quaderni di CABRIRRSAE

Presentazione a cura di
Franca Noè
e
Aurelia Orlandoni

FLAT*landia*

anno IX

geometria on-line
nella scuola secondaria

n°
30

Franca Noè, insegnante di matematica, collaboratore di IRRE-ER, fa parte della redazione di **FLAT*landia*** e coordina le attività.

Aurelia Orlandoni, insegnante di matematica, ricercatore IRRE-ER, è responsabile del sito FARDICONTO e delle attività collegate.

Il gruppo che gestisce FLAT*landia* è composto da:

- *Giuliana BETTINI - Insegnante di matematica*
- *Giuliano MAZZANTI - Docente di geometria, Univ. di Ferrara*
- *Franca NOE' - Insegnante di matematica*
- *Valter ROSELLI - Ricercatore, Univ. di Ferrara*
- *Luigi TOMASI - Insegnante di Matematica*

Indice

FLAT*landia*

E' un'attività dell'IRRE Emilia-Romagna rivolta principalmente agli alunni del terzo anno della Scuola Media Inferiore e del biennio della Scuola Secondaria Superiore.
La partecipazione all'attività è stata allargata agli studenti del terzo anno di scuola superiore per permettere ai "fedelissimi" di misurarsi ancora con quesiti di geometria sintetica e di approfondire le conoscenze acquisite nel biennio.
Ogni mese viene chiesto ai ragazzi di risolvere un problema di geometria. Entro lo stesso mese vengono valutate le risposte pervenute e vengono segnalate quelle ritenute meritevoli.
Testo e soluzioni sono inviati usando esclusivamente collegamenti telematici.

Un po' di storia

I problemi raccolti in questo quaderno testimoniano il nono anno di attività dell'iniziativa. FLATlandia che, nata come supporto alla lista di discussione Cabrinews, gode ormai di una sua vita autonoma ed ha un piccolo pubblico di affezionati.
Le scuole partecipanti sono passate da ventuno, nel primo anno, alle attuali sedici con un picco di trentotto nell'anno 2000/2001.

Il progetto

E' gestito da un comitato composto da due insegnanti di scuola secondaria, da due docenti universitari e da un tecnico informatico. Come negli anni passati, il problema proposto mensilmente richiede di solito una costruzione ed una dimostrazione.
L'intento è quello di coinvolgere gli alunni in una attività che richiede sì conoscenze, ma anche fantasia, creatività, immaginazione.
In questo momento di forte auspicio di utilizzo di nuove tecnologie nell'insegnamento/apprendimento di varie discipline, FLATlandia si propone come attività al passo coi tempi, senza nulla concedere all'improvvisazione e al pressapochismo.
I problemi proposti richiedono, per essere risolti, sicure competenze e conoscenze matematiche; sollecitano, come già detto, fantasia e creatività, che sono gli aspetti forse più caratteristici di questa disciplina. Qualora vengano utilizzati software, è necessario averne una conoscenza abbastanza approfondita. Per spedire i materiali in forma adeguata (testo e figure) bisogna padroneggiare discretamente le tecnologie informatiche.
La partecipazione a FLATlandia può essere inoltre anche un incentivo, per i ragazzi, a migliorare le loro capacità di argomentazione e di esposizione.

Come partecipare

I problemi sono inviati alla lista di discussione Cabrinews (cabrinews@www.scuolan.it) il primo lunedì di ogni mese, da ottobre a maggio, oppure sono consultabili in rete negli archivi del progetto all'indirizzo: http://www.fardiconto.it/flatlandia.
Gli alunni possono partecipare singolarmente, per gruppi, o inviando un'unica soluzione a nome di tutta la classe. Le soluzioni dovranno pervenire entro il terzo lunedì del mese, al seguente indirizzo di posta elettronica: flatlandia@fardiconto.it, inserendo nel mail il nome, la classe e il nominativo dell'Istituto.

Ulteriori informazioni

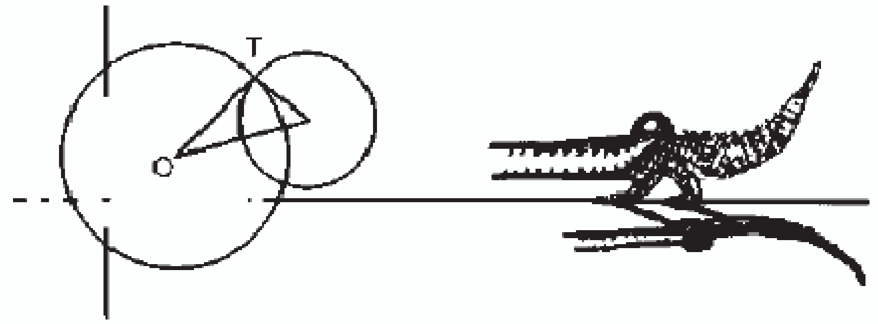
Le soluzioni possono essere scritte o direttamente nel messaggio di posta elettronica o in un file in formato Word, inviato in allegato. Se si vuole allegare un disegno deve essere inviato o in formato Cabri-géomètre per MS-DOS o per Windows, altrimenti in formato Word.

FLAT*landia*

Attività 2005-2006

Tabella riassuntiva delle scuole che hanno inviato soluzioni nel 2005-2006

			Scuola	Frequenza							
				O	N	D	G	F	M	A	M
MEDIE	INFERIORI	**1**	SM "Brofferio", Asti (AT)		♦	♦					
		2	SM "C. A. Dalla Chiesa" S. Genesio (PV)		♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦
		3	SM "Paisiello", Cinisello Balsamo (MI)				♦			♦	
		4	IC "Rodari", Baranzate (MI)								♦
ISTITUTI	TECNICI	5	ITI "Galileo Ferraris", San Giovanni La Punta (CT)	♦						♦	
		6	ITCG "Ruffini" Imperia (IM)		♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦
		7	ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR)		♦	♦	♦		♦		
		8	ITI "G. Giorgi" Brindisi (BR)					♦			
LICEI SCIENTIFICI	e GINNASI	9	LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)	♦	♦	♦		♦	♦	♦	
		10	LS "Farinato", Enna (EN)	♦	♦						
		11	LS "Aristosseno", Taranto (TA)		♦	♦	♦	♦	♦		
		12	LS "Majorana", Guidonia (RM)		♦						
		13	LS "A. Volta", Milano (MI)		♦						
		14	LC "Sarpi", Bergamo (BG)		♦						
		15	LS "Cremona", Milano (MI)			♦					
		16	LS "B. Russel", Roma (RM)						♦		



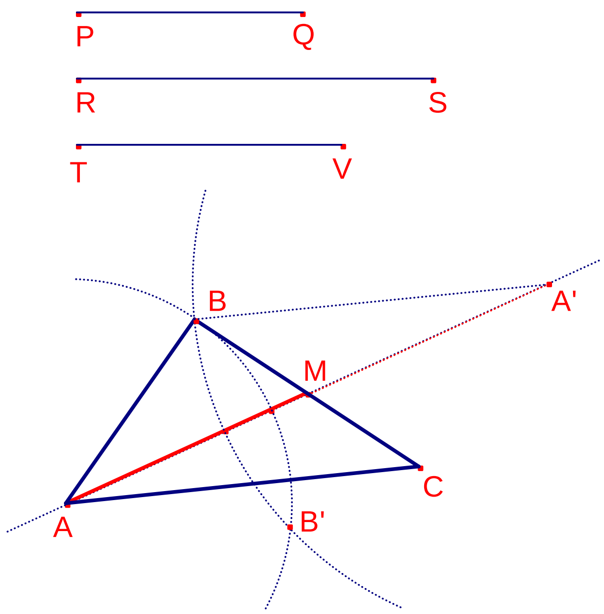
FLAT*landia*

Problemi e soluzioni

Ottobre 2005

Dati tre segmenti PQ, RS, TV, costruire un triangolo ABC in cui AB = PQ, AC = RS e la mediana relativa al terzo lato sia congruente a TV.
E' sempre possibile la costruzione richiesta?
Giustificare la costruzione e motivare le risposte.

La nostra costruzione



AM = TV
MA' = AM
Arco di raggio PQ, centro A
Arco di raggio RS, centro A'
Punto di intersezione B (o B')
C simmetrico di B rispetto M
ABC è uno dei triangoli richiesti.

Commento

Abbiamo ricevuto tre risposte dalle scuole

- *ITI "Galileo Ferraris", San Giovanni La Punta (CT)*
- *LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)*
- *LS "Farinato", Enna (EN)*

Nel problema proposto si chiedeva di costruire un triangolo essendo dati due lati e la mediana relativa al terzo lato, poi di indagare sulle possibilità di risoluzione del quesito.
In una sola risposta vengono affrontate entrambe le richieste, con qualche carenza nelle motivazioni.
Auguriamo a tutti i partecipanti un miglior esito con i prossimi problemi.
Esplorando in rete l'archivio di FLATlandia si può osservare che quando si assegna una costruzione si intende una successione di passaggi eseguibili con riga e compasso, manualmente o con l'ausilio di un software appropriato. Non si possono accettare risultati ottenuti per successivi aggiustamenti della figura sfruttando la dinamicità, ad esempio, del Cabri-géomètre.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

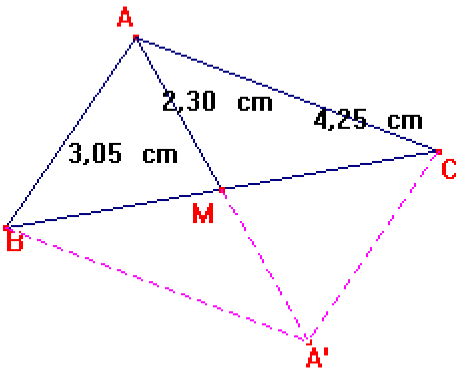
Di seguito le risposte che abbiamo convenuto di riportare.

Soluzioni

Alfonso Scarpino
1 G, LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)

Lo studente ha prima supposto il problema già risolto per discuterne le limitazioni. Non si è accorto che la figura esaminata forniva anche il percorso per costruire il triangolo richiesto e ha così proposto una costruzione molto complessa. Egli ha "scoperto" che, fissato il lato AB=PQ, il terzo vertice C di tutti i triangoli che hanno come mediana AM=TV, descrive una circonferenza. Non giustifica questa osservazione probabilmente perché gli mancano ancora le conoscenze per poterlo fare.

1. La costruzione non è sempre possibile ma, supponendo di trovarla e costruendone il simmetrico rispetto al punto medio M, si ottiene il parallelogrammo ABA'C in cui una delle diagonali, AA', è il doppio della mediana AM. Ma in ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza, per cui risulta (supponendo AC > AB)



$$AC - AB < AA' < AC + AB$$

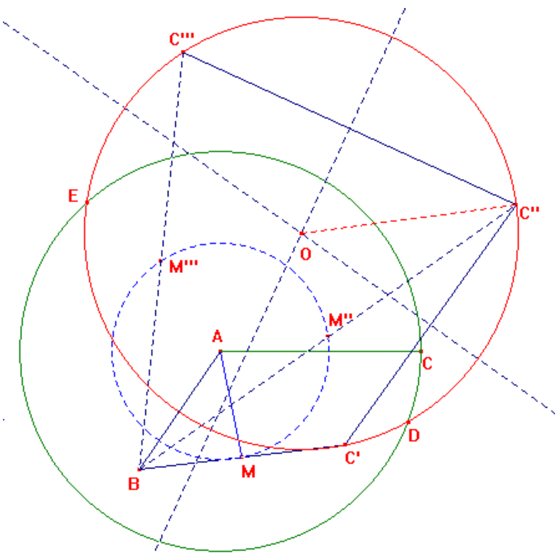
$$AC - AB < AA' < AC + AB \quad \text{ovvero}$$

$$AC - AB < 2 \cdot AM < AC + AB \quad \text{da cui, infine}$$

$$\frac{(AC - AB)}{2} < AM < \frac{(AC + AB)}{2}$$

cioè la mediana deve essere maggiore della semidifferenza e minore della semisomma dei due segmenti dati come si vede dalla figura.

2. Riportiamo i tre segmenti PQ, RS, TV a partire dallo stesso punto A.
Tracciamo il segmento BM e lo prolunghiamo di un segmento ad esso congruente che chiameremo MC'.

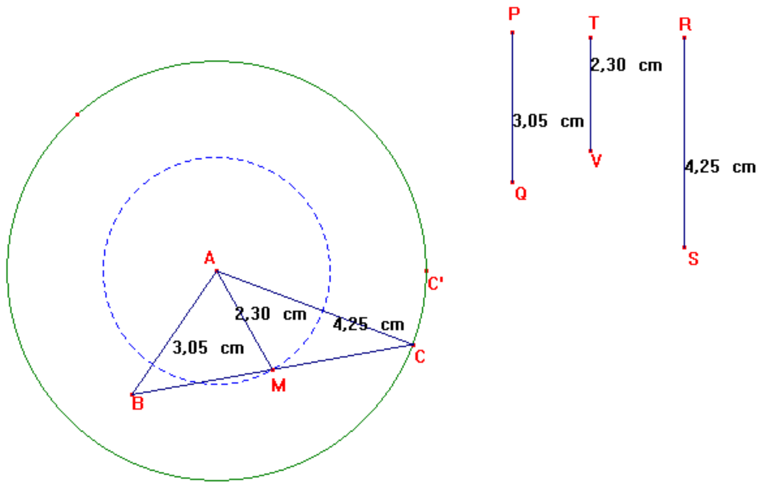


Facendo ruotare il punto M sulla circonferenza di centro A e raggio AM, il punto C' descrive a sua volta una circonferenza (quella rossa nella seconda figura)[1]; tracciando anche la circonferenza di centro A e raggio AC (quella verde in figura), si può notare che le due circonferenze si intersecano in due punti distinti D ed E (simmetrici rispetto ad AB).
Per costruire la circonferenza "rossa", passante per i punti C', C"e C'" è necessario individuarne il centro. A tale scopo, prendiamo 2 qualsiasi punti distinti M" ed M'" sulla circonferenza di centro A e raggio AM e, dopo aver tracciato i segmenti BM" e BM'" che li congiungono al punto B, prolunghiamo detti segmenti dalla parte dei punti M" ed M'" di un segmento pari, rispettivamente, alle distanze BM" e BM'". I punti così ottenuti, C" e C'" appartengono alla circonferenza che cercavamo per cui,

---

[1] **[Con riferimento alla figura 2 si osserva che per ogni posizione di AM si individua un punto C' tale che C'B=2MB; i punti M e B si corrispondono quindi in una omotetia di centro B e rapporto 2. Alla circonferenza di raggio AM corrisponderà la circonferenza di centro O allineato con A e B, tale che OB=2AB, e di raggio O-C'=2AM.**
Si può giungere alla stessa conclusione considerando, per due diverse posizioni di AM, e di C', opportune coppie di triangoli simili con vertice comune in B.]

tracciando gli assi delle corde C'C" e C"C"', il loro punto di intersezione sarà proprio il centro O della nuova circonferenza. A questo punto basta tracciare la circonferenza di centro O e raggio OC" per individuare i punti di intersezione D ed E con la circonferenza di centro A e raggio AC.
In questi punti, quindi, si realizza la costruzione richiesta poiché il segmento AD risulta congruente al segmento AC dato ed il punto M è il punto medio del segmento BD o BC che dir si voglia. Analogamente per il punto E.
Nella figura seguente è riportata la costruzione finale del triangolo ABC.



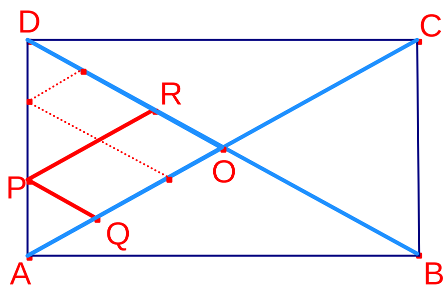
Classe 3C, LS "Farinato", Enna (EN)

Risposta incompleta, manca la costruzione del triangolo; viene presentata solo una discussione delle possibilità di soluzione descrivendo nelle varie fasi la figura di riferimento.

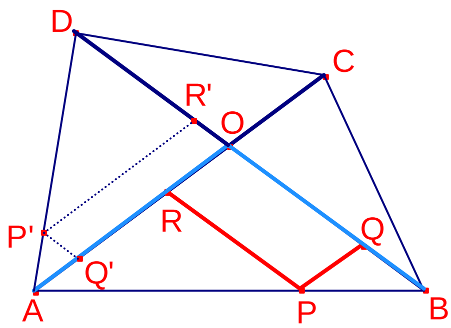
La soluzione del problema è stata fatta partendo dal caso particolare che si verifica quando PQ risulta uguale a RS e di seguito, estendendo le considerazioni al caso di PQ diverso da RS.
Consideriamo i due segmenti consecutivi AB e AC (rispettivamente uguali a PQ ed RS) ed indichiamo con â l'angolo compreso tra di essi. Se AB e AC devono essere lati di un triangolo, deve aversi: 0°<Â<180°. Al variare dell'angolo â, la mediana relativa al lato BC varierà tra 0 (per Â~180°) e PQ (=RS) (per Â~0°).
Nel caso particolare di PQ=RS=m, dovrà essere: 0<TV<m.
Se PQ è diverso da RS, supponiamo essere PQ>RS.
Quando l'angolo â tende a diventare nullo, il punto C tende a cadere sul segmento AB e la mediana relativa al lato BC tende ad essere uguale al segmento $RS + \frac{(PQ - RS)}{2} = \frac{(PQ+RS)}{2}$.
Quando l'angolo â tende ad asssumere il valore 180°, il punto C tende a cadere sulla retta alla quale appartiene il segmento AB e la mediana relativa al lato BC tende ad essere uguale a $\frac{(PQ + RS)}{2} - RS = \frac{(PQ-RS)}{2}$.
Al variare dell'angolo Â la mediana relativa al lato BC varierà tra $\frac{(PQ-RS)}{2}$ (per Â~180°) e $\frac{(PQ+RS)}{2}$ (per Â~0°).
Il risultato generale, che comprende come caso particolare il risultato trovato quando PQ = RS, è: $\frac{(PQ-RS)}{2} < TV < \frac{(PQ+RS)}{2}$.

Novembre 2005

Nel rettangolo ABCD considerare un punto P su un lato (ad esempio AD) e condurre da P le parallele alle due diagonali in modo da incontrarle in Q e R. Osservare, al variare di P sul lato, come si comporta il perimetro del parallelogrammo PQOR (essendo O il punto d'incontro delle diagonali).
1) La proprietà osservata è vera in ogni parallelogrammo?
2) Può sussistere in un altro tipo di quadrilatero?
Motivare le risposte.



PQ+PR=AO=DO



PQ+PR=AO=BO
P'Q'+P'R'#AO#DO

Commento

Sono giunte undici risposte dalle seguenti scuole

- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*
- *LS "Majorana", Guidonia (RM)*
- *SM "Brofferio", Asti (AT)*
- *LS "G. B. Scorza", Cosenza (CS)*
- *ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR) – due risposte*
- *LS "A. Volta", Milano (MI)*
- *LC "Sarpi", Bergamo (BG)*
- *ITCG "Ruffini" Imperia (IM)*
- *LS "P. Farinato", Enna (EN)*
- *SM "C. A. Dalla Chiesa" S. Genesio (PV)*

Nel problema, proposto volutamente in modo vago, si chiedeva di osservare il comportamento del perimetro di un parallelogrammo, con i lati paralleli alle diagonali di un rettangolo, al variare di un suo vertice (P) posto su un lato del rettangolo stesso. Si chiedeva inoltre di vedere se tale proprietà si poteva estendere ad altri parallelogrammi e ad altri quadrilateri.
In tutte le risposte si è giunti alla conclusione che il perimetro di quel parallelogrammo è costante e congruente a una diagonale del rettangolo e quasi tutti hanno concluso che (eccetto il quadrato) questa proprietà non vale negli altri parallelogrammi.
Non tutti però sono stati esaurienti nelle loro motivazioni.
Qualcuno ha notato che quel perimetro dipende dalla congruenza delle due semidiagonali del rettangolo e quindi rimane costante anche in altri quadrilateri (ma in generale non più congruente ad una diagonale) per una opportuna scelta delle diagonali e del lato su cui porre il vertice P.

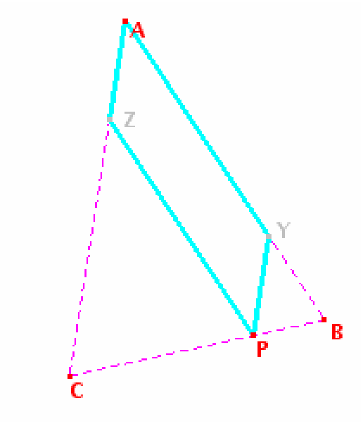
Inoltre c'è chi ha rivolto l'ulteriore osservazione, limitatamente ai parallelogrammi, anche a un caso particolare, cioè P punto medio.
Si fa presente però che le dimostrazioni delle proprietà della geometria sintetica debbono avere carattere generale, a meno che non sia altrimenti richiesto.

Proponiamo all'attenzione di tutti alcune risposte.
NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Giuliano Montelucci
2G, LS "Majorana", Guidonia (RM)

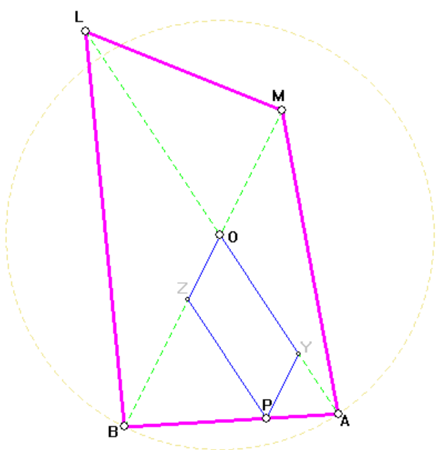
Per risolvere il problema, bisogna innanzitutto aver presente questa proprietà dei triangoli isosceli:
Se in un triangolo ABC, isoscele in A, viene preso su BC un punto P, e vengono fatte poi passare per P le parallele ai due altri lati (chiamando per comodità Z e Y i punti d'incontro delle parallele con i due lati), il perimetro del parallelogrammo AZPY è uguale alla somma dei due lati uguali AC e AB, indifferentemente dalla posizione di P su BC.



Dimostrazione della proprietà:

Per le leggi del parallelismo, angolo ACB = angolo YPB, e angolo ABC = angolo ZPC. Ne consegue che i triangoli ZCP e YPB sono entrambi isosceli.
Ora, dato che AZ=PY e ZP=AY, ne segue che AZ+ZP+PY+YA=AB+AC (oppure 2AB, o 2AC, è indifferente), quindi il perimetro di AZPY è costante, indipendentemente dalla posizione di P.

Ora che la proprietà è dimostrata, passo al problema vero e proprio.
Al variare di P sul lato, il perimetro rimane costante (come già dimostrato).
1) No, la proprietà è vera solo nei rettangoli **[e nei quadrati, essendo particolari rettangoli]**, poiché sono gli unici <u>parallelogrammi</u> in cui le diagonali formano triangoli isosceli.
2) Sì, la proprietà osservata sussiste in tutti quei quadrilateri in cui diagonali e lati formano triangoli isosceli. L'unico caso in cui si trovano quattro triangoli isosceli insieme è, come detto, il rettangolo. Ma il discorso è estendibile anche ai quadrilateri in cui si formano uno o due triangoli isosceli **[[…]]**, a patto però che P si trovi su uno dei lati che è la base di un triangolo isoscele, come in figura:

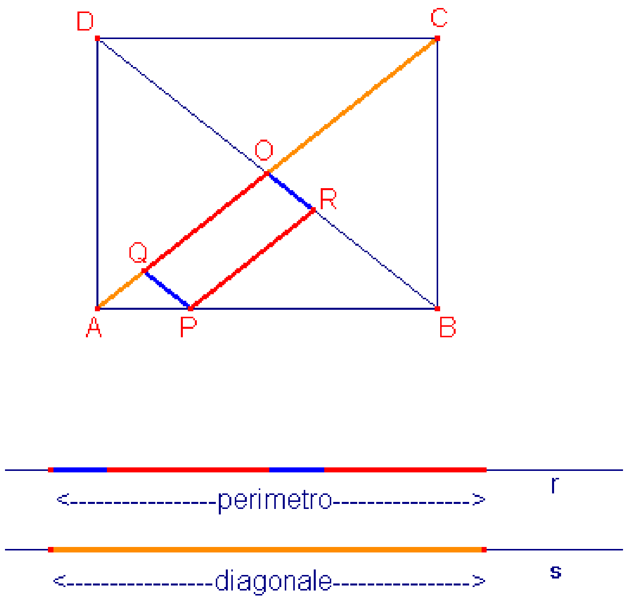


Nella costruzione a fianco OA=OB, e quindi essendo OAB isoscele la proprietà del perimetro OZPY è vera. La lunghezza di OM e OL non ha comunque influenza sul triangolo OAB.

Classe 3F, SM "Angelo Brofferio, Asti (AT)

Questi studenti, dopo aver osservato e giustificato la proprietà del perimetro, hanno risposto alla domanda sul generico quadrilatero per fare poi discendere da questa risposta quella sui parallelogrammi.

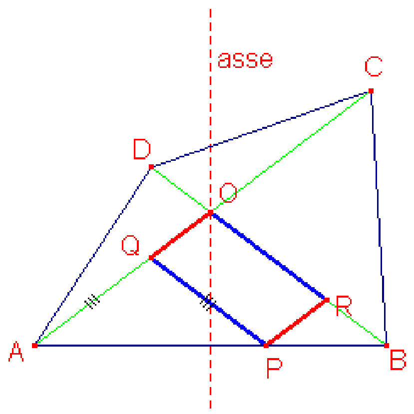
Indagine grafica



Abbiamo realizzato la figura con Cabri per scoprire il comportamento del perimetro del parallelogrammo al variare di P su AB.
Abbiamo costruito il rettangolo ABCD e il parallelogrammo OQPR; successivamente abbiamo riportato sulla retta s un segmento congruente a AC e sulla retta r i segmenti PQ, OQ, OR e PR, posizionandoli uno adiacente all'altro.
Trascinando il punto P sul lato AB si può vedere che il perimetro di PQOR *rimane costante* ed è *congruente alla lunghezza della diagonale del rettangolo*. Dopo esserci convinti della proprietà, abbiamo cercato una spiegazione.

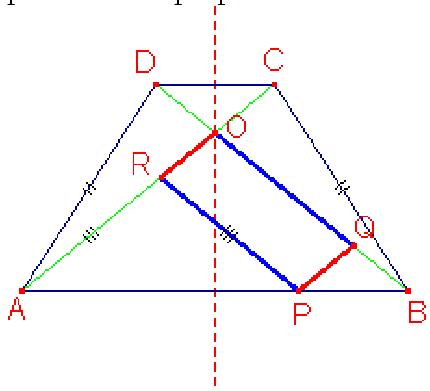
Giustificazione teorica:

1) Abbiamo considerato i due triangoli AOB e AQP; essi sono simili per costruzione (1° criterio di similitudine).
Essendo AO=OB segue che AQ = QP.
Aggiungendo a entrambi i termini QO si ottiene:
AQ + QO = QP + QO, cioè: AO = p(PQOR)
Moltiplicando entrambi i termini per 2 si ottiene:
2 ·AO = 2p(PQOR), cioè: AC = 2p(PQOR)
2) Affinché il perimetro del parallelogramma PQOR resti costante al variare di P su AB deve risultare AO = OB.



Solo i quadrilateri ABCD che hanno il punto d'incontro delle diagonali O sull'asse di AB mantengono la proprietà.
In questi quadrilateri il perimetro di PRQO è *costante* al variare di P su AB ed *è congruente a 2AO.*

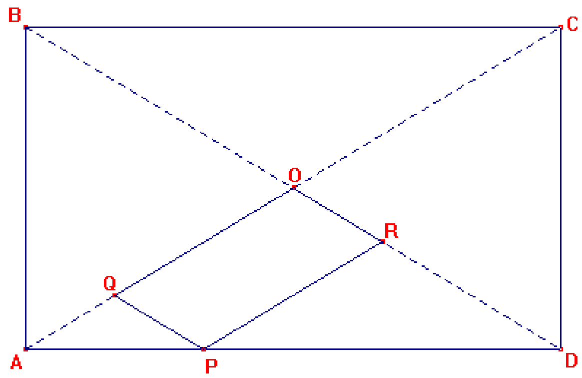
In particolare la proprietà si conserva nei trapezi isosceli:



1) Gli unici parallelogrammi che hanno il punto d'incontro delle diagonali sull'asse della base sono i rettangoli **[e quindi anche i quadrati]**, infatti nei parallelogrammi le diagonali si bisecano scambievolmente e se AO = OB, anche DO = OC.

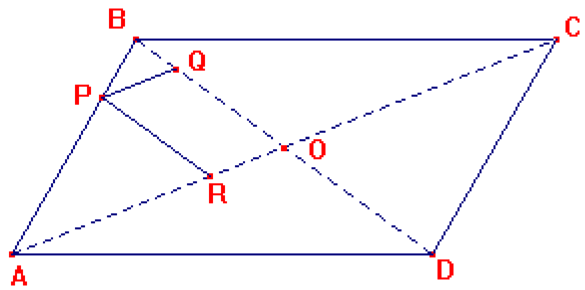
Alfonso Scarpino,1G, LS "G. B. Scorza", Cosenza (CS)

1.

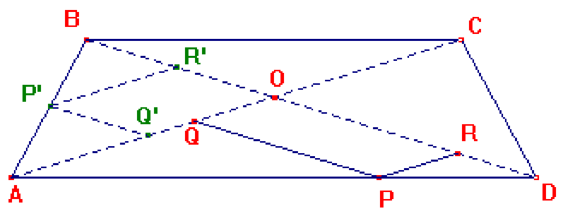


Il perimetro del parallelogrammo PQOR è uguale alla somma delle due semidiagonali, cioè AO e DO in figura, rispettivamente (e quindi, nel caso del rettangolo, alla lunghezza di una diagonale).

Infatti, consideriamo il triangolo AOD: esso è isoscele di base AD perché ha due lati congruenti (AO e DO) in quanto metà delle diagonali del rettangolo e pertanto gli angoli OAD e ODA saranno congruenti. Nel triangolo AQP il lato QP è parallelo al lato OD e quindi gli angoli APQ ed ADO sono congruenti perché corrispondenti rispetto alle parallele QP e DO tagliate dalla trasversale AD; da ciò segue che esso è isoscele per avere gli angoli QAP e QPA congruenti per la proprietà transitiva. Segue quindi che AQ è congruente a QP. Analogamente per il triangolo PRD, da cui RP congruente a RD e da questo la tesi.

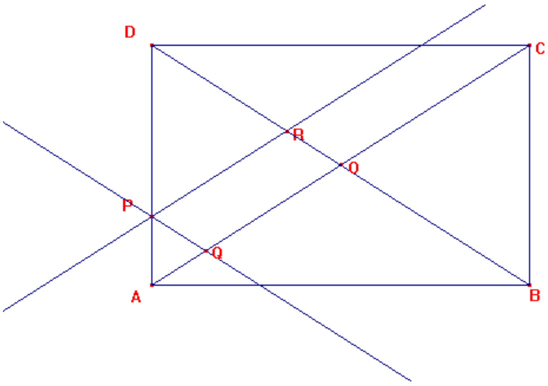


In un generico parallelogrammo, le due semidiagonali, per esempio OB ed OA, non sono congruenti e quindi il perimetro del parallelogrammo PQOR varia tra il doppio della più piccola (OB) ed il doppio della più grande (OA) per cui non vale la proprietà sopra evidenziata.



2. Abbiamo notato che, affinché sia verificata questa proprietà, è necessario che le due parti in cui restano divise le diagonali (per esempio AO e DO) siano tra loro congruenti. Nei quadrilateri questo si verifica nei trapezi isosceli **[non solo]** prendendo però il punto P su una delle due basi.

Gruppo di studenti della classe 5B ginnasiale, LC "Sarpi", Bergamo (BG):
Antongiovanni Flavia, Bertolazzi Ilaria, Carminati Leonardo, Carola Giulia, Pellegrini Simone, Leuzzi Mariagiulia, Pozzetti Gabriele, Serafini Giulia



Hp
A=B=C=D
AB//CD
AD//BC
PR//AC
PQ//BD

Proprietà
Il perimetro del parallelogramma PQOR è congruente alla diagonale del rettangolo ABCD, infatti:
gli angoli ODA e OAD sono congruenti in quanto angoli alla base del triangolo AOD che è isoscele poiché OA e OD sono metà di diagonali congruenti per le proprietà del rettangolo.
Inoltre gli angoli QAD e RPD sono congruenti in quanto angoli corrispondenti delle due rette AO e PR, parallele per ipotesi, tagliate dalla trasversale AD.
Per lo stesso motivo **[l'angolo]** RDA è congruente **[all'angolo]** QPA.
Per la proprietà transitiva [gli angoli] QAD=QPA e ODA=RPD quindi i triangoli AQP e RDP sono isosceli per la proprietà del triangolo isoscele; ne consegue che AQ =QP e PR =DR.
Quindi la semidiagonale è congruente al semiperimetro del parallelogramma ORPQ e di conseguenza la diagonale è congruente al suo perimetro.

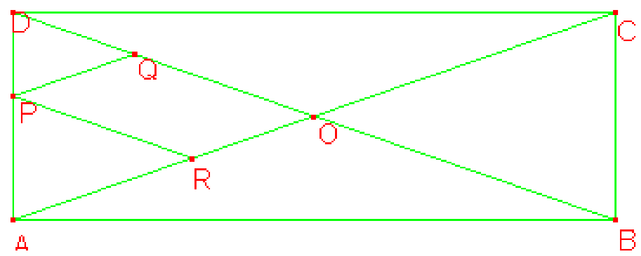
1) La proprietà osservata non è vera in ogni parallelogramma in quanto in un parallelogramma non rettangolo le diagonali non sono congruenti, e poiché la proprietà osservata è valida per entrambe le diagonali, il perimetro di ORPQ sarebbe congruente a diagonali tra loro non congruenti, ma questo è assurdo e quindi il parallelogramma deve essere un rettangolo **[o un quadrato]** perché la proprietà sia valida.

2) **[[…]]**

Classe 3A Programmatori, ITCG "Ruffini", Imperia (IM)

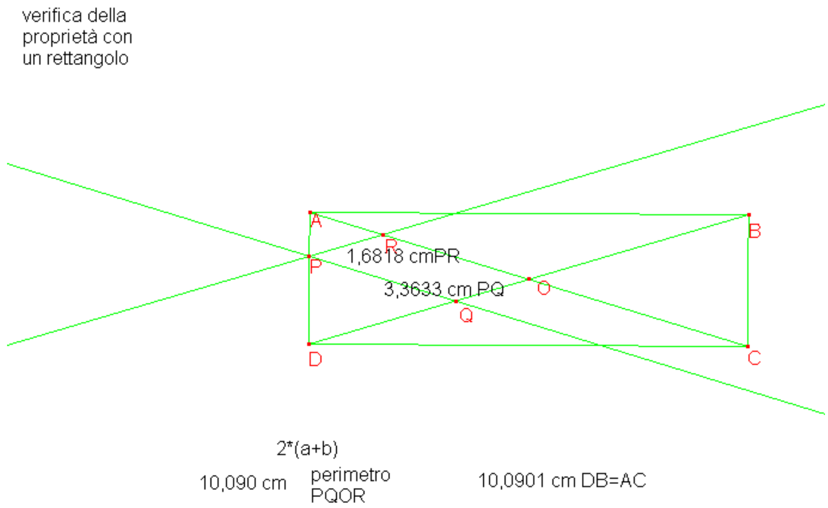
Questi studenti hanno considerato anche il caso particolare in cui P è punto medio. Hanno svolto un lavoro di laboratorio informatico ricorrendo a due diversi software. Alleghiamo il loro file Derive.

Dopo una serie di tentativi e di soluzioni "cartacee", abbiamo lavorato nelle ore di laboratorio.
Riportiamo di seguito le fasi della nostra attività.
Abbiamo constatato che nella figura:

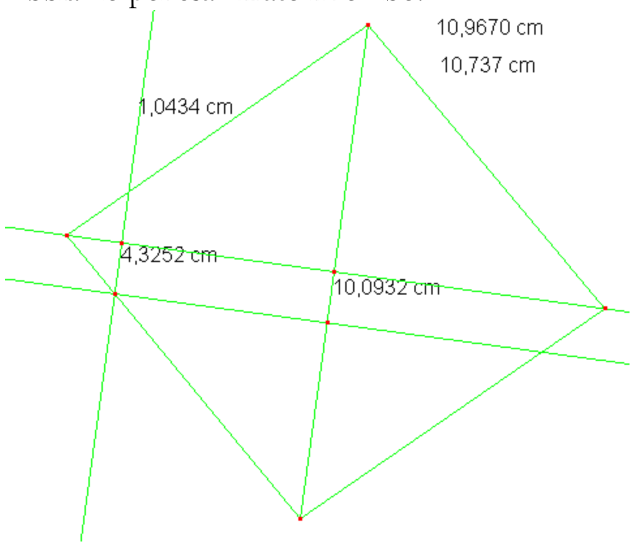


i triangoli DQP e DOA sono simili, così come APR e DOA.
Tenuto conto che il rettangolo ha le diagonali congruenti e che quindi i tre triangoli sono isosceli, ne abbiamo dedotto che il perimetro POQR = 2(PQ+PR)=2(DQ+OQ)=DB=AC

Abbiamo fatto la verifica sperimentale con Cabri. Riportiamo di seguito la figura.

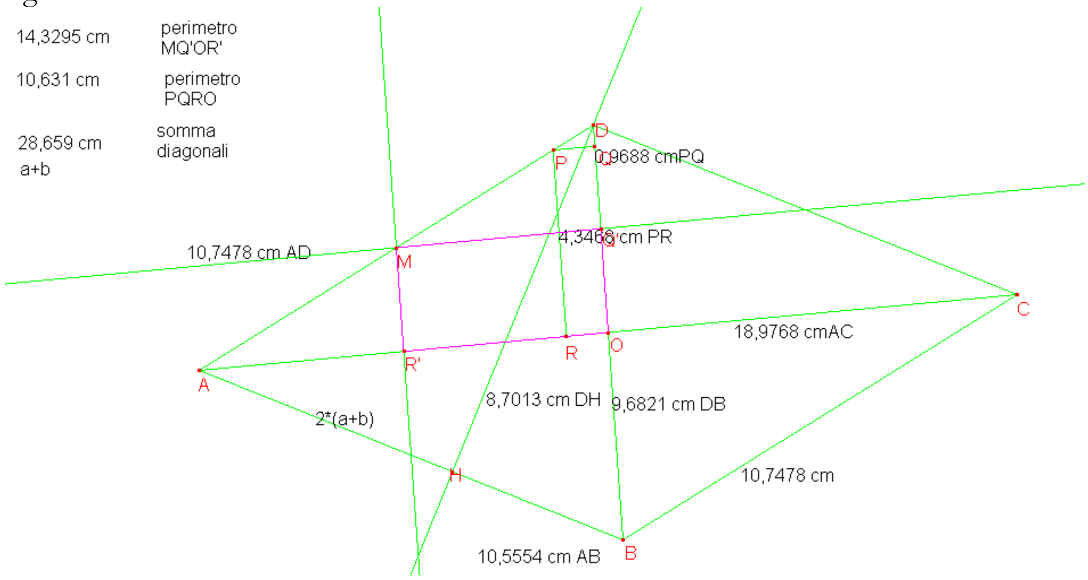


Abbiamo poi esaminato il rombo:



constatando che vale una proprietà analoga, ossia perimetro PQOR = semisomma diagonali soltanto se P è il punto medio di AD.

Ancora con Cabri abbiamo controllato tale proprietà su un generico parallelogramma. Presentiamo la figura finale:



[[…]]

Abbiamo fatto la dimostrazione sintetica:

se P è punto medio di AD, PQ è la metà di AO e PR è la metà di DO (per il teorema dei triangoli che afferma la congiungente i punti medi di due lati essere la metà del terzo lato).

Abbiamo concluso che:

in tutti i parallelogrammi, il perimetro PQOR è congruente alla semisomma delle diagonali se P è punto medio di AD; nel rettangolo e nel quadrato, questa proprietà vale per qualsiasi punto P scelto su AD.

Abbiamo fatto poi una dimostrazione analitica di questo fatto, usando Derive.

Siamo partiti da un caso numerico, poi abbiamo esteso al caso generale. Riportiamo quanto ottenuto con Derive.

#28: $\frac{\sqrt{65}}{2} + \frac{5}{2}$

perimetro PORQ

#29: $\sqrt{((-2 - 5)^2 + (-4)^2)}$

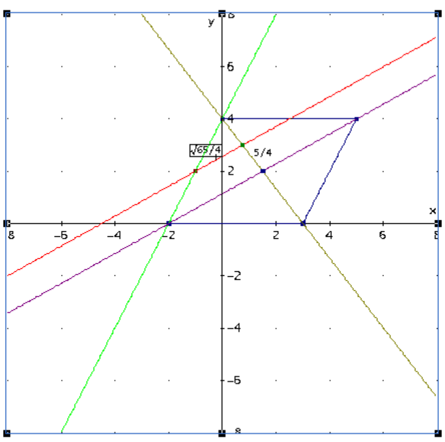
#30: $\sqrt{65}$

#31: $\sqrt{(9 + 16)}$

#32: 5

#33: $\frac{\sqrt{65} + 5}{2}$

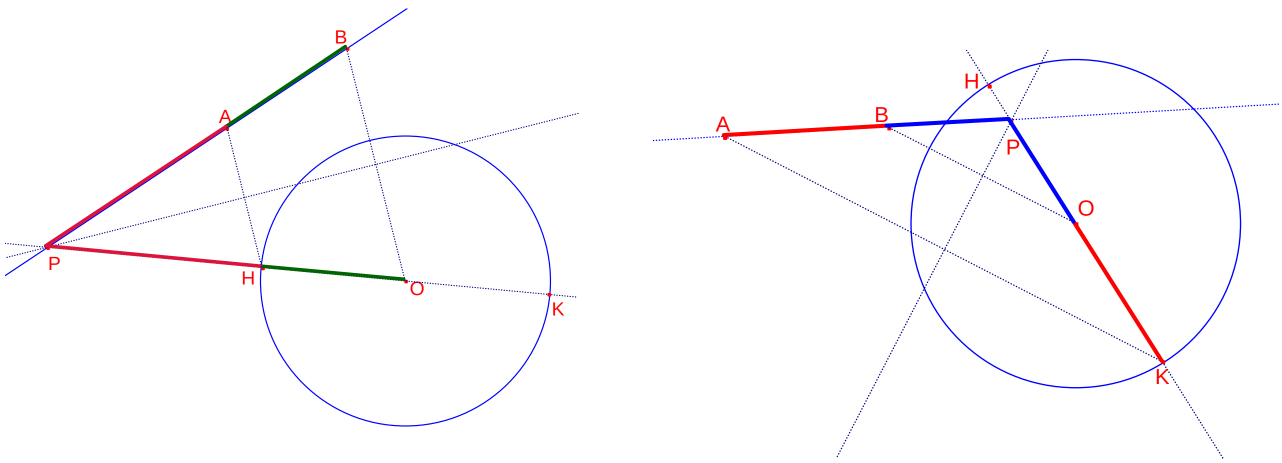
semisomma DB+AC



Dicembre 2005

Si propone il seguente problema così come è stato formulato in un eserciziario di geometria:
Data una circonferenza di centro O ed un segmento AB congruente al raggio sopra una retta qualunque, l'asse del segmento OB incontra la retta in un punto che è equidistante da A e dalla circonferenza.

1) Dare una definizione motivata di distanza di un punto da una circonferenza.
2) Dimostrare l'affermazione del problema e verificare se, secondo la definizione del punto 1), l'enunciato del problema è valido per ogni posizione della retta e del segmento su di essa.



Commento

Abbiamo ricevuto nove risposte provenienti da sette scuole:

- *ITCG "Ruffini", Imperia (IM)*
- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*
- *ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR) – due risposte*
- *SM "Brofferio", Asti (AT) – due risposte*
- *LS "Cremona", Milano (MI)*
- *LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa" S. Genesio (PV)*

Il problema proposto (*data una circonferenza di centro O ed un segmento AB congruente al raggio sopra una retta qualunque, l'asse del segmento OB incontra la retta in un punto che è equidistante da A e dalla circonferenza*) ha offerto l'occasione per far riflettere gli studenti sul concetto di distanza. Nel suo enunciato originale il problema presentava, secondo noi, un uso ambiguo del termine "equidistanza". Infatti, riferendoci alle figure allegate al testo, quando esiste la intersezione P fra la retta che contiene AB e l'asse di OB si presentano le due possibilità PA=PH oppure PA=PK, ma solo nel primo caso si può affermare che P è equidistante da A e dalla circonferenza.
Nelle risposte pervenute, una parte di studenti ha esaminato la validità dell'affermazione nel caso in cui l'estremo A e l'intersezione P siano dalla stessa parte rispetto l'estremo B, vedi la figura 1.
Alcuni hanno preso in esame l'altra possibilità concludendo che in tal caso l'affermazione del problema non è più vera, ma è comunque valida l'uguaglianza tra PA e la massima distanza di P dai punti della circonferenza, ossia PA=PK, vedi la figura 2.

Gli studenti della classe 3A dell'ITCG "Ruffini" hanno ampliato la loro ricerca giungendo ad una conclusione che commenteremo all'interno della loro risposta.
Riteniamo opportuno precisare inoltre che la definizione di distanza richiesta doveva essere operativa: ossia indicare come si ottiene il segmento PH giustificando la scelta del punto H come punto della circonferenza posto a minima distanza da P.

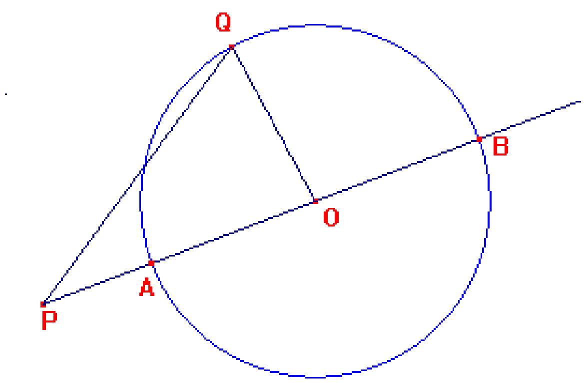
Presenteremo per intero le risposte che abbiamo ritenuto più complete e di altre le parti più significative.
NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

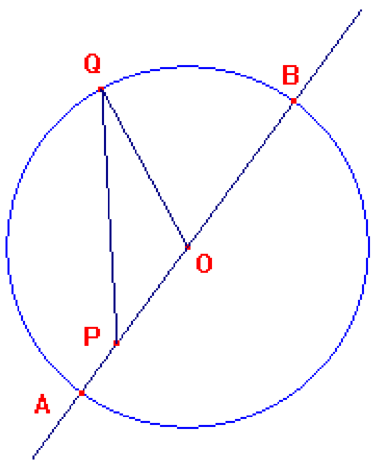
Classe 2D, LS "Aristosseno, Taranto (TA)

Presentiamo la risposta completa in cui abbiamo omesso alcune parti ritenute superflue.

1. La distanza di un punto P da una circonferenza è definita come il segmento di lunghezza minima fra tutti i segmenti che congiungono il punto P, che non appartiene alla circonferenza, con i punti della circonferenza.
Se P non appartiene alla circonferenza , esso può essere esterno oppure interno ad essa.

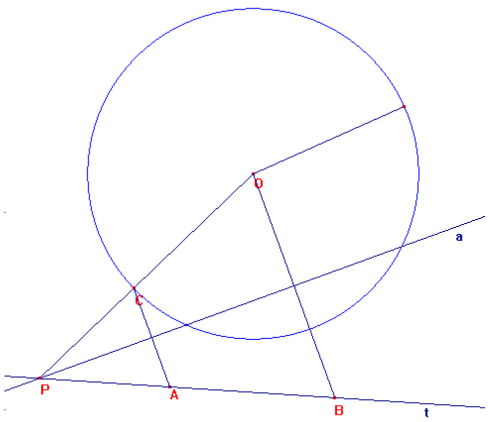


1° caso) P è esterno alla circonferenza
Congiungendo P con il centro della circonferenza e indicati con A e B i punti intersezione della semiretta PO con la circonferenza, occorre verificare che il segmento PA è minore di qualunque altro segmento che congiunge P con un altro punto (Q) della circonferenza.
Nel triangolo POQ si ha : PQ > PO – OQ (disuguaglianze triangolari) e poiché OQ = OA = r (raggio della circonferenza) risulta : PQ > PO – r = PA .
(E' immediato constatare che PA < PB) .



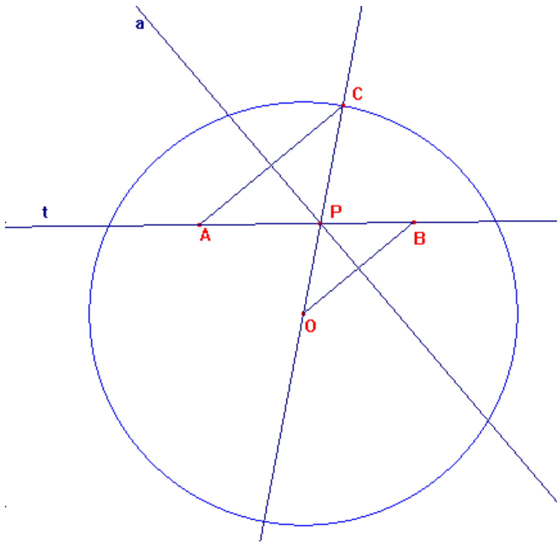
2° caso) P è interno alla circonferenza
Tracciato il diametro passante per P e detti A e B i suoi estremi il segmento PA è la distanza di P dalla circonferenza . Esso è minore di qualsiasi altro segmento che congiunge P con un punto (Q) della circonferenza .E' infatti PQ > PA perché nel triangolo POQ risulta PQ > OQ - OP e
OQ = OA = r (raggio della circonferenza) per cui PQ > r - OP = PA .
(Anche in questo caso è evidente che PA < PB) .
Se P coincide con il centro O della circonferenza la sua distanza dalla circonferenza è ovviamente uguale al raggio r di questa.

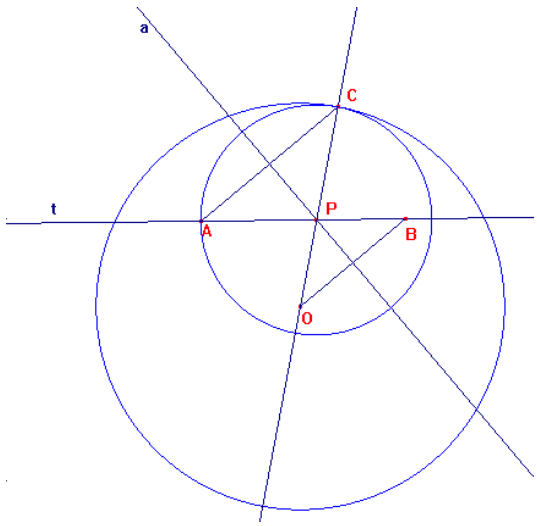
2.



Considerata la retta t e su di essa il segmento AB congruente al raggio r della circonferenza data , l'asse del segmento OB interseca la retta t nel punto P . Questo punto è equidistante da A e dalla circonferenza , ovvero è PA = PC perché l'asse a di OB è luogo dei punti equidistanti dagli estremi di OB e quindi PO = PB (il triangolo BPO è isoscele) e OC = AB = r per cui :
PC = PO – OC = PB – AB = PA (differenze di segmenti congruenti)
[[…]]

La proprietà è vera per tutte le posizioni della retta t eccetto quando la retta t è parallela all'asse a **[cioè quando OB è perpendicolare alla retta t]**, mentre il segmento AB può assumere tutte le posizioni per le quali PO = PB > r e PA < PB (cioè il punto P precede B nel verso secondo cui A precede B)
Sia la retta t secante la circonferenza **e** P interno alla circonferenza. Si ha anche in questo caso PA = PC perché PO = PB in quanto P appartiene all'asse di OB e perciò :
PA = AB – PB = OC – OP = PC (con AB = OC = r raggio della circonferenza) e quindi differenze di segmenti congruenti.
[[…]]
La retta t può assumere tutte le posizioni tranne quella per cui è **parallela** all'asse a **[OB perpendicolare alla retta t]**, il segmento AB tutte quelle per cui PO = PB < r (cioè il punto P è interno al segmento AB).



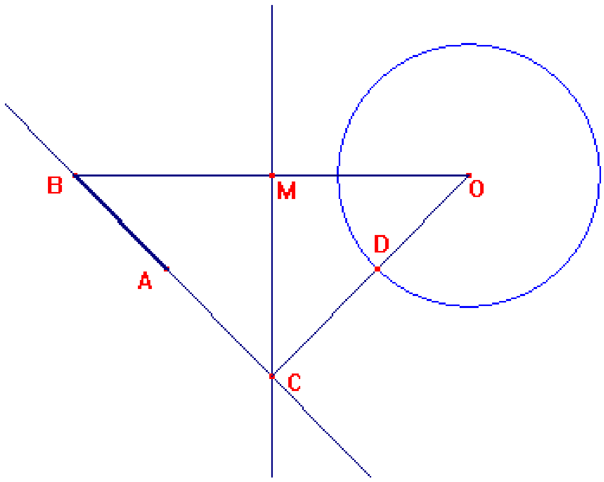


Alfonso Scarpino, 1G, LS “G.B. Scorza”, Cosenza (CS)

Di questa risposta presentiamo la seconda parte, in cui l’esposizione è concisa, ma esauriente.

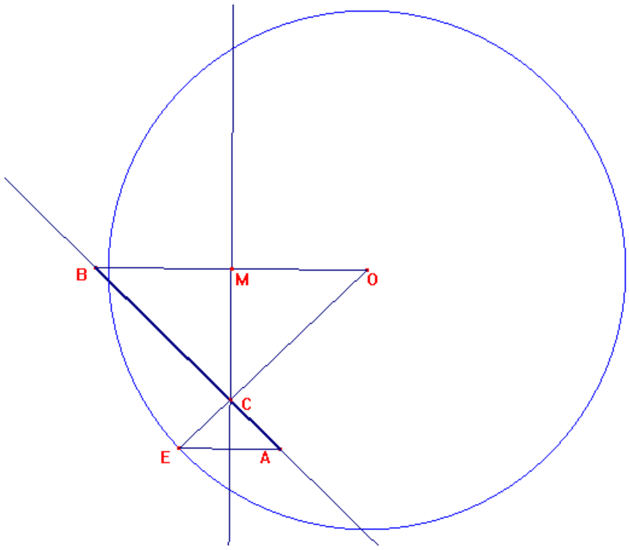
1. [[…]]

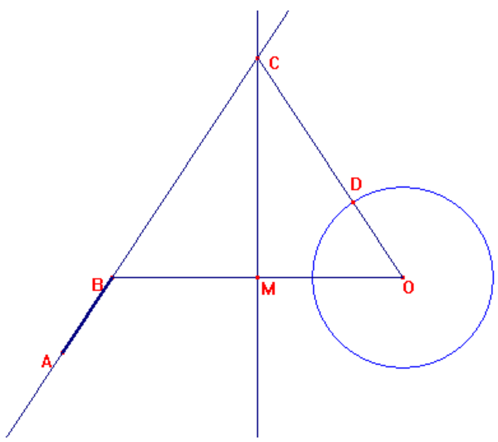
2.



Data una circonferenza di raggio qualsiasi, **tracciamo** un segmento AB, esterno ad essa e congruente al raggio, e poi tracciamo la retta per A e B. Tracciamo il segmento OB e poi il suo asse che intersecherà la retta AB nel punto C. Congiungiamo C con O e sia D l’intersezione di tale segmento con la circonferenza. Vogliamo dimostrare che AC è congruente a DC. Infatti BC è congruente ad OC, perché C appartiene all’asse del segmento OB e quindi è equidistante da B e da O. Inoltre AB è congruente ad OD per costruzione e quindi AC congruente a DC perché differenza di segmenti congruenti (BC e OC , AB e OD).

Nel caso in cui il punto A sia interno alla circonferenza, l’enunciato risulta ancora vero, ma CE è congruente a CA perché differenza dei segmenti rispettivamente congruenti AB e OE , BC e OC.





Tale enunciato non è sempre valido. Infatti non si verifica se l’angolo ABO è retto (e quindi la retta AB, **[perpendicolare al segmento OB, risulta parallela all’asse di OB]**) od ottuso (perché il segmento AB è il prolungamento del lato obliquo del triangolo isoscele OBC e quindi DC è minore del lato OC, congruente a BC, che, a sua volta, è minore di AC), come si vede in figura.

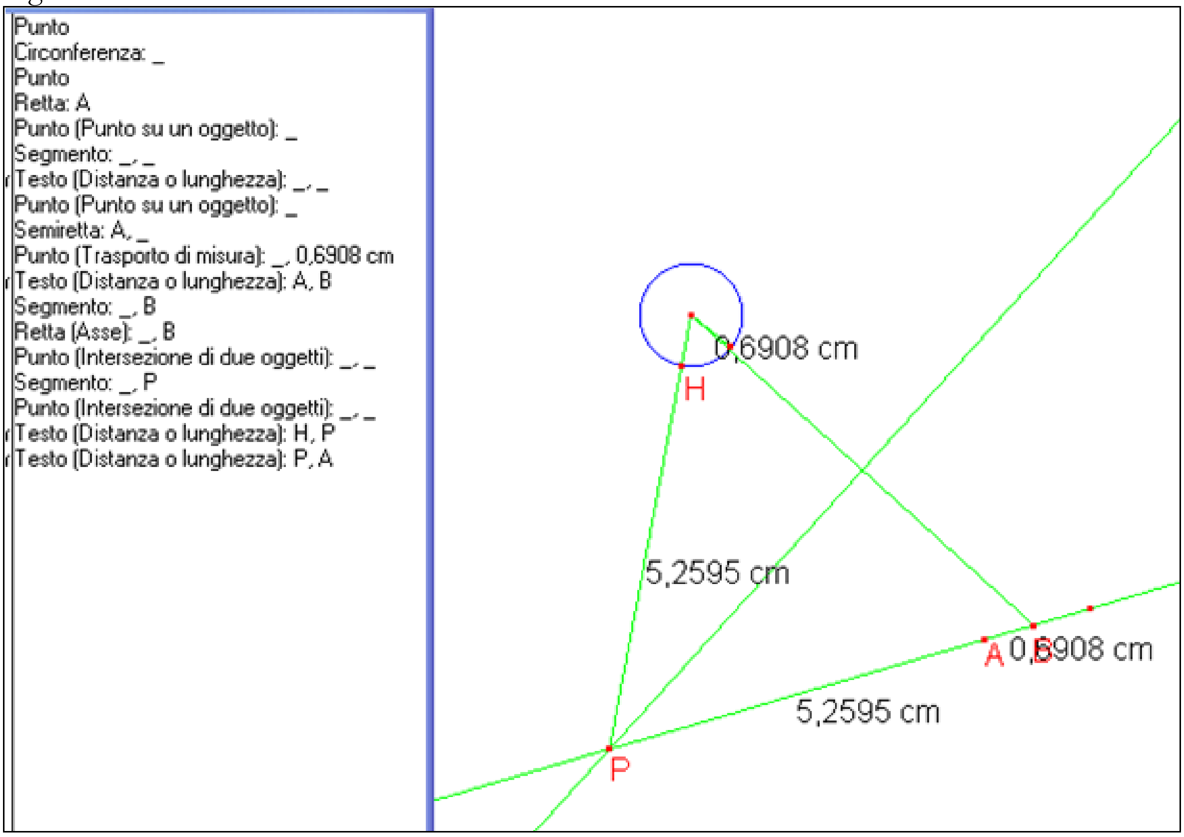
Classe 3A Programmatori, ITCG "Ruffini", Imperia (IM)

Presentiamo la seconda parte corredata da alcune nostre osservazioni.

Abbiamo affrontato il problema in classe ed in laboratorio con l'uso di Cabri.
Esponiamo la cronaca del lavoro svolto ed infine la conclusione a cui siamo pervenuti.

Prima parte [[…]]

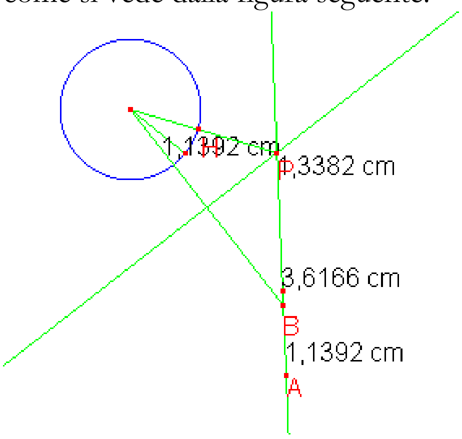
Seconda parte
1) Abbiamo considerato la retta r esterna alla circonferenza
Abbiamo costruito la figura richiesta, utilizzando il trasporto di misura, così come si vede dalla figura seguente :



Spostando il puntatore ed effettuando verifiche sperimentali, ci siamo accorti che in due diverse situazioni la proprietà non era valida:

1. quando l'allineamento PAB si modifica in PBA
2. quando il punto P non esiste perché l'asse di OB è parallelo alla retta r,

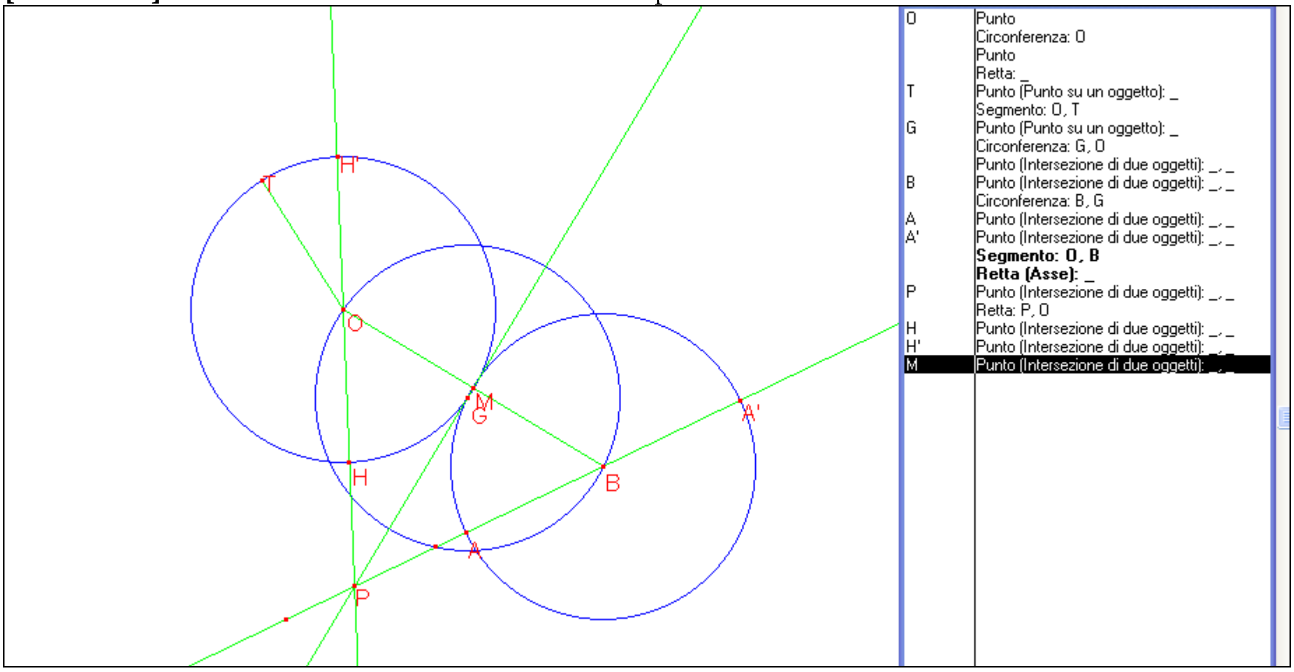
come si vede dalla figura seguente:



Abbiamo proseguito in classe, cercando una dimostrazione generale.
Qualcuno di noi ha pensato di costruire il segmento AB in questo modo:
Data la circonferenza *C* e la retta r ad essa esterna, si prenda un raggio OT; si consideri una circonferenza con centro G su *C* e raggio OT; si chiami B il punto di intersezione di questa circonferenza con r; poi si tracci una circonferenza di centro B e raggio BG; sia A una delle due intersezioni con la retta r **[questa costruzione non ha carattere generale, vale solo quando la circonferenza di centro G incontra la retta r]**; si tracci l'asse del segmento OB ottenendo P e poi la distanza

PH. Si osserva che A ed H sono corrispondenti in una simmetria di asse PM, mentre P è punto unito nella stessa simmetria. E' dimostrato così che PH = PA **[conclusione affrettata].**

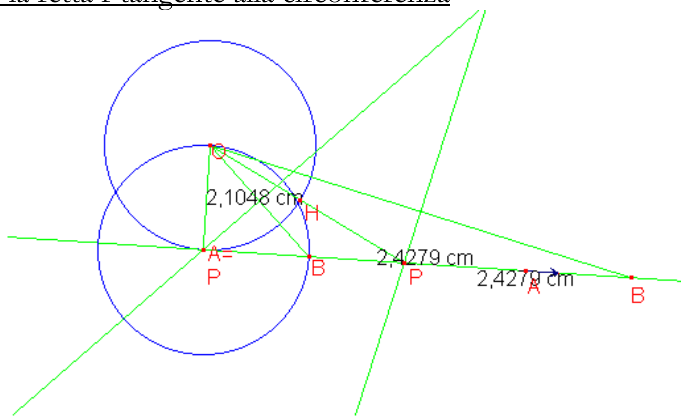
Ancora in laboratorio abbiamo infine fatto la costruzione, osservando che la proprietà vale ancora se **[anziché la]** distanza tra P e *C* si considera PH' e si prende A' in modo che l'allineamento sia PBA' :

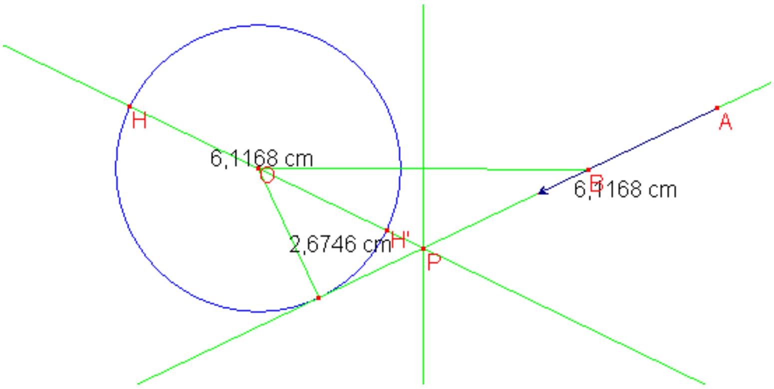


[[…]]

In conclusione:
dati una circonferenza *C* di centro O ed un suo punto esterno P, se PH è la distanza di P da *C* con H punto di intersezione tra *C* e il segmento PO, si può dimostrare che PH =PA con A e H corrispondenti nella simmetria assiale di asse OB.
Questa proprietà non vale se l'asse di OB è parallelo ad r .

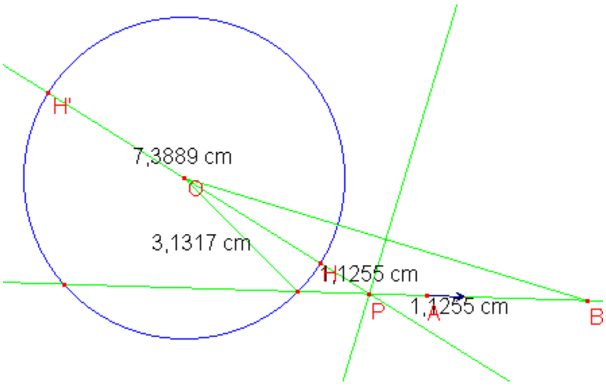
2) Abbiamo considerato la retta r tangente alla circonferenza

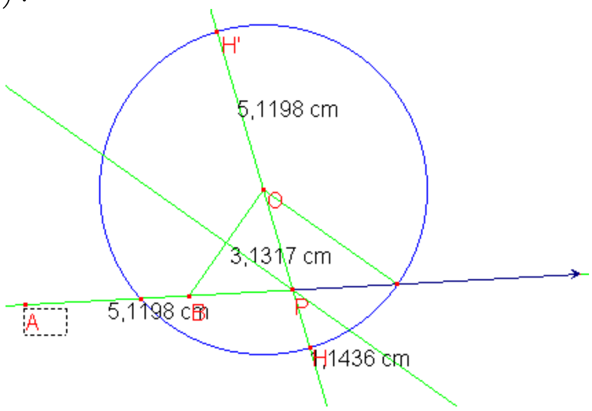




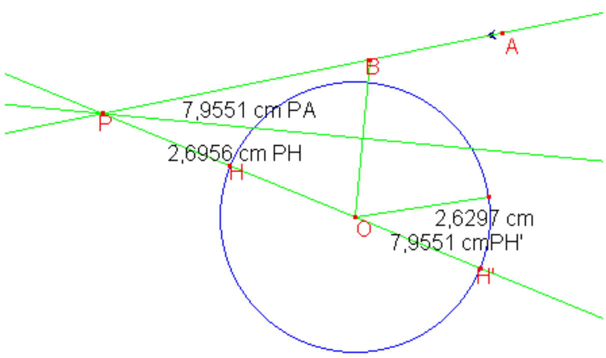
Siamo pervenuti alle stesse conclusioni del punto precedente, con il caso particolare di P=A punto di tangenza, in cui PH=PA=0 :

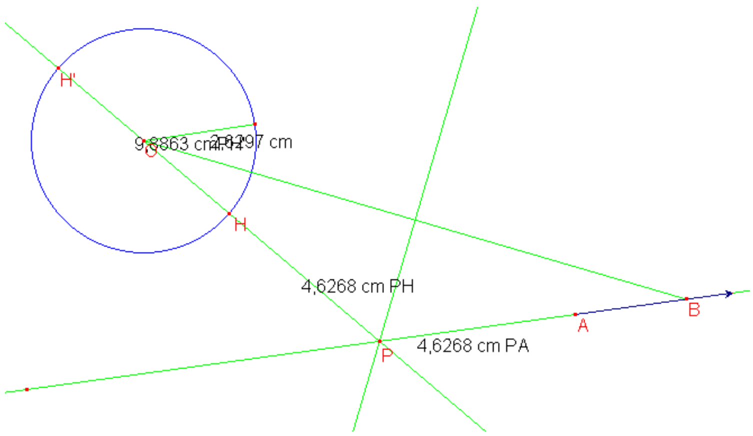
2) <u>Abbiamo considerato la retta r secante la circonferenza</u>
Siamo pervenuti alle stesse conclusioni del punto 1) :





Conclusione
Sia data una circonferenza *C* di centro O ed una retta ad essa esterna o tangente o secante.
- riportiamo su r un segmento AB congruente con il raggio di *C*
- uniamo B con O e tracciamo l'asse di OB
- indichiamo con P il punto di intersezione tra r e tale asse
- [[...]] [siano H e H', con PH<PH', le intersezioni della retta PO con *C*]
si presentano due situazioni fondamentali:
- B compreso tra A e P
oppure
- A compreso tra B e P
Nel primo caso si ha:
PA=PB+BA=PO+OH'=PH', tenuto conto che l'asse del segmento OB è luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi e che AB=OH'=raggio di *C* per costruzione.
Nel secondo caso si ha
PA=PB-AB=PO-OH=PH,
come illustrato dalle figure seguenti.





La proprietà non vale quando P non esiste ovvero quando l’asse di OB è parallelo ad r, ossia OB perpendicolare ad r.
Così facendo però non si può identificare la distanza fra P e *C* con PH, perché PH non sarebbe unica e avremmo una contraddizione con la definizione : **[[…]]**
[Abbiamo omesso la definizione qui riportata perché contiene un errore, probabilmente di trascrizione; inoltre è citato l’autore, ma non il testo da cui è tratta]
Abbiamo cercato ancora e la prof. ci ha indicato il libro “Che cos’è la matematica?” di Courant Robbins”
A pag. 497, il testo parla di <u>distanza minima e di distanza massima</u> di P da *C*, come due segmenti perpendicolari a due tangenti della curva.
Abbiamo capito che, se la curva è una circonferenza, tali distanze minima e massima sono proprio i segmenti che abbiamo indicato nella precedente spiegazione, infatti un diametro è sempre perpendicolare alle tangenti nei suoi estremi!
[Le distanze di cui parla il testo citato non sono le definizioni di due distinte distanze di un punto da una curva, ma i valori minimo e massimo, se esistono, assunti dalla funzione “distanza di un punto assegnato da un generico punto di una curva”]

Elda Bistika, 3S, SM “C.A. Dalla Chiesa”, S. Genesio (PV)

Si presenta l’intera risposta anche se non completamente esauriente, poiché proviene da una scuola media inferiore.

1. La distanza di un punto P da una retta è il segmento di perpendicolare condotto dal punto alla retta.

Si definisce distanza di un punto P da una circonferenza **[P esterno]** il segmento differenza tra il segmento PO (dove O è il centro della circonferenza) e il raggio OC della circonferenza dove C indica l’intersezione del segmento OP con la circonferenza.
Questo segmento PC è la distanza perché mandando la tangente alla circonferenza in C, tale tangente risulta perpendicolare al raggio OC e quindi anche al segmento differenza PC essendo O, C, P allineati.

2. Nel caso della figura 1 l'affermazione del problema è vera perché il punto P si trova sull'asse del segmento OB che per definizione è il luogo dei punti aventi uguale distanza dagli estremi del segmento, per cui PO = PB. Di conseguenza PC = PA per differenza di segmenti uguali: PC = PO – OC e PA = PB – AB essendo OC = AB = r.

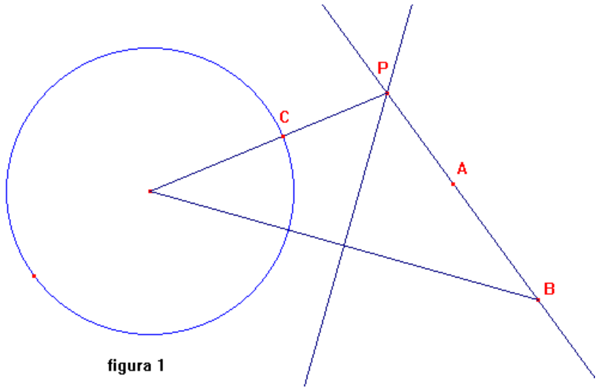


figura 1

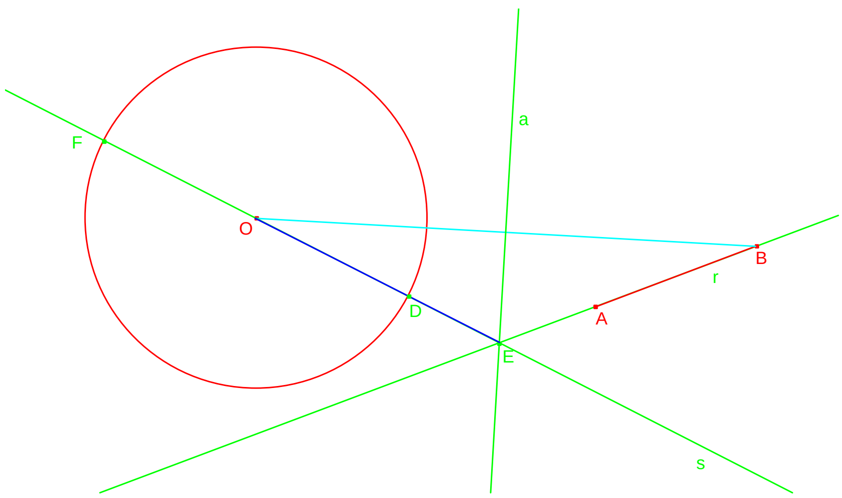
3. Si verifica l'enunciato anche nel caso in cui la retta **interseca la** circonferenza e il segmento AB è interno ad essa oppure secante, se, nel caso di un punto P interno alla circonferenza, si definisce "distanza di un punto P dalla circonferenza"il segmento CP differenza tra il raggio OC e il segmento PO che unisce il punto P al centro O della circonferenza. Infatti PA e PC risultano uguali per differenza di segmenti uguali. Anche se la retta è tangente il punto P sarà sempre **[può essere]** equidistante dalla circonferenza e dal punto A.

4. L'affermazione del problema non è però vera per qualsiasi retta o segmento AB uguale al raggio OC.
   L'affermazione non è vera nei casi in cui il punto B è compreso tra l'estremo A del segmento e il punto P d'intersezione dell'asse di OB con la retta. del segmento **[e inoltre quando OB è perpendicolare alla retta AB].**

Di Giambrone Vincenzo, Rainero Luca, Zandrino Enrico
Classe 3F, SM "Brofferio", Asti (AT)

La prima parte, in cui si propone una definizione della distanza valida per ogni posizione del punto rispetto alla circonferenza.

1. Definizione: la distanza di un punto (E) da una circonferenza è quel segmento (ED) posto sulla retta (s), passante per il centro (O) della circonferenza e per il punto dato, che unisce quest'ultimo all'intersezione più vicina (D) della retta con la circonferenza.



Motivazione: ciò è vero perché la retta è perpendicolare alla tangente perciò il segmento sovracitato è la minore lunghezza tra il punto e la circonferenza.

2. [[…]]

Gennaio 2006

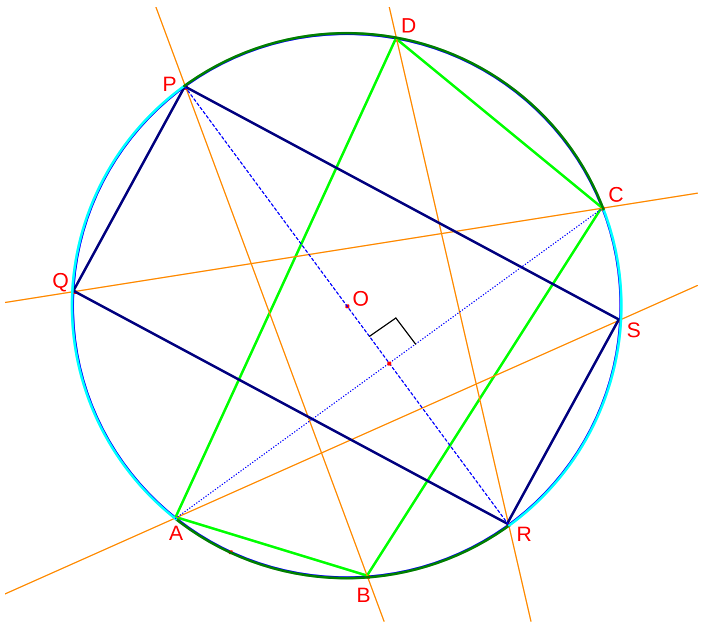
Sia ABCD un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza. Le bisettrici degli angoli interni A, B, C, D incontrano la circonferenza rispettivamente in S, P, Q, R.

1) Di che natura è il quadrilatero SPQR?

2) Quale relazione intercorre fra le diagonali dei due quadrilateri?

3) Indicare una o più ipotesi su ABCD affinché SPQR sia un quadrato.

Motivare le risposte.



Arco AR = arco RC
Arco CP = arco PA

Quindi
Arco AR + arco PA = ½ crf.
PR asse di AC

Commento

Sono giunte cinque risposte dalle seguenti scuole:
SM "Paisiello", IC "Buscaglia", Cinisello Balsamo (MI)

- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*
- *ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR)*
- *ITCG "Ruffini" Imperia (IM)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)*

Diamo il benvenuto nel mondo di FLATlandia all'alunna della SM "Paisiello", che, pur frequentando la seconda classe, si è cimentata con il problema di questo mese.

Abbiamo proposto ancora un problema sulla circonferenza, articolato in tre parti e avente come soggetto un qualunque quadrilatero inscritto.
Nella prima parte si doveva scoprire che le bisettrici dei suoi angoli interni incontrano la circonferenza in quattro punti, vertici di un rettangolo.
In tutte le risposte questa parte è stata risolta e motivata, con percorsi talvolta complessi o imprecisi nella esposizione.
Nella seconda si chiedeva di trovare il legame fra le diagonali dei due quadrilateri facilitando così la risposta al terzo quesito: quando quel rettangolo diventa un quadrato?

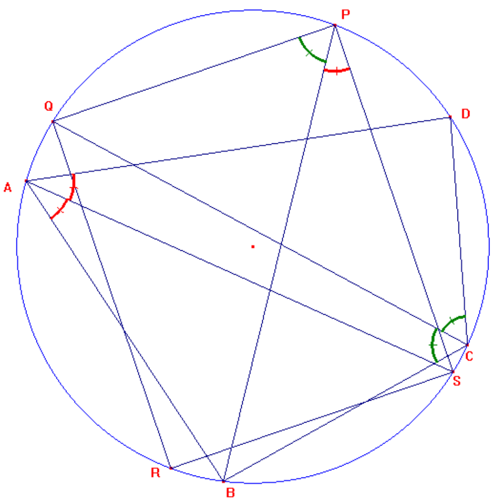
Non abbiamo chiesto esplicitamente di dimostrare che ogni diagonale del quadrilatero dato è perpendicolare ad una diagonale del rettangolo (e ne è anche l'asse), confidando nell'aiuto del software Cabri che quasi tutti i partecipanti usano. In proposito così scrivono le alunne della SM di San Genesio " Abbiamo verificato con Cabri che la relazione che intercorre tra le diagonali dei due quadrilateri è di perpendicolarità …". Non hanno giustificato tale scoperta, ma a loro lo perdoniamo.
Abbiamo convenuto di presentare tre delle risposte ricevute, essendo le altre maggiormente incomplete nella risoluzione e/o nelle motivazioni.
NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Classe 2D, LS "Aristosseno", Taranto (TA)

E' la sola risposta in cui si dimostra che le diagonali del quadrilatero dato sono anche gli assi di quelle del rettangolo.

1) Se il quadrilatero convesso ABCD non è un quadrilatero particolare, il quadrilatero SPQR è un rettangolo.



Essendo infatti ABCD inscritto nella circonferenza, in esso gli angoli opposti sono supplementari:

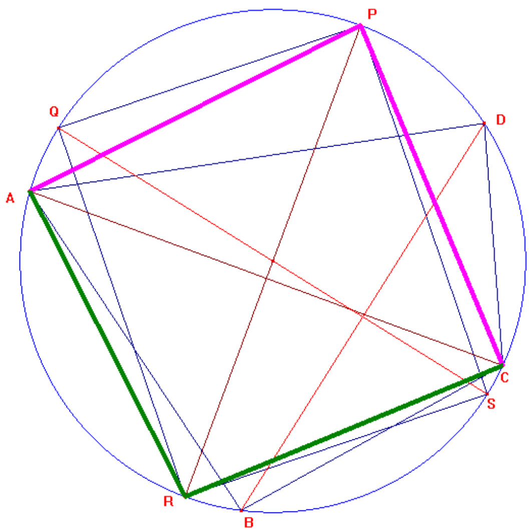
$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$
(essendo $BAD = \alpha, ABC = \beta, BCA = \gamma, CDA = \delta$) .
Poiché la bisettrice di un angolo alla circonferenza divide l'arco su cui insiste in due archi congruenti , si hanno le seguenti uguaglianze fra gli archi : $DS \cong SB$ (AS è bisettrice di BAD)e $QD \cong BQ$ (CQ è bisettrice di BCD)
Gli angoli alla circonferenza che corrispondono a tali archi sono congruenti :

$BPS \cong BAS \cong \dfrac{\alpha}{2}$ (insistono entrambi sull'arco BS)

$BPQ \cong BCQ \cong \dfrac{\gamma}{2}$ (insistono entrambi sull'arco BQ)

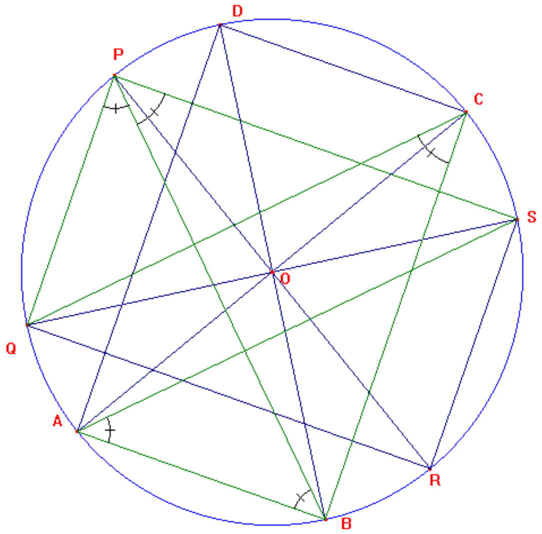
ed essendo $\alpha + \gamma = 180°$, è $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = 90°$ ovvero $BPS + BPQ = 90°$
Quindi l' angolo QPS è retto ,il triangolo rettangolo QPS è inscritto nella semicirconferenza
(la sua ipotenusa QS diagonale del quadrilatero SPQR è diametro della circonferenza) .
Ma il quadrilatero SPQR è inscritto nella circonferenza , perciò : PQR = 180°- QPS = 90°. Analoghe considerazioni ci portano a riconoscere che sono retti anche gli altri due angoli del quadrilatero SPQR ; esso è quindi un rettangolo.

2) Le diagonali del rettangolo SPQR sono gli assi della diagonali del quadrilatero ABCD.
Più precisamente, QS è asse di BD e PR è asse di AC .
Congiungendo infatti P ed R con A e con C e analizzando il quadrilatero APCR così ottenuto (deltoide) notiamo che , essendo BP la bisettrice dell'angolo ABC , essa divide l'arco AC in due archi AP e PC congruenti. Archi congruenti sottendono corde congruenti e allora risulta : $PA \cong PC$, cioè P è equidistante da A e da C . Da parte opposta ad AC , similmente , essendo DR bisettrice dell'angolo ADC , gli archi AR ed RC sono congruenti e lo sono anche le corde AR ed RC .



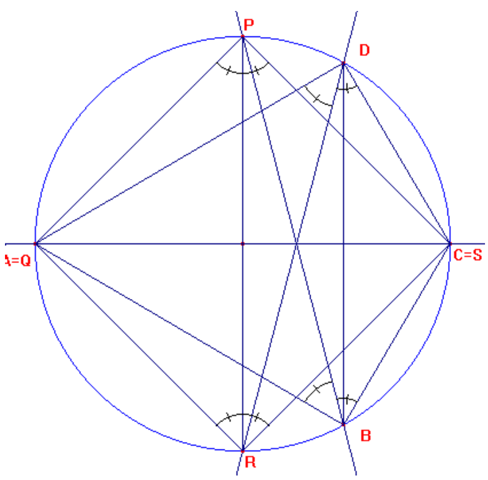
Anche il punto R è equidistante da A e da C .
Il luogo dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento è l'asse di quel segmento : perciò PR è asse di AC . Procedendo in modo analogo si trova che anche l'altra diagonale SQ del quadrilatero SPQR è asse della diagonale BD del quadrilatero ABCD.

Caso particolare: Se il quadrilatero ABCD è un rettangolo , risulta : $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$.
Le considerazioni sulle figure sono analoghe alle precedenti ma ora accade che : $BPS \cong BAS \cong \frac{\alpha}{2} = 45°$ (insistono sull'arco BS) e $BPQ \cong BCQ \cong \frac{\gamma}{2} = 45°$ (insistono sull'arco BQ) e quindi l'angolo QPS è retto e PB è la sua bisettrice.



Questo vale per gli altri angoli e perciò le diagonali del quadrilatero ABCD sono congruenti a quelle di SPQR (esse sono diametri) , sono reciprocamente assi le une delle altre e si incontrano tutte nel loro punto medio O , centro della circonferenza.
Inoltre i lati dei due rettangoli ABCD ed SPQR sono ora paralleli a due a due , essendo gli angoli congruenti BPS e ABP alterni interni delle rette di AB e PS tagliate dalla retta di BP .

3) Se ABCD è un deltoide , formato da due triangoli rettangoli congruenti che hanno l'ipotenusa AC (diagonale di ABCD) in comune , il quadrilatero SPQR (che ora è CPAR) è un quadrato.



Infatti , AC è una bisettrice di ABCD e coincide con la diagonale QS mentre le altre bisettrici, dimezzando angoli retti ,dividono ciascuna delle due semicirconferenze in due archi congruenti .
In questo caso le diagonali AC e QS coincidono (PR è asse di AC e QS = AC è asse di BD) e BD e PR sono parallele fra loro (entrambi perpendicolari ad AC).

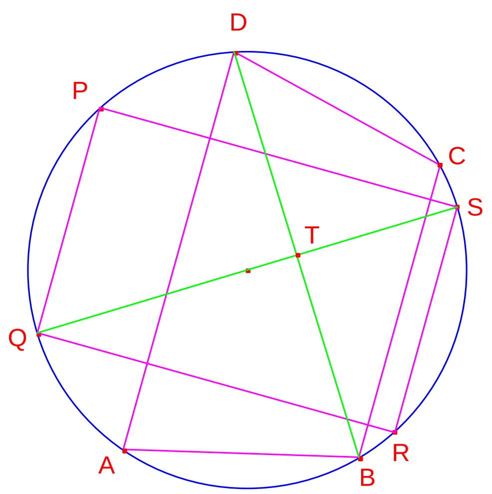
Se ABCD è un quadrato , il quadrilatero SPQR è anch'esso un quadrato .
In tal caso infatti i due quadrilateri coincidono (le bisettrici degli angoli di ABCD sono diametri perpendicolari fra loro e l'una è asse dell'altra).
(nelle ultime due figure il simbolo "=" sta per "coincide")

Classe 2B, ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR)

In questa risposta, in cui manca la figura che illustra il punto 1), si fornisce l'esposizione più completa del terzo quesito.

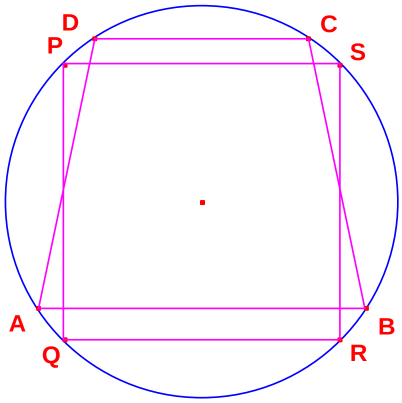
1. Il quadrilatero SPQR ottenuto dalle bisettrici degli angoli interni del quadrilatero convesso ABCD,è un rettangolo.
   Infatti, l'angolo PQC è congruente a PBC perché insistono sulla corda PC.
   L'angolo PBC è congruente a PBA perché PB è bisettrice.
   L'angolo CQR è congruente a CDR perché insistono sulla corda CR.
   L'angolo CDR è congruente a RDA perché DR è bisettrice.
   Pertanto l'angolo CQR sommato a CQP è congruente alla somma dell'angolo CDR e PBC i quali sono rispettivamente congruenti a metà di CDA e a metà di ABC. Essendo CDA e ABC angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, la loro somma è un angolo piatto e quindi la somma di CQR con CQP è la metà di un angolo piatto e quindi il quadrilatero SPQR è un rettangolo.

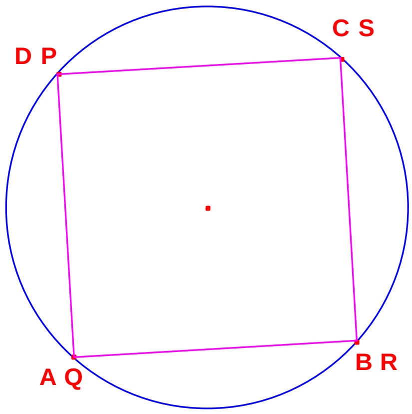
2. Le diagonali DB e QS sono perpendicolari e analogamente AC e PR.

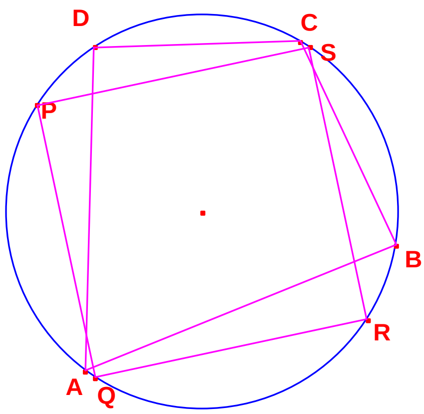
   

   Infatti gli angoli DCQ e QCB sono congruenti perché il punto Q appartiene alla bisettrice dell'angolo DCB per costruzione, quindi, poiché ad angoli congruenti corrispondono corde congruenti, QD è uguale a QB. Di conseguenza gli angoli QDT e DST che sono angoli alla circonferenza che insistono sulle corde QB e QD congruenti, sono congruenti. QSD è un triangolo rettangolo perché QS è diametro quindi DQT è complementare di DSQ che è congruente a QDT. Quindi se DQT è complementare di QDT, poichè la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, risulta che DTQ è un angolo retto e DB è pertanto perpendicolare a QS.
   Analogamente la proprietà è valida per le altre diagonali AC e PR.

3. Se ABCD è un quadrilatero con diagonali perpendicolari (AC perpendicolare a BD) allora SPQR risulta essere un quadrato. In particolare questo caso si verifica se ABCD è un trapezio isoscele con diagonali perpendicolari, se è un quadrato o se è un deltoide.
   Per dimostrare tale affermazione supponiamo che ABCD sia un quadrilatero con le diagonali perpendicolari, cioè BD perpendicolare a CA .
   Per quanto visto alla risposta numero 2, BD è perpendicolare a QS e CA perpendicolare a QR.
   Pertanto supponendo che AC sia perpendicolare ad BD e applicando la proprietà transitiva risulta:
   QS perpendicolare BD
   BD perpendicolare AC
   AC perpendicolare PR
   Quindi QS perpendicolare PR e quindi il rettangolo SPQR è un quadrato.



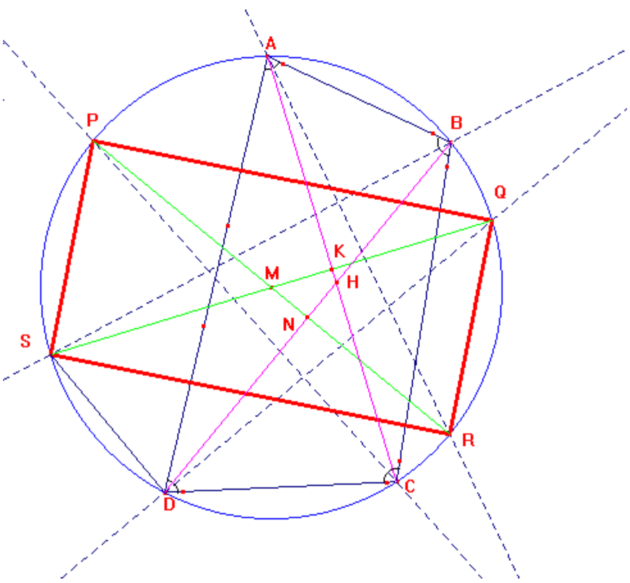




Elda Bistika e Giulia Brambati
Classe 3S, SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio (PV)

Presentiamo tutta la risposta, anche se carente nella seconda parte.

1) Gli angoli DAB + DCB=180° e anche ABC + ADC=180° sono supplementari perchè angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza e sono uguali gli angoli DAR=RAB , ABS=SBC , BCP=PCD, CDQ=QDA per costruzione (poiché AR , BS, CP e DQ sono bisettrici): da questo si deduce che PCD + DAR =90° così come SBC + CDQ=90° perché angoli formati dalle bisettrici di angoli supplementari.



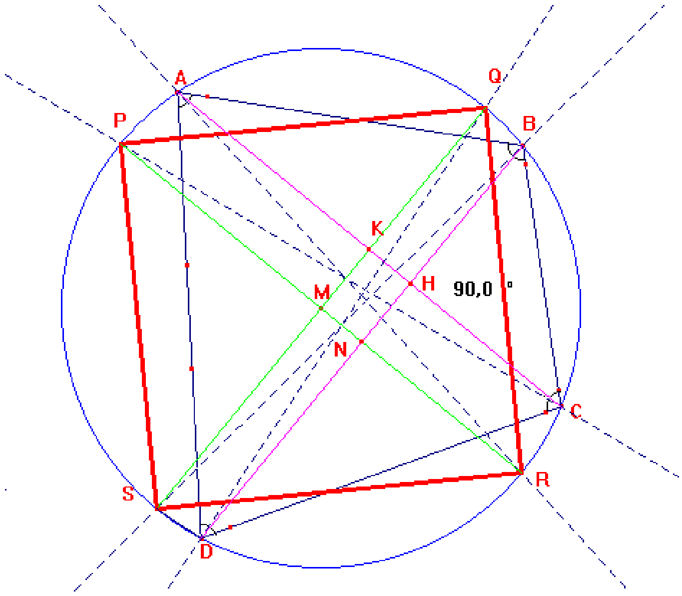
Nella figura ci sono molte coppie di angoli di uguale ampiezza tra cui:

SPC=SBC perché insistono sullo stesso arco SC
CPQ=CDQ perché insistono sullo stesso arco CQ
PQD=PCD perché insistono sullo stesso arco PD
DQR=DARperché insistono sullo stesso arco DR

Dai dati sopra ricavati possiamo dire che l'angolo:

SPQ= SPC + CPQ = SBC + CDQ= 90° ; quindi il triangolo SPQ è un triangolo rettangolo ed è inscritto in una semicirconferenza e quindi SQ è un diametro.

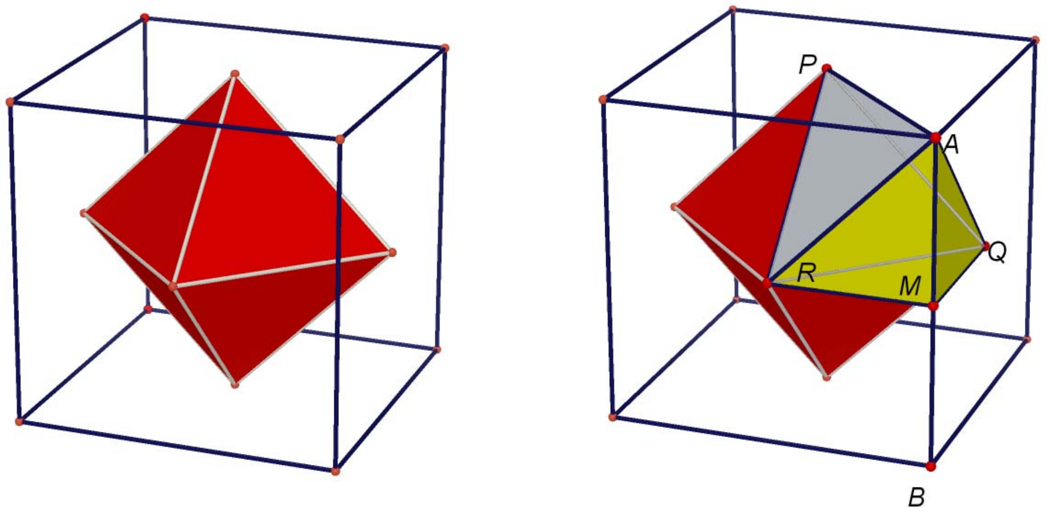
Consideriamo ora l'angolo:
PQR = PQD + DQR = PCD + DAR = 90°; il triangolo PQR è dunque rettangolo e PR è quindi diametro della circonferenza.
Pertanto il quadrilatero PQRS avendo per diagonali due diametri della stessa circonferenza, cioè due segmenti di uguale lunghezza che si incontrano nei rispettivi punti medi, è sicuramente un rettangolo.
2) Abbiamo verificato con Cabrì che la relazione che intercorre tra le diagonali dei due quadrilateri è di perpendicolarità: BD è perpendicolare a PR ed AC è perpendicolare a SQ



3) Chiamiamo M, K, H, N i punti d'intersezione rispettivamente dei segmenti PR e SQ, dei segmenti AC e SQ , dei segmenti DB e AC, dei segmenti BD e PR.
Ipotizziamo che il quadrilatero ABCD abbia le diagonali perpendicolari allora il quadrilatero SPQR risulta essere un quadrato perché:
KHN=90° per ipotesi
MKH=90° perché al punto 2 abbiamo detto che AC è perpendicolare a SQ
MNH=90° perché sempre al punto 2 abbiamo detto che BD è perpendicolare a PR
Consideriamo il quadrilatero MKHN, se sommiamo gli angoli interni finora trovati otteniamo 270°, di conseguenza KMN=360°-270°=90°. Quindi le diagonali di SPQR sono perpendicolari e uguali perché diametri e quindi il quadrilatero SPQR è un quadrato.

Febbraio 2006

Congiungendo i centri delle facce (con uno spigolo in comune) di un cubo si ottengono gli spigoli di un poliedro.
1) Di quale poliedro si tratta? E' regolare?
2) Determinare il rapporto fra il suo volume e quello del cubo.



Nella figura a destra viene illustrata la scomposizione del cubo descritta da Elda Bistika (SM "C.A.Dalla Chiesa", San Genesio PV): APRQ tetraedro regolare; MARQ piramide in cui tre facce sono triangoli rettangoli.

Commento

Abbiamo ricevuto cinque risposte e, contrariamente a quanto ci aspettavamo, sono più numerose quelle che provengono da scuole secondarie superiori.

- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio (PV)*
- *LS "G.B. Scorza" Cosenza (CS)*
- *ITCG "Ruffini" Imperia (IM)*
- *ITI "G. Giorgi" Brindisi (BR)*

Il problema proposto era apparentemente facile: individuare il poliedro ottenuto considerando in modo opportuno come suoi vertici i centri delle facce di un cubo e dimostrare che si tratta di un ottaedro regolare; si chiedeva poi di calcolare un rapporto fra volumi.

Come talvolta accade quando la figura presenta evidenti proprietà, queste vengono assunte per vere senza o con scarse motivazioni. Non si chiede la pignoleria, ma almeno un breve accenno che giustifichi le affermazioni fatte.
E' noto che l'ottaedro formato da otto triangoli equilateri è regolare, ma ricordiamo agli studenti che **un poliedro è regolare se le sue facce sono poligoni regolari tutti congruenti e se i suoi angoloidi sono tutti congruenti fra loro**.

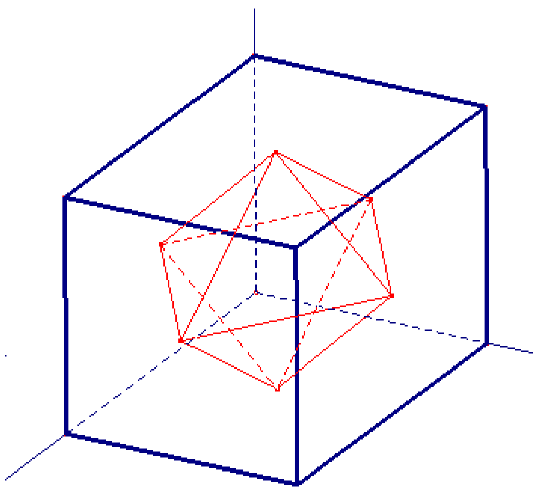
La seconda parte della definizione è stata disattesa, tranne che in una risposta. Poiché esistono criteri di congruenza per gli angoloidi triedri, bastava dividere quelli dell'ottaedro in due triedri per giungere alla conclusione.
Tutti hanno risolto correttamente il calcolo del rapporto richiesto.
Apprezzabili sono le abilità informatiche dimostrate dagli studenti degli istituti tecnici.
NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Giovanni Chiloiro
Classe 2D, LS "Aristosseno", Taranto(TA)

Risposta corretta e ben motivata nelle parti svolte; manca la parte riguardante gli angoloidi

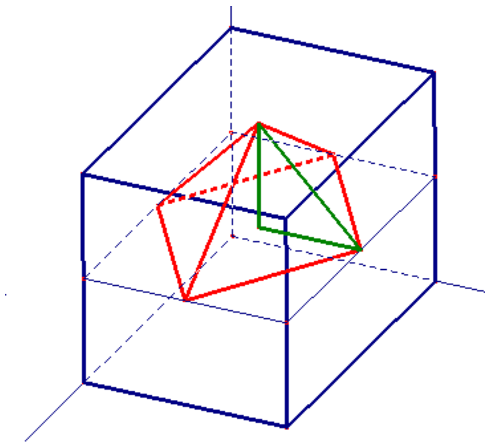
1) Costruito il cubo di spigolo generico l, individuiamo i centri delle sue facce (sono i punti medi delle diagonali) e li congiungiamo.



Il solido ottenuto è un ottaedro regolare , formato da due piramidi a base quadrata appaiate per la base.

Infatti , considerato il piano mediano orizzontale che divide il cubo in due parallelepipedi di altezza $l/2$, in ciascuno di questi parallelepipedi si individua la piramide che ha per base un quadrato (fig.1 e fig. 2).
Il lato di questo quadrato è ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele di lato $l/2$ (fig. 3), calcolabile col teorema di Pitagora :

$$l' = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$



Sezione del cubo e del poliedro mediante un piano mediano orizzontale

Se poi consideriamo l'altro piano mediano verticale, perpendicolare al precedente , possiamo determinare la misura degli spigoli laterali di una delle piramidi che formano il poliedro, applicando ancora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele i cui cateti misurano $l/2$:

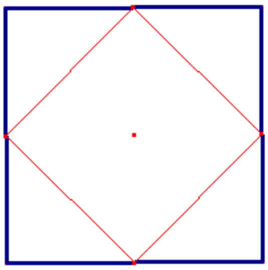
$$s = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} = l'$$

Da questo deduciamo che essendo gli spigoli laterali uguali a quelli di base , le facce del poliedro sono otto triangoli equilateri (di lato l')e che quindi esso è un ottaedro regolare.

2) Per il calcolo del rapporto fra i volumi del poliedro e del cubo , calcoliamo il volume dell'ottaedro come il doppio del volume della piramide che ha per base il quadrato di lato

$l' = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ e per altezza $l/2$:

$$V(ottaedro) = 2V(piramide) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (l')^2 \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{6} l^3$$



Si può anche osservare che il quadrato base della piramide ha come area la metà dell'area del quadrato base del cubo

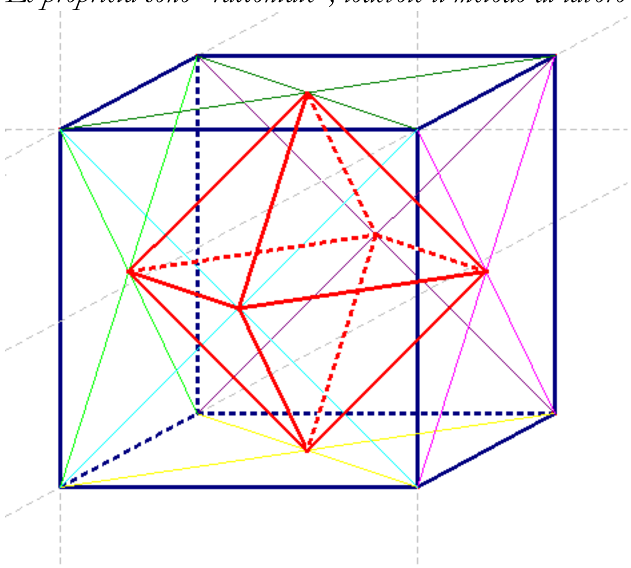
Szioni piane orizzontale e verticale

Essendo il volume del cubo V(cubo) $= l^3$, il rapporto tra i volumi dei due solidi è dato da :

$$\frac{V(ottaedro)}{V(cubo)} = \frac{\frac{1}{6} l^3}{l^3} = \frac{1}{6} \; .$$

Elda Bistika, Classe 3 S
S.M.S. "C.A.Dalla Chiesa" di San Genesio ed Uniti (PV)

Le proprietà sono "raccontate"; lodevole il metodo di lavoro descritto e l'approfondimento sulla scomposizione del cubo



Per scoprire di quale poliedro si trattava, in classe abbiamo costruito il cubo usando delle cannucce di plastica unite tra loro con dei giunti sempre di plastica. Abbiamo quindi cercato di immaginare la forma del poliedro: la prima cosa che abbiamo notato è che i suoi spigoli erano tutti uguali perché ipotenuse di triangoli rettangoli isosceli aventi i cateti pari a $\frac{l}{2}$ se indichiamo con " l " lo spigolo del cubo.

Abbiamo quindi costruito con altre cannucce lunghe circa $\frac{l}{2}\sqrt{2}$ il poliedro inscritto nel cubo: si tratta di un ottaedro regolare le cui facce triangolari sono triangoli equilateri aventi il lato lungo $\frac{l}{2}\sqrt{2}$.

A casa ho costruito con del cartoncino un modellino pari a metà cubo e a metà ottaedro inscritto ed alcuni modelli di piramidi pari ad un 1/8 del ottaedro ed ho osservato che il cubo di lato l può essere scomposto in:

- un ottaedro inscritto i cui vertici sono i centri delle facce del cubo e le cui facce sono triangoli equilateri di lato $\frac{l}{2}\sqrt{2}$.

- 24 piramidi triangolari (ogni piramide è 1/8 dell' ottaedro) non rette aventi quattro facce di cui tre che sono triangoli rettangoli isosceli di ipotenusa $\frac{l}{2}\sqrt{2}$ e due di queste facce sono perpendicolari alla base **[se si assume come base il triangolo equilatero di lato $\left(\frac{l}{2} \cdot \sqrt{2}\right)$, tali piramidi sono rette e regolari]**.
- 8 tetraedri regolari aventi come facce lo stesso triangolo equilatero dell'ottaedro.

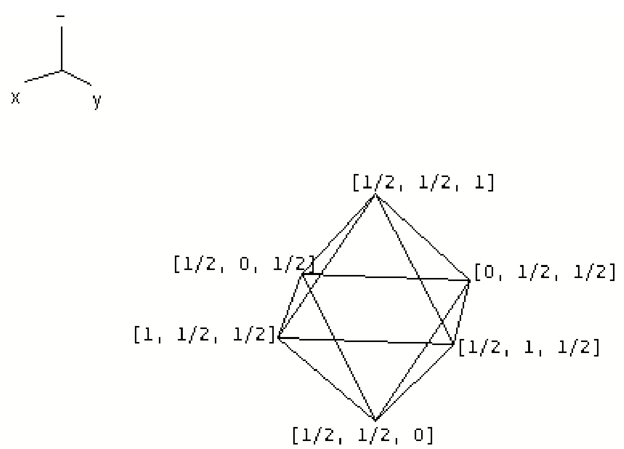
Volume dell'ottaedro = $\left(\frac{l}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{l^3}{6}$ Volume del cubo = l^3

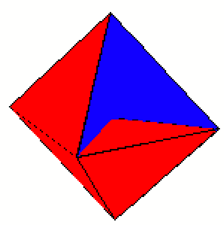
Il rapporto è 1/6.

Classe 3A Programmatori, ITCG "Ruffini", Imperia (IM)

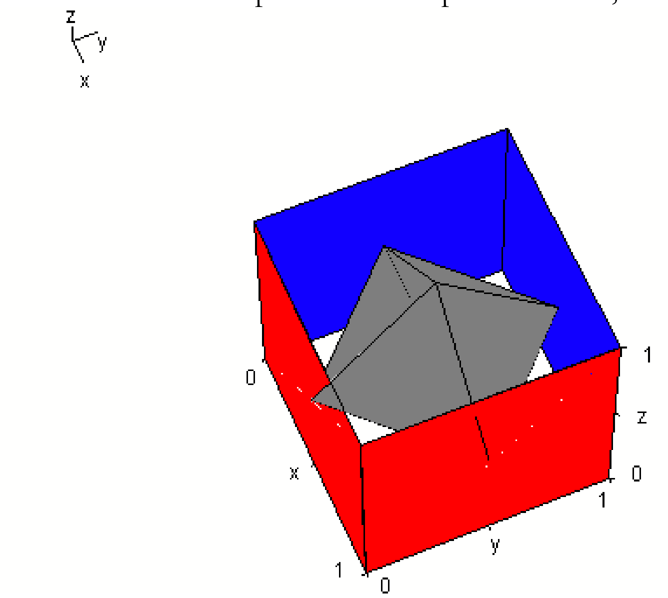
È l'unica risposta in cui si esamina la definizione completa di ottaedro regolare; si fa ricorso a simmetrie che non sono del tutto motivate e/o chiaramente descritte.

1) Il solido che si ottiene è un ottaedro (uno dei 5 solidi platonici). Le sue facce sono otto triangoli equilateri congruenti e i suoi diedri sono congruenti; è un solido regolare. I suoi vertici sono infatti corrispondenti due a due in una simmetria centrale coincidente con il centro di simmetria del cubo **[affermazione corretta, ma non motivata]**. E' simmetrico rispetto ai tre piani perpendicolari **[paralleli]** alle facce opposte del cubo **[e passanti per il suo centro]**. In tali simmetrie i diedri si corrispondono **[quali e perché]** ed hanno dunque sezione normale congruente.
Abbiamo costruito con Derive un modello di tale ottaedro, ipotizzando che la costruzione sia basata su un cubo, di spigolo unitario, avente un vertice in (0,0,0) e tre spigoli concorrenti appartenenti agli assi cartesiani nello spazio.
Lo abbiamo fatto ruotare, ottenendo una visuale più chiara.





Con rotazione ed impostazione del punto di vista, abbiamo ottenuto la seguente figura.



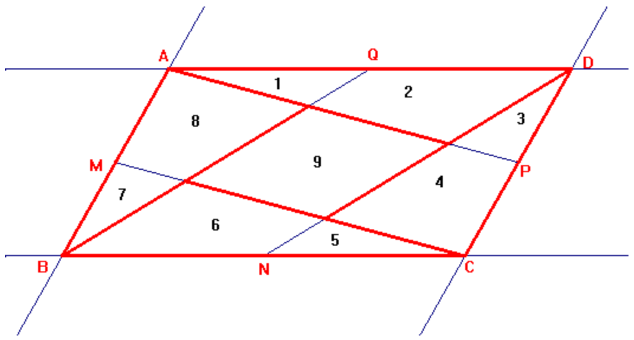
2) Per il volume, applicando il teorema di Pitagora ad uno dei triangoli rettangoli che hanno per vertici due centri di facce concorrenti del cubo e il terzo vertice appartenente allo spigolo comune, intersezione con un piano perpendicolare a tale spigolo, abbiamo ottenuto che ogni spigolo dell'ottaedro misura $\sqrt{2\frac{l^2}{4}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ (se l è lo spigolo del cubo). Il volume dell'ottaedro è

$2(\frac{l\sqrt{2}}{2})^2 \frac{l}{2}\frac{1}{3} = \frac{l^3}{6}$ dunque è 1/6 del volume del cubo.

Marzo 2006

Siano M, N, P, Q i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA del parallelogrammo ABCD. Tracciati i segmenti MC, AP, ND, QB, individuare nella figura ottenuta una scomposizione del parallelogrammo in cinque poligoni equivalenti.

Motivare le risposte.



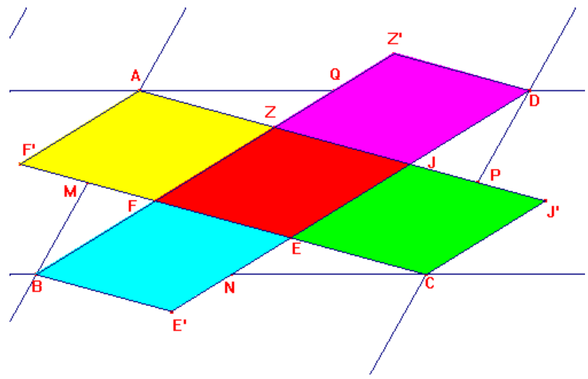


Figure inviate da ***Francesco Bonalda, Francesca Giacovelli, Alfredo Rivero, Chiara Veronesi, Classe 2S, SM "C.A.Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV),*** che così commentano:
"Abbiamo costruito il parallelogramma su un foglio e poi abbiamo ritagliato i nove poligoni in cui risulta scomposto e ricomponendoli abbiamo ottenuto 5 poligoni congruenti ed equiestesi assemblando i pezzi in questo modo: $1+2 \cong 3+4 \cong 5+6 \cong 7+8 \cong 9$"

Commento

Abbiamo ricevuto sette risposte, di cui due provenienti da una stessa sezione (classe seconda e terza) di scuola media. Ci complimentiamo con questi ragazzi e con la loro insegnante per il continuo interesse dimostrato per la geometria. Per illustrare il testo del problema abbiamo utilizzato la costruzione della classe seconda.

- *LS "Aristosseno", Taranto (TA)*
- *ITCG "Ruffini", Imperia (IM)*
- *LS "B. Russel", Roma (RM)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti, (PV)*
- *LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)*
- *ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR)*

Il problema di questo mese aveva come argomento la equiestensione: si trattava di individuare in un parallelogrammo, opportunamente scomposto, la suddivisione in cinque poligoni equivalenti.
Non era difficile scoprire i cinque poligoni, ma è stato interessante constatare la ingegnosa fantasia degli studenti nell'escogitare percorsi e costruzioni diverse, fra cui il ricorso a "carta e forbici", per giungere alla tesi richiesta. Ingegnosità non sempre supportata da una corretta esposizione e/o giustificazione per alcuni, oppure che ha portato ad eccessive elaborazioni in altri (come, ad esempio, la ulteriore scomposizione della figura in triangoli, che ha contribuito ad appesantire la dimostrazione).
Riteniamo doveroso fare alcune precisazioni:

- non sempre sono state sfruttate appieno o in modo corretto le proprietà del parallelismo (ad esempio non basta che due segmenti siano compresi fra rette parallele per affermare che sono paralleli oppure congruenti);

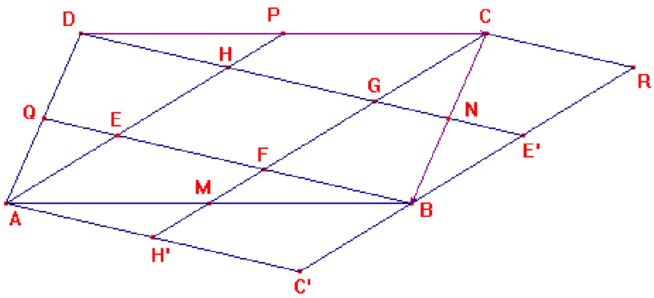
- per utilizzare correttamente una simmetria centrale occorre indicare, oltre al centro, le coppie di punti corrispondenti (questo permette di affermare che il segmento che congiunge due punti è parallelo a quello che congiunge i loro corrispondenti);
- ricordiamo inoltre che ogni triangolo viene diviso in due triangoli equivalenti dalla mediana relativa ad un lato.

E' giunta, con una settimana di ritardo, una risposta dall'ITI "G. Ferraris" di S. Giovanni La Punta (CT). L'abbiamo esaminata ugualmente, apprezzata per la precisione e correttezza nella esposizione, anche se un po' ripetitiva; non la proponiamo per rispetto di chi ha osservato la scadenza prevista.
NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

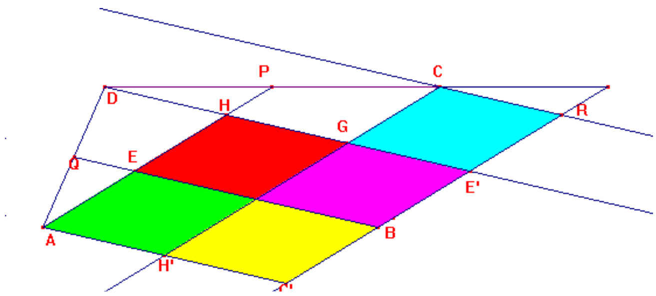
Soluzioni

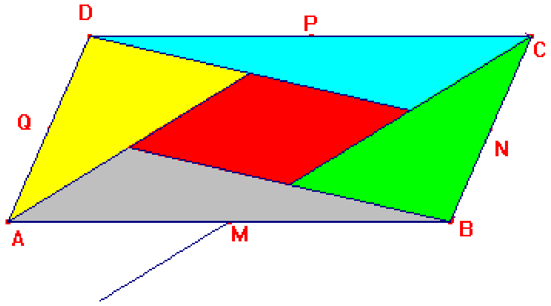
Elda Bistika, Giulia Brambati, Erika Dargenio, Monica Maida
Classe 3S S.M. di San Genesio ed Uniti (PV)

Risposta in cui si fa ricorso alla traslazione; corretta nella dimostrazione, con alcune imprecisioni nella esposizione.



Il quadrilatero DQBN ha due lati uguali DQ=BN perché tutti e due metà dei lati opposti del parallelogramma ABCD e paralleli, quindi è un parallelogramma; per lo stesso motivo anche il quadrilatero AMCP è un parallelogramma perché ha i lati AM e PC uguali e paralleli.
Pertanto la retta QB è parallela a DN e la retta AP è parallela a MC.
Risulta quindi che EFGH è un parallelogramma perché ha due coppie di lati **[[…]]** paralleli.
Consideriamo i triangoli AEB e DCG, essi sono uguali perché hanno un lato e due angoli uguali: AB=DC per ipotesi e gli angoli interni AEB=DGC ed EAB=DCG, infatti AEB=QEH=DHP=DGC (angoli opposti al vertice e angoli corrispondenti formati da rette parallele) e EAB=FMB =DCG (angoli corrispondenti e alterni interni rispetto a due coppie di rette parallele).
Nello stesso modo si può dimostrare l'uguaglianza dei triangoli ADH=CFB.
Trasliamo le seguenti figure: DCG del vettore CB e ADH del vettore DC.
Si ottengono due parallelogrammi: AEBC' e FCRB per **[[…]]** il parallelismo dei lati corrispondenti nella traslazione.
Consideriamo il parallelogramma AEBC'. Il segmento H'F lo divide in due parallelogrammi congruenti perché MF // AE e MF passante per il punto medio, quindi, per il teorema di Talete, **[[…]]** BF=EF perchè MB=AM.
Si dimostra allo stesso modo l'uguaglianza tra FGE'B=GCRE'.



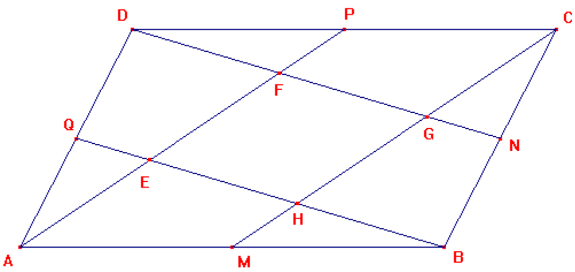


I parallelogrammi AEFH', H'FBC', FGE'B, GCRE' sono congruenti a EFGH avendo lati uguali AE=AH=FG=GC e EF=FB=DH=HG e coppie di angoli uguali.
Inoltre AEFH' è equiesteso a AEB perché metà del parallelogramma AEBC'; in conclusione si ha:
AEB=DCG è equiesteso a EHGF
Si ha inoltre che:
BFC è equiesteso BFGE' perché metà del parallelogramma BFCR; in conclusione si ha:
BFC=ADH è equiesteso a EHGF.
Per la proprietà transitiva dell'equiestensione si ha:
AEB è equiesteso a DCG che è equiesteso a BFC che è equiesteso a ADH che è equiesteso ad EHGF.

Alfonso Scarpino, classe 1G
LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)

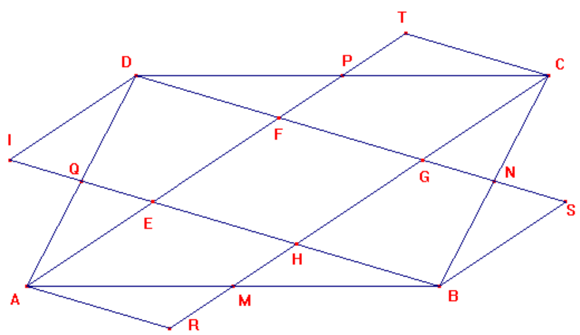
Utilizza unicamente le proprietà del parallelismo, ma eccede nella concisione trascurando due necessarie precisazioni.

.



Il quadrilatero QBND è un parallelogramma perché ha due lati opposti (QD e BN) paralleli e congruenti in quanto metà di lati opposti dello stesso parallelogramma; similmente anche il quadrilatero AMCP è un parallelogramma, per cui i segmenti QB e AP sono paralleli rispettivamente ai segmenti DN e MC. **[Quindi anche EHGF, avendo i lati opposti pralleli, è un parallelogramma]**

Il segmento FP nel triangolo DGC è parallelo al lato GC e passa per il punto medio del lato DC, allora interseca il lato DG nel suo punto medio F, per cui il segmento DF è congruente al segmento FG; analogamente possiamo dimostrare che EH, HG ed AE sono congruenti rispettivamente a BH, GC ed EF.

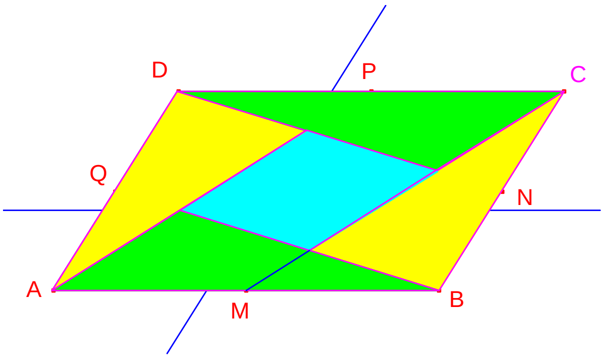


Costruiamo il parallelogramma IEFD di lati EF e DF. Poiché Q è il punto medio del lato AD del triangolo AFD ed il segmento QE è parallelo al lato DF, il segmento QE è la metà di DF, di conseguenza IQ è congruente a QE; l'angolo IQD è congruente all'angolo AQE poiché opposti al vertice. Da tutto ciò deriva che i triangoli AEQ e IQD sono congruenti perché hanno due lati (IQ e QE, e AQ e QD) e gli angoli compresi (IQD e AQE) a due a due congruenti e quindi il parallelogramma IEFD ed il triangolo DFA sono equivalenti. Nello stesso modo si può dimostrare che i triangoli AEB, BHC e GDC sono equivalenti ai parallelogrammi ARHE, HBSG e FGCT, tutti equivalenti a GFEH **[essendo, per costruzione, tutti uguali a EFGH].**

Pertanto il parallelogramma EHGF è equivalente ai triangoli ABE, BHC, GDC e DFA ed insieme individuano una scomposizione del parallelogramma ABCD in cinque poligoni equivalenti.

classe 2B
ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR)

Risolvono il problema tracciando due opportune rette parallele ai lati del parallelogrammo; fanno due affermazioni imprecise nelle motivazioni.

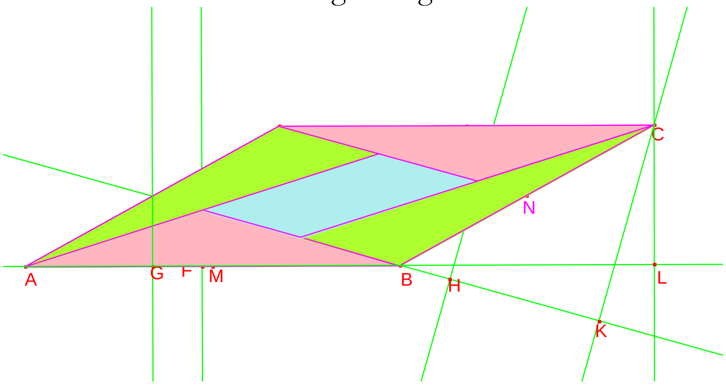


Innanzitutto il quadrilatero OGFE è un parallelogramma perché:
QD è congruente a BN perché Q e N sono i punti medi di lati opposti del parallelogrammo, quindi, **[[…]]** essendo QD e BN segmenti congruenti e paralleli, DN e QB risultano anch'essi paralleli e congruenti **[in quanto lati opposti di un parallelogrammo].** Analogamente AP e MC. Pertanto il quadrilatero OGFE costruito su tali segmenti è un parallelogrammo.
Si conduca da E la parallela a AD che interseca OG in I.
IE è congruente a QD perché segmenti paralleli compresi fra rette parallele **[oppure: perché lati opposti di un parallelogrammo]**. QD congruente a AQ perché Q punto medio quindi IE è congruente ad AQ.
Gli angoli QAO e OEI sono congruenti perchè alterni interni rispetto alle parallele AD e IE tagliate dalla trasversale AE. Gli angoli AQO e OIE sono congruenti perché alterni interni rispetto alle parallele AD e IE tagliate dalla trasversale QI.
Quindi per il secondo criterio di congruenza i triangoli AOQ e OIE sono congruenti.
Il parallelogrammo OGFE si scompone nel triangolo OIE (congruente ad AOQ) e nel trapezio IGFE(congruente a QOED).
Poiché il triangolo AOQ e il trapezio QOED costituiscono una scomposizione del triangolo AED, si conclude che il triangolo AED e il parallelogrammo OGFE sono equivalenti.
Si conduca ora da O la parallela ad AB che interseca GF in L.
Analogamente a quanto visto sopra i triangoli OGL e MBG sono congruenti per il secondo criterio in quanto: OL è congruente a PC perché sta su retta parallela a PC ed è compreso fra rette parallele (OP e LC)
Gli angoli LOE e GBM sono congruenti perché alterni interni (OL parallelo AB, OB trasversale)
Gli angoli OLG e GMB sono congruenti perché alterni interni(OL parallelo AB, ML trasversale).
Pertanto il parallelogrammo OGFE si scompone nel triangolo OGL (congruente al triangolo MGB) e nel trapezio OLFE(congruente al trapezio OGMA).Poiché il triangolo MGB e il trapezio OGMA costituiscono una scomposizione del triangolo AOB, risulta che il parallelogrammo OGFE è anche equivalente al triangolo OAB che per la proprietà transitiva risulta anche equivalente al triangolo ADE.
Ora resta da dimostrare l'equivalenza fra i triangoli GBC e DFC. Il triangolo GBC risulta congruente al triangolo ADE. Infatti BC e AD sono congruenti perché lati opposti del parallelogrammo ABCD, gli angoli DAE e GCB sono congruenti perché formati da rette parallele e discordi. Analogamente gli angoli ADE e CBG sono congruenti perché formati da rette parallele e discordi. Quindi per il secondo criterio di congruenza i triangoli ADE e GBC sono congruenti.
Del tutto analoga la dimostrazione della congruenza , e quindi equivalenza, tra il triangolo DFC e il triangolo OAB.

Classe 3A programmatori
ITCG "Ruffini", Imperia (IM)

Risoluzione un po' laboriosa, in cui si ricorre al calcolo delle aree.

Facendo riferimento alla figura seguente:



I cinque poligoni equivalenti sono:

- Il parallelogramma RSTU
- Il triangolo TCB
- Il triangolo DCS
- Il triangolo DRA
- Il triangolo AUB

Infatti:

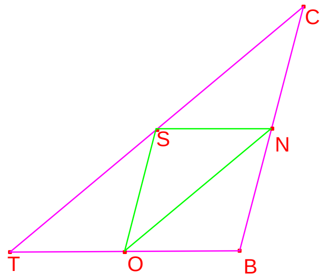
il triangolo AQB è equivalente a CBM in quanto AB=2MB e QG=$\frac{1}{2}$ CL (similitudine dei triangoli AQG e CBL essendo rettangoli con l'angolo in A e in B corrispondenti, e quindi congruenti, formati dalle parallele AQ e CB tagliate dalla trasversale AB; AQ=1/2CB per costruzione, quindi ½ è il rapporto di similitudine)

$\rightarrow$ Area (AQB)=$\frac{AB\cdot QG}{2}=\frac{2MB\cdot\frac{1}{2}CL}{2}=\frac{1}{2}MB\cdot CL=$ Area(CBM)

i triangoli DCN e AQB sono congruenti e quindi equivalenti (avendo DC = AB, gli angoli DCN e BAQ congruenti perché opposti nel parallelogramma ABCD, CN congruente ad AQ per costruzione)
$\rightarrow$ DN = QB
analogamente per i triangoli ADP e CBM
$\rightarrow$ AP = CM
perciò DNBQ è un parallelogramma, così come APCM ed RSTU
Gli angoli CNS e AQU sono congruenti perché formati da rette parallele a due a due ; così pure gli angoli QAU = SCN
I triangoli AQU e CNS sono congruenti per il II criterio di congruenza
AUB è equivalente ad SNBM perché :
Area (AQB)-Area (AQU) = Area (CBM) – Area (CSN)
$\rightarrow$ Area (AUB) = Area (SNBM)
AUTM è equivalente ad SNBT perché :
Area (AUB) = Area (AUTM)+Area(TBM) = Area (SNBM) = Area (SNBT)+Area(TBM) $\rightarrow$
Area (AUTM) = Area (SNBT)
Nel triangolo CTB si ha Area (CSN) = 1/3 Area (SNBT) (per un teorema conseguente al teorema della congiungente i punti medi dei lati di un triangolo)
Nel triangolo AUB si ha analogamente Area (TBM) = 1/3 Area (AUTM)
$\rightarrow$ Area (CSN) = Area (TBM)
$\rightarrow$ Area (AUTM)+ Area (TBM) = Area (SNBT)+ Area (TBM) $\rightarrow$ Area (AUB)=Area (CBT) ossia
AUB è equivalente a CBT

RSTU è equivalente a CBT perché: Area(RSTU) =UT .SH =$\frac{TB\cdot 2SH}{2}=\frac{TB\cdot CK}{2}=$ Area(CBT) (infatti per il teorema di Talete, applicato al triangolo AUB, UT = TB)

Per precisione, aggiungiamo la spiegazione del fatto che Area (CSN) = 1/3 Area (SNBT)



Data la figura seguente, si ha:
Area (CTB) = 4 Area(CSN) (le aree sono in rapporto come i quadrati di due lati omologhi)

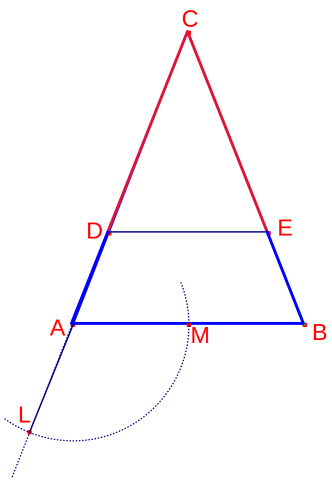
Area(TBNS) $= \dfrac{(TB + SN) \cdot h}{2}$ (con h altezza del trapezio = altezza di CSN relativa a SN) $= \dfrac{3}{2} SN \cdot h$

Area(CSN) $= \dfrac{SN \cdot h}{2}$ =1/3 Area (TBNS)

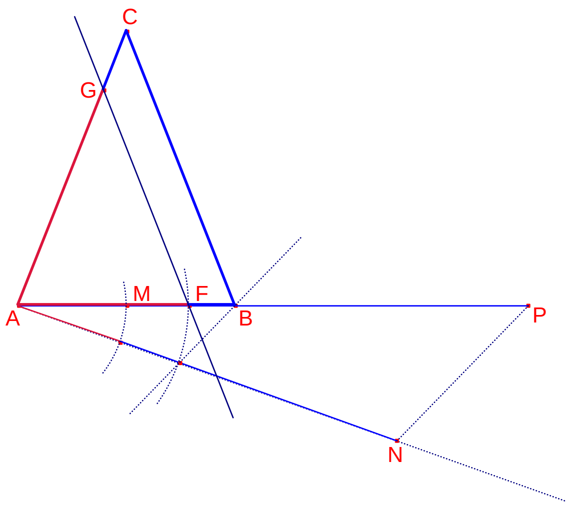
Aprile 2006

a) In un triangolo isoscele ABC tracciare una corda DE parallela alla base AB in modo da dividere il perimetro in due parti uguali.
b) Provate ad ottenere lo stesso risultato tracciando una corda FG parallela a uno dei due lati congruenti.

Descrivere e motivare le costruzioni.



LC semiperimetro
D punto medio di LC



AN semiperimetro; BP=BC
Retta per B parallela a NP

Commento

Abbiamo ricevuto sei risposte dalle seguenti scuole:

- *LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)*
- *SM "Paisiello", Cinisello Balsamo (MI)*
- *ITCG "Ruffini", Imperia (IM)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti, (PV) – due risposte*
- *ITI "Galileo Ferraris", San Giovanni La Punta (CT)*

Nel problema proposto si chiedeva di dividere in due parti uguali il perimetro di un triangolo isoscele, prima tracciando una corda parallela alla base, poi parallela a uno dei due lati congruenti.
Si trattava quindi di procedere a una costruzione motivata o da una dimostrazione sintetica o da una verifica algebrica.
In quasi tutte le risposte gli studenti hanno interpretato correttamente il primo quesito, anche se con motivazioni non sempre esaurienti.
Il secondo quesito ha invece creato qualche difficoltà: c'è chi non lo ha risolto; c'è chi ha fatto ricorso alla risoluzione algebrica senza fornire la costruzione.
Pur essendo corrette, le risoluzioni mediante equazione individuano tramite una misura il punto da cui tracciare la parallela richiesta; si doveva comunque cercare un procedimento geometrico (riga e compasso) per determinare la posizione di tale punto.

L'unico studente che ha fornito una costruzione ben motivata ha "dimenticato" poi di trarre la dovuta conclusione.

Nelle figure che illustrano il testo del problema proponiamo la traccia di due possibili soluzioni alternative a quelle ricevute.

Abbiamo convenuto di presentare le seguenti risposte corredate dalle nostre osservazioni in parentesi quadra. Con la doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse perché superflue o inopportune.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

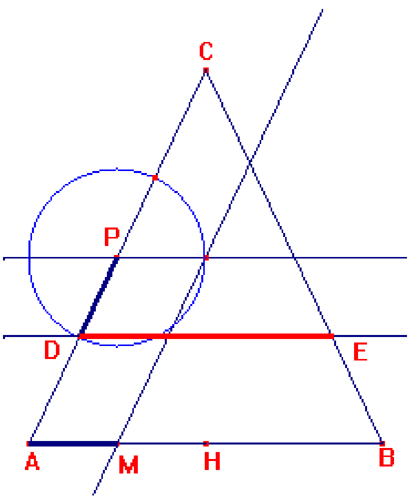
Soluzioni

Sabrina Lancia, Enrico Moschetto, Emanuele Pellegrino, Matteo Romeo, Alberto Tudisco
Classe 2A ITI "Galileo Ferraris", San Giovanni La Punta (CT)

Si riporta solo la prima parte, in cui si fornisce una costruzione correttamente motivata. Una proposta analoga hanno inviato Elda Bistika, SM "C.A. Dalla Chiesa" e Paola Tonussi, SM "Paisiello".

a. Hp $AC \cong BC$

Ts $\exists\ DE // AB \mid DC + CE \cong EB + AB + AD$



Sia H il punto medio della base AB ed M il punto medio del segmento AH $\Rightarrow AM \cong \frac{1}{4}AB$ (1)

Sia P il punto medio di AC. Mediante una rototraslazione (di centro P e vettore AM) riportiamo il segmento AM sul lato AC a partire da P dalla parte di A

$\Rightarrow\ CD \cong CP + PD \cong \frac{1}{2}AC + \frac{1}{4}AB$ (2)

Affinché sia vera la tesi è necessario che il punto D (da cui tracciare la parallela DE alla base AB) sia preso ad una distanza CD da D che verifichi la relazione (2).

Infatti, sia DE // AB $\Rightarrow$ il triangolo CDE è isoscele (in quanto gli angoli alla base sono congruenti perché corrispondenti agli angoli alla base del triangolo ABC rispetto alle parallele DE e AB tagliate dalle trasversali AC e BC) $\Rightarrow$ $DC \cong CE$

$\Rightarrow DC + CE \cong 2\,DC \cong 2(\frac{1}{2}AC + \frac{1}{4}AB) \cong AC + \frac{1}{2}AB$ **(3)**

I segmenti EB e AD sono congruenti perché differenza di segmenti congruenti $\Rightarrow$

$EB \cong CB - CE \cong CB - (\frac{1}{2}AC + \frac{1}{4}AB) \cong \frac{1}{2}AC - \frac{1}{4}AB$

Allora: $EB + AB + AD \cong 2EB + AB \cong 2(\frac{1}{2}AC - \frac{1}{4}AB) + AB \cong AC + \frac{1}{2}AB$ (4)

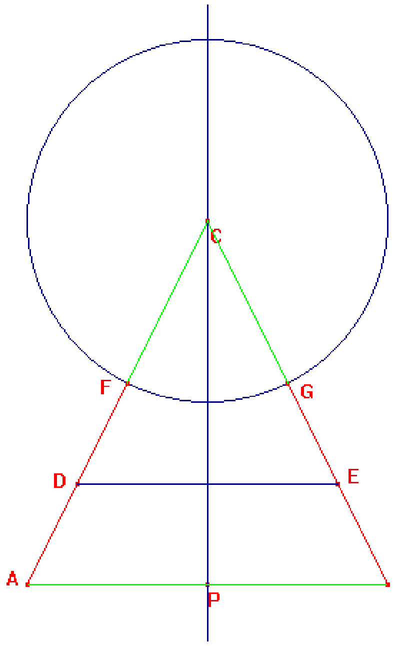
Confrontando (3) e (4) si ha la tesi.

La seconda parte del problema (b) è stata risolta in due modi differenti: una prima soluzione ha sfruttato la similitudine dei triangoli, una seconda il teorema di Talete.

b. [[…]]

Francesco Bonalda e Alfredo Rivero
Classe 2S Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa" San Genesio ed Uniti (PV)

Hanno risolto solo il primo punto con una soluzione molto semplice, che presenta però una omissione nelle motivazioni.



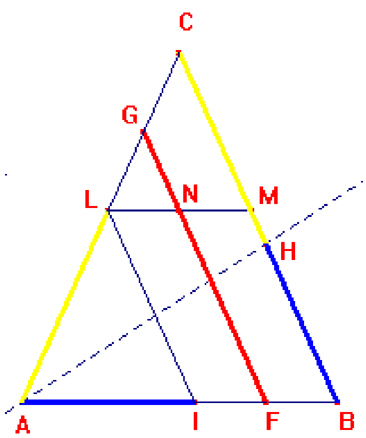
Abbiamo costruito il triangolo isoscele ABC. Abbiamo trovato il punto medio P della base AB.
Utilizzando il compasso costruiamo una circonferenza di centro C con apertura pari a metà di AB .
Chiamiamo F e G i punti di intersezione con i lati obliqui del triangolo.
Costruiamo i punti medi dei segmenti FA e GB e li chiamiamo D e E .
La corda DE divide in due parti uguali il perimetro del triangolo perché la somma di FC più CG è congruente ad AB mentre FD e GE sono congruenti ad AD e a EB perché D e E sono punti medi di FA e GB.
[Si deve inoltre dimostrare che DE è parallelo ad AB, considerando, per esempio, i triangoli isosceli ABC e DEC, con l'angolo al vertice C in comune, …]

Alfonso Scarpino, classe 1G
LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)

Ha individuato un procedimento di costruzione valido sia per la prima che per la seconda parte del problema. Presentiamo la seconda con una nostra nota a conclusione del suo percorso.

a) [[…]]

b)



[La dimostrazione è quasi identica al caso precedente, con l'unica differenza che questa volta abbiamo preso in considerazione la bisettrice di uno degli angoli alla base che perciò non è anche altezza e mediana.]

Costruiamo la bisettrice dell'angolo BAC che, per il teorema della bisettrice dell'angolo interno di un triangolo, divide il lato BC nei segmenti BH e CH, rispettivamente proporzionali ai lati AB e AC; riportiamo questi due segmenti sui lati AB e AC, ottenendo così i segmenti AI e AL. Possiamo affermare che il triangolo AIL è simile al triangolo ABC perché ha i lati AI e AL rispettivamente proporzionali ai lati AB e AC e l'angolo compreso in comune. I segmenti IL e BC sono paralleli, infatti se i due triangoli a cui appartengono sono simili allora hanno gli angoli corrispondenti congruenti, pertanto gli angoli AIL e ABC sono congruenti, ma visto che i lati AI e AB giacciono sulla stessa retta, i segmenti IL e BM dovranno obbligatoriamente appartenere a rette parallele e quindi essere a loro volta paralleli.

Se i segmenti AI e AL sono proporzionali ai segmenti AB e AC, allora anche le differenze tra AB e AI, e AC e AL (rispettivamente i segmenti IB e LC) sono proporzionali ai lati AB e AC; detto ciò costruiamo la parallela al segmento IB passante per il punto L.
Consideriamo ora il triangolo LMC: esso è simile al triangolo ABC per avere un angolo in comune e gli altri due congruenti per il teorema delle rette parallele tagliate da una trasversale; il segmento GN, congiungente i punti medi dei lati LM e LC, è parallelo al lato MC per una conseguenza del teorema di Talete.
Il quadrilatero IBML è un parallelogramma, infatti i lati IL e BM, come precedentemente dimostrato, sono paralleli e i lati IB e LM sono paralleli per costruzione, ne deriva che i segmenti IB e LM sono anche congruenti. Sempre per una conseguenza del teorema di Talete la congiungente dei punti medi F e N di due lati opposti di un parallelogramma è parallela agli altri due. Per l'unicità della parallela ad una retta per un punto, i segmenti GN e NF giacciono sulla stessa retta e quindi il segmento FG è quello richiesto **[in quanto risulta AF+AG=FB+BC+CG, perché somme di segmenti congruenti].**

Maggio 2006

Dato un triangolo ABC siano A', B', C' i punti medi di BC, CA, AB

1) Detto O l'ortocentro di A'B'C', H l'ortocentro di ABC, qual è il rapporto fra le misure dei segmenti CH e C'O?
Che cosa rappresenta il punto O nel triangolo ABC?

2) Detta X l'intersezione fra CC' e HO, che cosa rappresenta il punto X nel triangolo ABC?

3) Si può ora dedurre una importante proprietà dei punti notevoli di un triangolo. Quale?

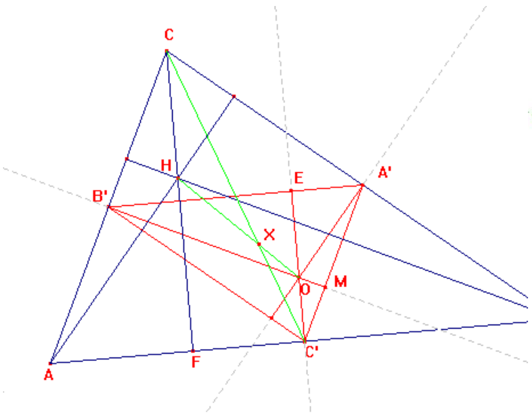


Figura di ***Elda Bistika, classe 3S, SM "C.A. Dalla Chiesa"***

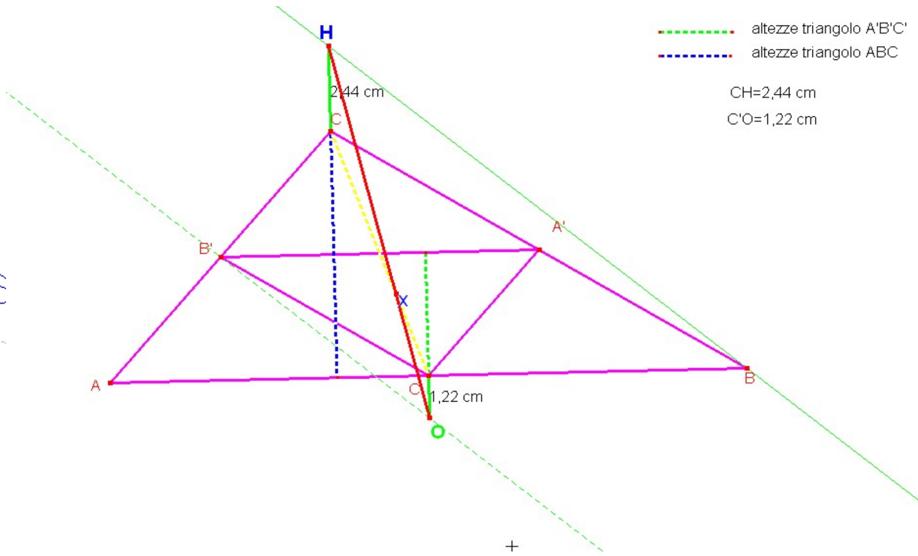


Figura di ***Ilaria di Maio e Valentina Artusa, classe 3B, IC "Rodari"***

Commento

Sono giunte quattro risposte provenienti da tre scuole:

- *ITCG "Ruffini", Imperia (IM)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti, (PV) – due risposte*
- *IC "Rodari", Baranzate (MI)*

Il problema di questo mese, articolato in tre parti, doveva portare gli studenti a scoprire la retta di Eulero, cioè la nota proprietà dell'allineamento dei tre punti notevoli, ortocentro (H), baricentro (X) e circocentro (O), di un qualunque triangolo e a dimostrare che intercorre un rapporto costante fra le distanze HX e XO.
Gli studenti di scuola superiore hanno risolto il problema per via analitica, utilizzando per i calcoli lo strumento informatico Derive. Se avessero fatto anche qualche considerazione di tipo sintetico avrebbero potuto snellire il loro percorso di calcolo e inoltre intuire la proprietà del rapporto fra HX e XO.
Gli studenti della scuola media hanno invece trattato il problema per via sintetica risolvendo correttamente il primo punto mediante la similitudine. In seguito si sono limitati ad esporre osservazioni verificate con Cabri, ma non giustificate.
Non è stato raccolto il suggerimento contenuto nel primo quesito del problema: quel rapporto, considerando due opportuni triangoli simili, avrebbe portato a rispondere in modo esauriente al secondo e terzo punto. Vedere in proposito le nostre osservazioni inserite nelle risposte.

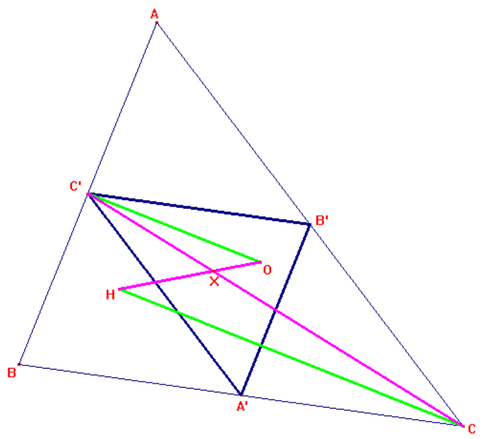
Per illustrare il problema proponiamo una figura della SM "C.A. Dalla Chiesa", con triangolo acutangolo, e una della SM "Rodari", con triangolo ottusangolo.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Bonalda, Campi, Giacovelli, Pallestrini, Pimentel, Veronesi,
classe 2S S.M. "C.A. dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)

E' la sola risposta in cui è stato osservato, ma non giustificato, il rapporto suddetto. Una risposta simile, ma incompleta nel terzo punto, ha inviato Elda Bistika, classe 3S.



1. Unendo i punti A', B', C' nel triangolo ABC si formano quattro triangoli. Chiara ha verificato, utilizzando carta e forbici che sono congruenti. Francesco si è ricordato della proprietà dei triangoli che dice: se si congiungono i punti medi di AB e AC si ottiene un triangolo A C'B' simile ad ABC. In questo caso il rapporto tra i lati è $\frac{1}{2}$ e quindi C'B' è metà di BC, ed è parallelo a questo lato e congruente ad A'B.
Nello stesso modo si può dimostrare che i triangoli C'BA' e A'B'C sono simili a ABC e nel rapporto di similitudine di $\frac{1}{2}$.
Quindi BC'B'A' è un parallelogramma perché ha due lati opposti paralleli e di uguale lunghezza.
Quindi il triangolo C'BA' è congruente a A'C'B'.
Pertanto i quattro triangoli che si formano sono tra loro congruenti e nel rapporto di similitudine di $\frac{1}{2}$ con ABC e di conseguenza anche tra i segmenti C'O e CH vi è lo stesso rapporto di $\frac{1}{2}$ perché distanza di vertici corrispondenti (C e C') dai rispettivi ortocentri.
Il punto O nel triangolo ABC è il circocentro cioè il punto d'incontro degli assi. Abbiamo verificato questo fatto con Cabrì, ma lo si può dimostrare perché C'O è perpendicolare ad A'B' e quindi anche ad AB perché AB e A'B' sono paralleli tra loro ed inoltre passa per C' che è il punto medio di AB e quindi C'O giace sull'asse di AB nel triangolo ABC.
Nello stesso modo si può dimostrare che B'O giace sull'asse di AC e A'O giace sull'asse di BC.

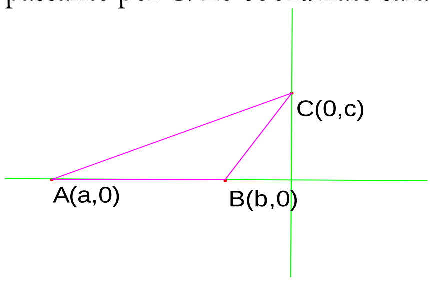
2. Abbiamo pensato che X avrebbe potuto essere il baricentro perché giaceva sulla mediana CC' e poi abbiamo verificato che è così con Cabri.
[I triangoli CHX e XOC' sono simili, avendo congruenti gli angoli opposti di vertice X e gli angoli alterni di vertici C e C', con rapporto di similitudine 2. Il punto X è quindi il baricentro di ABC perché divide la mediana CC' in due parti tali che CX=2XC']

3. In ogni triangolo il baricentro, il circocentro, l'ortocentro sono allineati. Abbiamo anche ipotizzato che OX fosse la metà di HX e in seguito l'abbiamo verificato con Cabri e la nostra ipotesi era giusta. **[HX=2XO, perché lati corrispondenti nei triangoli precedentemente considerati].**

Classe 3A Programmatori
ITCG "Ruffini", Imperia (IM)

In questa risposta abbiamo apprezzato, con le riserve prima esposte, il lavoro informatico.

Punto 1.
a) Dato il triangolo ABC, scegliamo l'asse x coincidente con la retta AB e l'asse y perpendicolare ad AB passante per C. Le coordinate saranno perciò A(a,0) B(b,0) C(0,c) con a<b.



Avremo di conseguenza:

A'=M(BC)=$(\frac{b}{2},\frac{c}{2})$, B'=M(CA)=$(\frac{a}{2},\frac{c}{2})$, C'=M(AB)=$(\frac{a+b}{2},0)$.

Congiungendo i punti medi dei lati di un triangolo si ottiene un segmento parallelo al terzo lato, dunque A'B' è parallelo ad AB, B'C' è parallelo a BC, C'A' è parallelo a CA

Per individuare l'ortocentro H troviamo l'intersezione di due altezze:

- retta per A perpendicolare a BC $\quad y=\frac{b}{c}(x-a)$

[[- retta per B perpendicolare ad AC $\quad y=\frac{a}{c}(x-b)$ **]] [non necessaria]**

[[Dal sistema $\begin{cases} y=\frac{b}{c}(x-a) \\ y=\frac{a}{c}(x-b) \end{cases}$ **]] [Calcolo superfluo, essendo una delle altezze sull'asse delle ordinate]** si ottiene H$(0,-\frac{ab}{c})$

Per individuare l'ortocentro di A'B'C' troviamo l'intersezione di due altezze:

-retta per A' perpendicolare a B'C' $\quad y-\frac{b}{2}=\frac{b}{c}(x-\frac{c}{2})$

- retta per C' perpendicolare ad A'B' e quindi all'asse x: $x=\frac{a+b}{2}$

Dal sistema $\begin{cases} y-\frac{c}{2}=\frac{b}{c}(x-\frac{b}{2}) \\ x=\frac{a+b}{2} \end{cases}$ si ottiene O$(\frac{a+b}{2},\frac{ab+c^2}{2c})$

Calcoliamo CH=$\left|-\frac{ab}{c}-c\right|=\left|\frac{ab+c^2}{c}\right|$

Calcoliamo C'O=$\left|\frac{ab+c^2}{2c}\right|$

Quindi CH/C'O =2

b) O è il circocentro di ABC perché O appartiene alla retta per B' perpendicolare ad A'C' quindi perpendicolare ad AC (che è parallela ad A'C') ; B' è punto medio di AC perciò O appartiene all'asse di AC. Analogamente O appartiene all'asse di BC e all'asse di AB.

Punto 2

CC' nel triangolo ABC è la mediana relativa ad AB ed ha equazione: $\frac{y-c}{-c}=\frac{x}{\frac{a+b}{2}}$

L'equazione della retta HO è $\frac{y-\frac{ab+c^2}{2c}}{-\frac{ab}{c}-\frac{ab+c^2}{2c}}=\frac{x-\frac{a+b}{2}}{-\frac{a+b}{2}}$

Il punto X, ottenuto risolvendo il sistema fra queste due equazioni, ha quindi coordinate $(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3})$

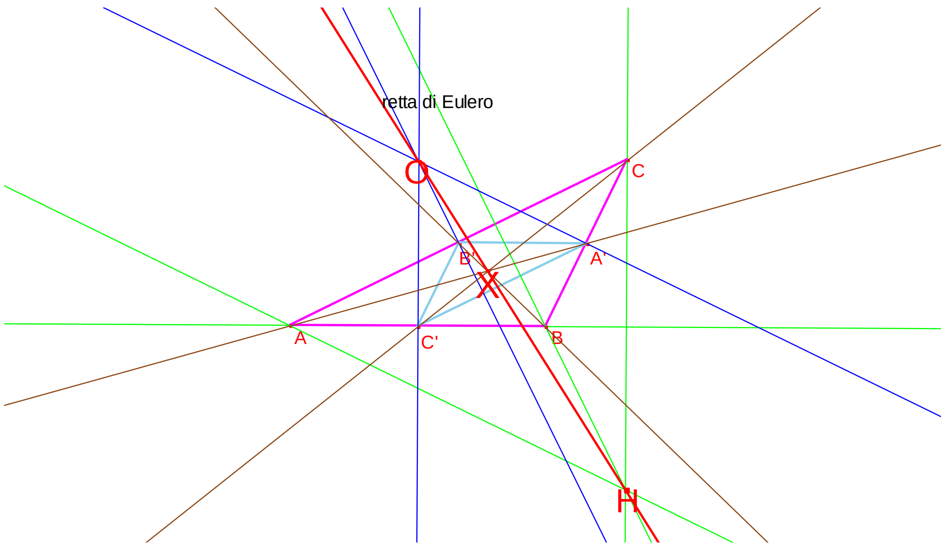
Esso coincide con il baricentro di ABC, che si può ottenere risolvendo il sistema tra le equazioni della suddetta mediana relativa ad AB e della mediana BB' relativa ad AC, ossia $\frac{y}{\frac{c}{2}}=\frac{(x-b)}{(\frac{a}{2}-b)}$

Punto 3

I punti notevoli baricentro, circocentro e ortocentro di un triangolo sono allineati su una retta detta di Eulero. Infatti le coordinate del punto X verificano l'equazione HO

[Vedi osservazione ai punti 2 e 3 della risposta precedente]

La figura ottenuta con Cabri illustra il problema:



FLAT*landia*, geometria on-line

L'IRRE dell'Emilia Romagna,
valendosi dell'apporto di operatori interni
e di collaboratori esterni all'Istituto,
ha proposto questo servizio in rete
rivolto a docenti e alunni
che si interessano di matematica.
Il servizio, promosso nell'anno scolastico '97-'98
e giunto al suo nono anno di attività,
ha visto l'adesione di Istituzioni Scolastiche
di vario tipo

Nel presente volumetto il resoconto
del nono anno di attività

n°
30