Commentiamo ora brevemente ciascuna della risposte ricevute.

LS "Aristosseno": gli studenti della classe 2M hanno completato la costruzione e fornito una dimostrazione succinta e completa, facendo ricorso alla similitudine. Abbiamo inserito nel testo due correzioni dove la loro esposizione ci è apparsa imprecisa.

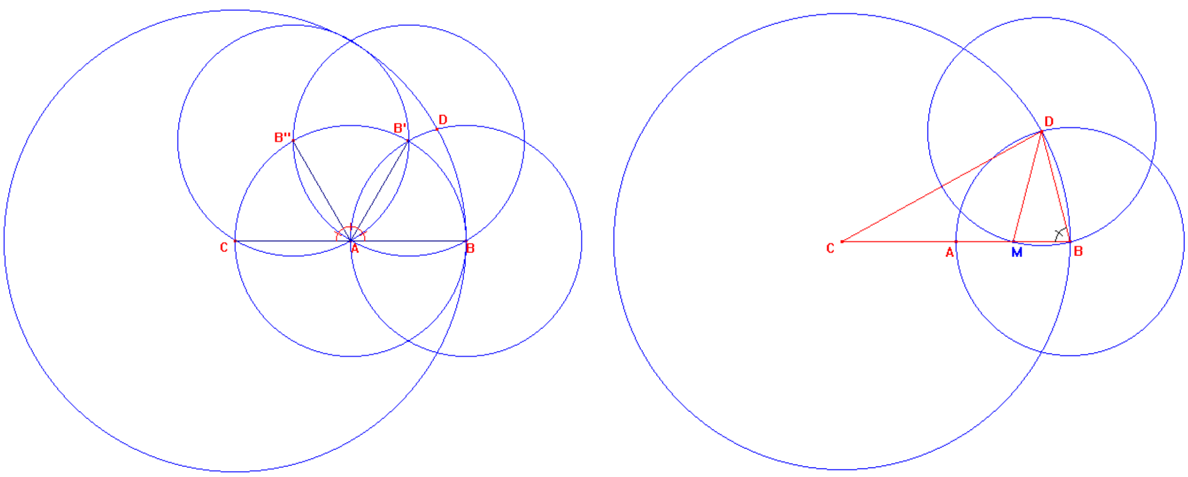
SM "C.A. Dalla Chiesa": una studentessa della classe 3S ha provato di giustificare la costruzione ricorrendo alla simmetria assiale, ma non ha saputo individuare un percorso corretto per giungere alla conclusione. Abbiamo comunque apprezzato il suo tentativo, presenteremo la prima parte della sua risposta e la figura della seconda parte, accompagnata da una breve descrizione, per illustrare la sua idea.

LS "A. Roiti": Giacomo Bergami della classe 3H, che per la prima volta partecipa a FLATlandia, dopo aver completato la costruzione, l'ha giustificata in due modi. Attratto forse dalle tante circonferenze, ha proposto una dimostrazione analitica in cui abbiamo riscontrato alcune imprecisioni di procedimento e qualche passaggio superfluo. Ha fornito anche una dimostrazione di tipo sintetico, un po' lunga nella esposizione, ma corretta. Presenteremo solo quest'ultima, anche se analoga a quella degli studenti dell'Aristosseno.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

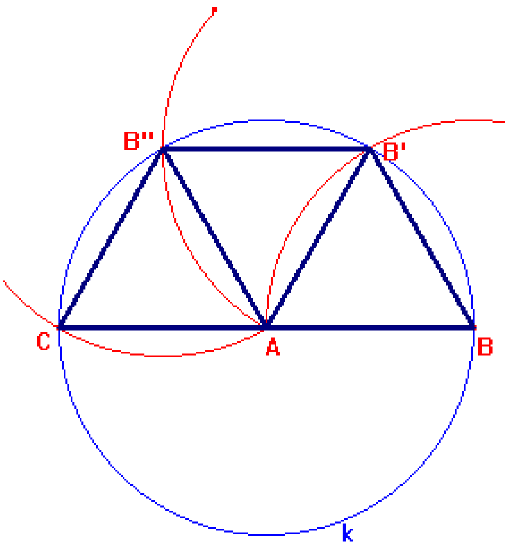
Classe 2M,
Liceo scientifico "Aristosseno", Taranto



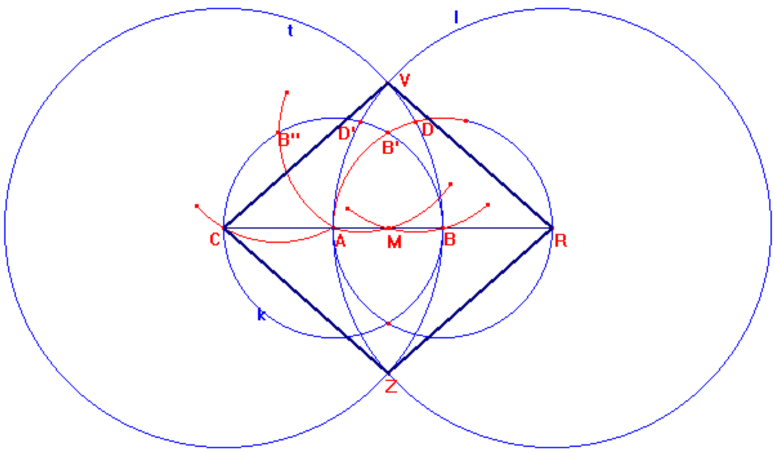
Tracciando i tre archi di centri B, B' e B" e raggio AB, il piccolo Leonardo ha riportato per tre volte la misura del raggio AB sulla circonferenza k. Poiché il lato dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza è congruente al raggio di questa, gli angoli al centro che insistono su corde uguali al raggio AB sono congruenti, BAB' = B'AB" = B"AC, **[e misurano]** 60°. Essendo la somma di questi tre angoli pari ad un angolo piatto , il punto C è allineato con A e con B.
Per completare la costruzione di Fibonacci , dopo aver tracciato la circonferenza di centro C e raggio CB e individuato il punto D, occorre tracciare un'ultima circonferenza di centro D e raggio DB: il punto di intersezione tra quest'ultima circonferenza e il segmento AB è proprio il punto medio M di AB.

Infatti, se consideriamo i triangoli isosceli BCD ed MBD notiamo che essi sono simili in quanto l'angolo CBD è in comune **[affinché due triangoli isosceli siano simili è sufficiente che abbiano congruenti o l'angolo al vertice o uno degli angoli alla base]. [Poiché hanno]** CD = CB = 2BD = 2DM, anche le loro basi sono nello stesso rapporto di similitudine 2, ovvero è BD = 2BM; ed essendo AB = DB **[perché raggi di una stessa circonferenza]** sarà AB = 2BM .

Chiara Veronesi, classe 3S
Scuola media "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)

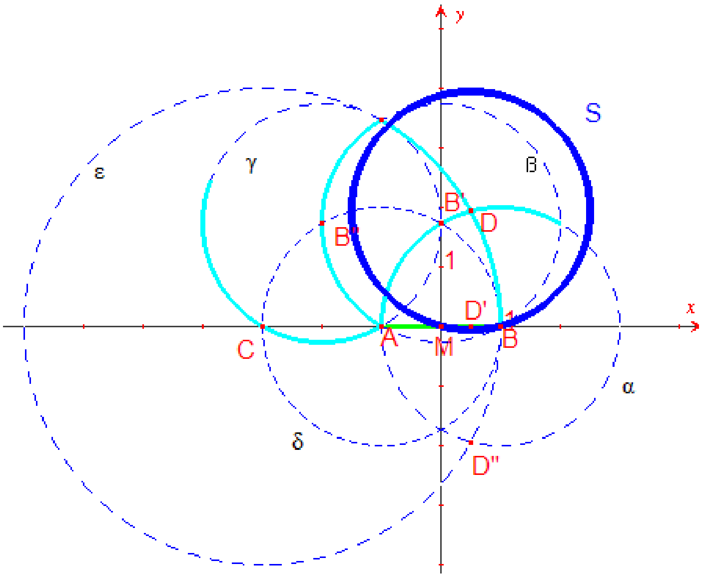


1 - Unisco i punti C, B", B' e B **[[…]].** I segmenti CB", B"B', B'B, BA, AC, AB", AB' sono uguali per costruzione e perchè raggi di circonferenze congruenti.
Considero i triangoli CB"A, B"AB' e B'AB che risultano quindi equilateri ed hanno gli angoli interni di 60°.
Poiché gli angoli CAB", B"AB' e B'AB sono tutti di 60°, la loro somma è uguale a 180° quindi CB è il diametro della circonferenza "k" e i punti A, B, C sono allineati. **[Ora si può affermare che ABB'B"C è un quadrilatero]**



2 – Trovato il punto D, con una costruzione analoga alla precedente, tracciando una circonferenza di centro B e raggio AB trovo il punto R, simmetrico di C **[rispetto a chi?].**
Nello stesso modo con cui ho trovato il punto D individuo il punto D', punto di intersezione tra la circonferenza "l" di centro R e raggio RA e la circonferenza "k".
[[…]]

Giacomo Bergami, classe 3H
Liceo scientifico "A. Roiti", Ferrara



Osserviamo la costruzione iniziale fornitaci dal problema (HP) :

- Circonferenza δ: punto in A con misura $\overline{AB}$
- Circonferenza α: punto in B con misura $\overline{AB}$; $\delta \cap \alpha = B'$
- Circonferenza β: punto in B' con misura $\overline{AB}$; $\delta \cap \beta = B''$
- Circonferenza γ: punto in B" con misura $\overline{AB}$; $\delta \cap \gamma = C$
- Circonferenza ε: punto in C con misura $\overline{CB}$; $\varepsilon \cap \alpha = D$

Per ottenere il punto medio è sufficiente costruire:

- Circonferenza *S*: punto in D con misura $\overline{DB}$; $S \cap AB = M, B$ tali che $\overline{MB} = \overline{AM}$

(DIM. GEOMETRIA ANALITICA) **[[…]]**

(DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA):

Consideriamo il triangolo ABB'
AB ≅ AB' Perché entrambi raggi della circonferenza δ
AB ≅ BB' Perché entrambi raggi della circonferenza α
ABB' è equilatero
BAB' = 1/3 π
Consideriamo il triangolo AB'B"
AB' ≅ AB" Perché entrambi raggi della circonferenza δ
AB' ≅ B'B" Perché entrambi raggi della circonferenza β
AB'B" è equilatero
B'AB" = 1/3 π
Consideriamo il triangolo AB"C
AB" ≅ AC Perché entrambi raggi della circonferenza δ
AB" ≅ B"C Perché entrambi raggi della circonferenza γ
B"AC = 1/3 π
Consideriamo i punti C,A,B e in particolar modo l'angolo CAB
CAB = BAB' + B'AB" + B"AC = 1/3 π + 1/3 π + 1/3 π = π
<u>A,B,C Sono allineati</u>
Consideriamo il triangolo BCD
CB ≅ CD Perché entrambi raggi della circonferenza ε
BCD è isoscele
Consideriamo il triangolo BDM
BD ≅ DM Perché entrambi raggi della circonferenza S
BDM è isoscele
Consideriamo i triangoli BDM e BCD e i loro angoli
CBD ≡ MBD
BDC = DBC Perché BCD è isoscele

MBD = BMD Perché BDM è isoscele
Per il I° Criterio di similitudine dei triangoli
BDM ∝ BCD
Considerando ora i loro lati
CB : BD = BD : MB

CB = CA + AB Perché A,B,C sono allineati
CA = AB Perché entrambi raggi della circonferenza δ
CB = 2 AB
BD = AB Perché entrambi raggi della circonferenza α

2 AB : AB = AB : BM
BM = AB x AB / 2AB
<u>BM = AB/2</u>

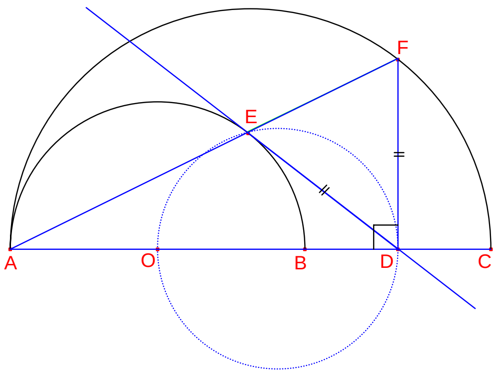
Maggio 2007

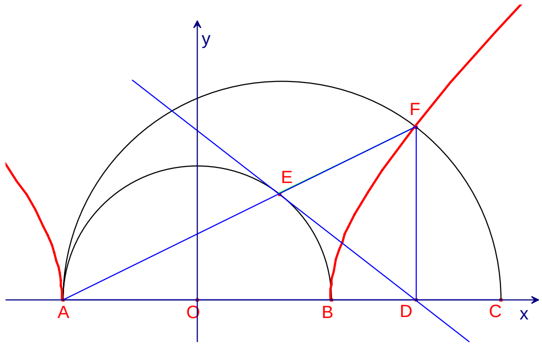
Presi tre punti allineati A, B, C (AB < AC) tracciare in uno stesso semipiano le semicirconferenze di diametro AB e AC.

a) **Detto D il punto medio di BC, costruire la retta per D tangente alla semicirconferenza di diametro AB. Sia E il punto di contatto.**
b) **Detto F il punto in cui la retta AE incontra la semicirconferenza di diametro AC, determinare la natura dei triangoli EDF e ADF.**
c) **Detto O il punto medio di AB, dedurre che $OD^2 – DF^2 = OA^2$**

E' facoltativo studiare il luogo descritto da F al variare di C sulla retta AB

Giustificare la costruzione e motivare le risposte.





Equazione luogo: $x^2 – y^2 = OA^2$, $y>0$

Commento

Abbiamo ricevuto tre soluzioni dalle scuole:

- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*
- *LST, ITI "Berenini", Fidenza (PR)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)*

Nel problema proposto, date due semicirconferenze tangenti internamente, si chiedeva di costruire la retta tangente alla minore da un punto assegnato e di individuare le caratteristiche di due triangoli opportunamente ottenuti all'interno della semicirconferenza maggiore. Si chiedeva inoltre di dimostrare la relazione che intercorre fra i quadrati costruiti su tre segmenti della figura, assegnata in modo da portare poi alla scoperta di un luogo geometrico, il cui studio era richiesto come parte facoltativa.

Nella risoluzione proposta dalla classe 2M del *LS "Aristosseno"* non viene descritta inizialmente la costruzione della retta tangente richiesta.
Si sono comunque dimostrate in modo corretto e completo le successive due richieste; non viene risolta la parte facoltativa sul luogo geometrico.
La soluzione proposta della classe 2B ST del *"Berenini"* presenta la costruzione della retta tangente in modo corretto. Complete anche le parti b) e c), con dimostrazioni analoghe a quelle presentate dalla classe 2M del LS "Aristosseno".

La risoluzione degli allievi del "Berenini" presenta anche la parte facoltativa, in modo quasi corretto, in quanto vi si afferma che il luogo è un'iperbole equilatera, mentre il punto F descrive solo una parte dell'iperbole, quella costituita dai punti di ordinata positiva. Si fornisce l'equazione del luogo, ma non si studiano completamente le sue caratteristiche.

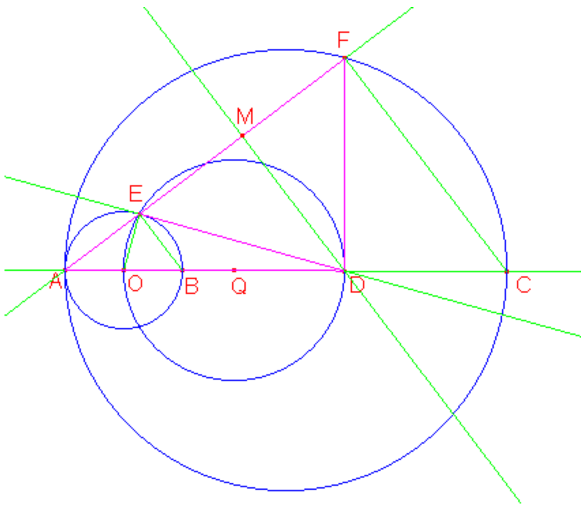
Apprezzabile la risoluzione prodotta dagli allievi della classe 3S della scuola media *"C.A. Dalla Chiesa"* sia per la costruzione della retta tangente sia per la dimostrazione delle caratteristiche dei due triangoli attraverso l'applicazione delle proprietà delle omotetie. Utilizzando il software Cabri hanno anche dedotto che il luogo geometrico descritto dal punto F è un "ramo di iperbole".

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Classe 2B, Liceo scientifico tecnologico
ITI "Berenini", Fidenza (PR)

Premessa: si consideri il semipiano delimitato dalla retta AC e comprendente i punti E,F ed M.



a. Si traccia la semicirconferenza di diametro AB e centro O. Per disegnare la tangente ad essa passante per D, ricordando che il raggio è perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza, occorre disegnare la semicirconferenza di diametro DO e centro nel punto medio di OD. Il punto di intersezione E fra le due semicirconferenze è il punto di tangenza perché vertice dell'angolo retto OED. Esso risulta essere retto perché appartenente al triangolo DOE inscritto nella semicirconferenza OD e quindi rettangolo in E.

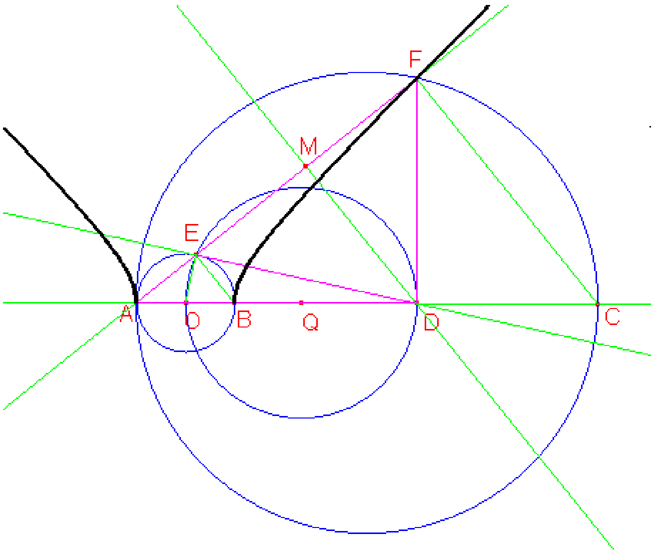
b. Il triangolo EDF è isoscele infatti :

Congiungendo C con F risulta che l'angolo CFA è retto perché il triangolo CFA è inscritto nella semicirconferenza di diametro AC; analogamente congiungendo B con E risulta che l'angolo BEA è retto (perché il triangolo BEA è inscritto nella semicirconferenza di diametro AB). Condotta da D la parallela ad FC sia M il suo punto di intersezione con AF. Risulta che l'angolo DME è retto perché corrispondente di CFE rispetto alle parallele DM e FC tagliate dalla trasversale EF. Inoltre per il teorema di Talete essendo per costruzione BD congruente a DC per costruzione anche EM congruente a MF(segmenti corrispondenti a segmenti congruenti). Pertanto MD è altezza e mediana del triangolo EDF che risulta così isoscele.

Il triangolo ADF è rettangolo in D infatti, detto α l'angolo EAO congruente ad AEO perché angoli alla base del triangolo isoscele AEO (isoscele perché AO e OE raggi della semicirconferenza di diametro AB) risulta che l'angolo EOD è 2α, perché ogni angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma dei due angoli interni a lui non adiacenti.

- essendo l'angolo OED retto (come dimostrato nel punto a), l'angolo ODE del triangolo ODE risulta essere uguale a 90 – 2α (perché in ogni triangolo la somma degli angoli interni è 180°).
- L'angolo FED è uguale a 90 – α perché dato dall'angolo piatto AED meno l'angolo AEO e l'angolo OED.
- Essendo l'angolo DME retto (come dimostrato nel punto b1), l'angolo MDE risulta uguale ad α in quanto angolo interno del triangolo EDM ottenuto da 180-(90+90-α)
- L'angolo MDF è congruente all'angolo EDM in quanto DM altezza e mediana del triangolo isoscele EDF è anche bisettrice.
- Pertanto l'angolo FDA è retto perché somma di ADE (90-2α) con EDM (α) e MDF (α).

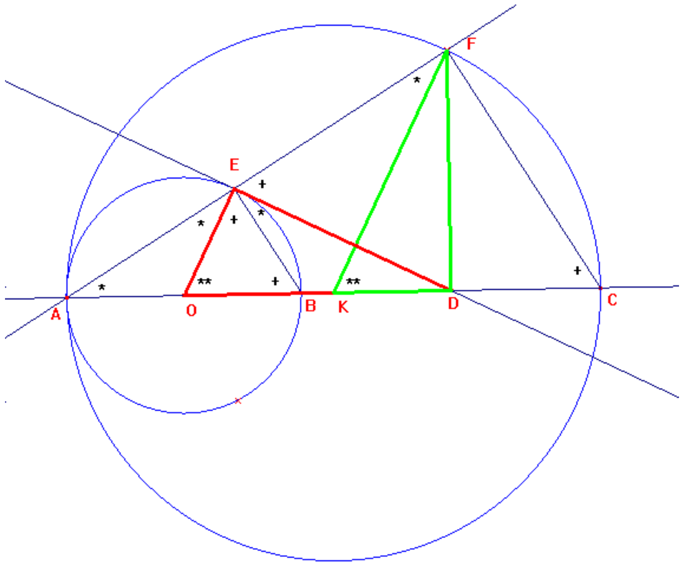
c. Poiché il triangolo ODE è rettangolo in quanto E punto di incontro tra il raggio OE e la tangente ED, per il teorema di Pitagora si ha: $OE^2 = OD^2 - ED^2$. Ricordando che OE e OA sono congruenti perché raggi di una stessa circonferenza e ED e DF sono congruenti perché lati del triangolo isoscele EDF, sostituendo OE con OA e ED con DF si ha: $OA^2 = OD^2 - DF^2$



Facoltativo:

Considerato un riferimento cartesiano di centro O e asse delle ascisse AC, il punto F ha ascissa OD e ordinata DF. Pertanto la relazione del punto c) $OD^2 – DF^2 = OA^2$ rappresenta l'equazione di un' iperbole equilatera di semiasse OB: $x^2 – y^2 = OB^2$ **[di cui il punto F descrive solo la parte con ordinate positive]**

Chiara Veronesi, Francesca Giacovelli, Victoria Pimentel, Classe 3S
Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)



1. Abbiamo tracciato la tangente alla circonferenza di diametro AB in questo modo: abbiamo considerato il segmento OD, cercato il punto medio (H) e tracciata una circonferenza di raggio
OD/2 e centro H che ha incontrato la circonferenza di diametro AB nel punto E.
Indichiamo con K il centro della circonferenza di diametro AC.
Indichiamo con "a" e "b" la misura dei seguenti segmenti: AO=OB=a e BD=DC=b
I triangoli AEB ed AFC sono rettangoli perché inscritti in una semicirconferenza e omotetici con centro di omotetia in A perché hanno un angolo in comune, l'angolo EAB e i lati corrispondenti sono paralleli: AE//AF e AB//AC.
I triangoli AOE ed AKF sono triangoli isosceli perché AO = OE=raggi ed AK=KF=raggi e sono omotetici perché hanno un angolo in comune, l'angolo EAO e i lati corrispondenti paralleli:
AE //AF e AO//AK. Di conseguenza anche OE sarà parallelo KF e quindi saranno uguali gli angoli EOB=FKD perché corrispondenti rispetto alle rette parallele OE//KF.
Consideriamo i triangoli OED ed KFD, essi hanno: OD=KF= a+b (perché se il diametro AC= 2a +2b allora il raggio misura a+b) , OE=KD= a (la misura di KD è "a" perché il raggio KC=a+b e se togliamo la misura di DC=b troviamo che KD=a), e gli angoli EOB=FKD quindi i triangoli OED e FKD sono triangoli congruenti e pertanto si avrà ED=FD.
Considero la relazione di Pitagora applicata al triangolo EOD: $OD^2 = EO^2 + ED^2$. per quello che abbiamo sopra dimostrato possiamo riscrivere questa relazione in questo modo $OD^2 = AO^2 + FD^2$ che era quello che bisognava dimostrare.

2. Abbiamo verificato con Cabri (usando lo strumento traccia) che il luogo che F descrive al variare di C sulla retta AB è una curva che a noi è sembrata un ramo di iperbole.

FLAT*landia*, geometria on-line

L'IRRE dell'Emilia Romagna,
valendosi dell'apporto di operatori interni
e di collaboratori esterni all'Istituto,
ha proposto questo servizio in rete
rivolto a docenti e alunni
che si interessano di matematica.
Il servizio, promosso nell'anno scolastico '97-'98
e giunto al suo decimo anno di attività,
ha visto l'adesione di Istituzioni Scolastiche
di vario tipo

Nel presente volumetto il resoconto
del decimo anno di attività

n°
31