quaderni di CABRIRRSAE

Presentazione a cura di:
Giuliana Bettini e Franca Noè

FLAT*landia*

anno V

geometria on-line
nella scuola secondaria

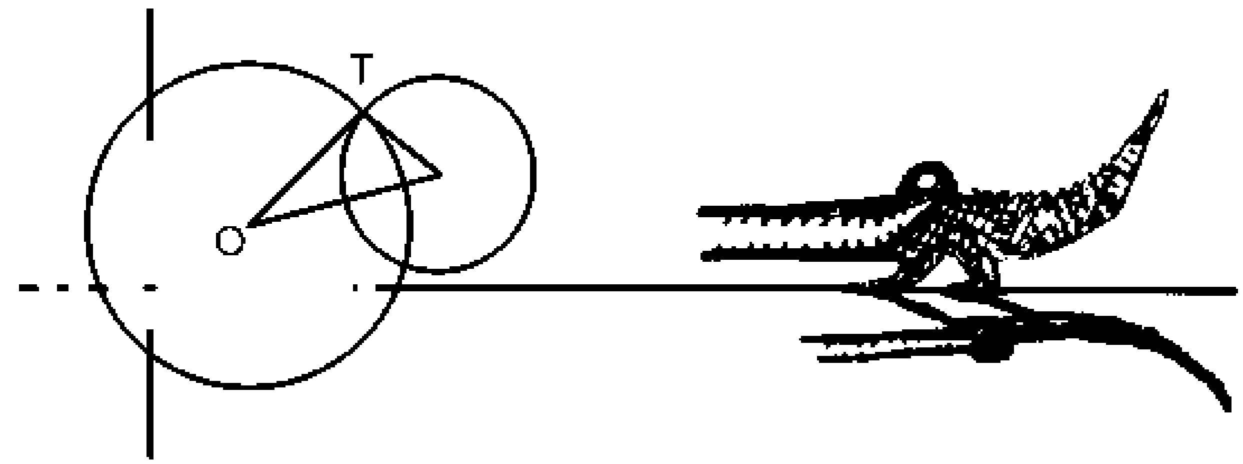
n°
22

Giuliana Bettini, insegnante di matematica, ha partecipato all'esperienza, fa parte della redazione del bollettino CABRI*RRSAE* e collabora con l'I.R.R.E. - E.R. in attività legate alla utilizzazione del software CABRI.

Franca Noè, insegnante di matematica, collaboratrice dell'I.R.R.E. - E.R., fa parte della redazione del bollettino CABRI*RRSAE* e partecipa da alcuni anni ad attività legate alla utilizzazione del software CABRI.

Released Information

Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 • Tel. Fax (051) 30.70.73 - Modem (051) 42.920.47 • 40125 BOLOGNA



FLAT*landia*

anno V

geometria on-line
nella scuola secondaria

Indice

FLAT*landia*

E' un'attività dell'IRRSAE Emilia-Romagna rivolta in modo particolare agli alunni del terzo anno della Scuola Media Inferiore e del biennio della Scuola Secondaria Superiore.
Ogni mese viene chiesto ai ragazzi di risolvere un problema di geometria. Entro lo stesso mese vengono valutate le risposte pervenute e vengono segnalate quelle ritenute meritevoli.
Testo e soluzioni sono inviati usando esclusivamente collegamenti telematici.

Un po' di storia

I problemi raccolti in questo quaderno testimoniano il quinto anno di attività dell'iniziativa. FLATlandia, nata come supporto alla lista di discussione Cabrinews, gode ormai di una sua vita autonoma ed ha un piccolo pubblico di affezionati.
Le scuole partecipanti sono passate da ventuno, nel primo anno, alle attuali trentatrè, con un picco di trentotto nello scorso anno.
Anche quest'anno la partecipazione all'attività è sta allargata agli studenti del terzo anno di scuola superiore, limitatamente ai primi tre mesi dell'anno scolastico. Questo per permettere ai "fedelissimi" di misurarsi ancora con quesiti di geometria sintetica e di approfondire le conoscenze acquisite nel biennio.

Il progetto

E' gestito da un comitato composto da due insegnanti di scuola secondaria, da due docenti universitari e da un tecnico informatico. Come negli anni passati il problema proposto mensilmente richiede di solito una costruzione ed una dimostrazione.
L'intento è quello di coinvolgere gli alunni in un'attività che richiede sì conoscenze, ma anche fantasia, creatività, immaginazione.
In questo momento in cui si auspica con forza di utilizzare le nuove tecnologie nell'insegnamento/apprendimento di varie discipline, FLATlandia si propone come attività al passo coi tempi, senza nulla concedere all'improvvisazione e al pressapochismo.
I problemi proposti richiedono, per essere risolti, sicure competenze e conoscenze matematiche. Sollecitano, come già detto, fantasia e creatività, che sono gli aspetti forse più caratteristici di questa disciplina. Qualora vengano utilizzati software, è necessario averne una conoscenza abbastanza approfondita. Per spedire i materiali in forma adeguata (testo e figure) bisogna padroneggiare discretamente le tecnologie informatiche.
La partecipazione a FLATlandia può essere inoltre un incentivo per i ragazzi al miglioramento delle loro capacità di argomentazione e di esposizione.

Come partecipare

I problemi sono inviati alla lista di discussione Cabrinews (cabrinews@kidslink.scuole.bo.it) il primo lunedì di ogni mese, da ottobre a maggio; oppure sono consultabili in rete negli archivi del progetto all'indirizzo:

http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/flatlandia/

Gli alunni possono partecipare singolarmente, per gruppi o inviando un'unica soluzione a nome di tutta la classe.
Le soluzioni dovranno pervenire entro il terzo lunedì del mese al seguente indirizzo di posta elettronica:

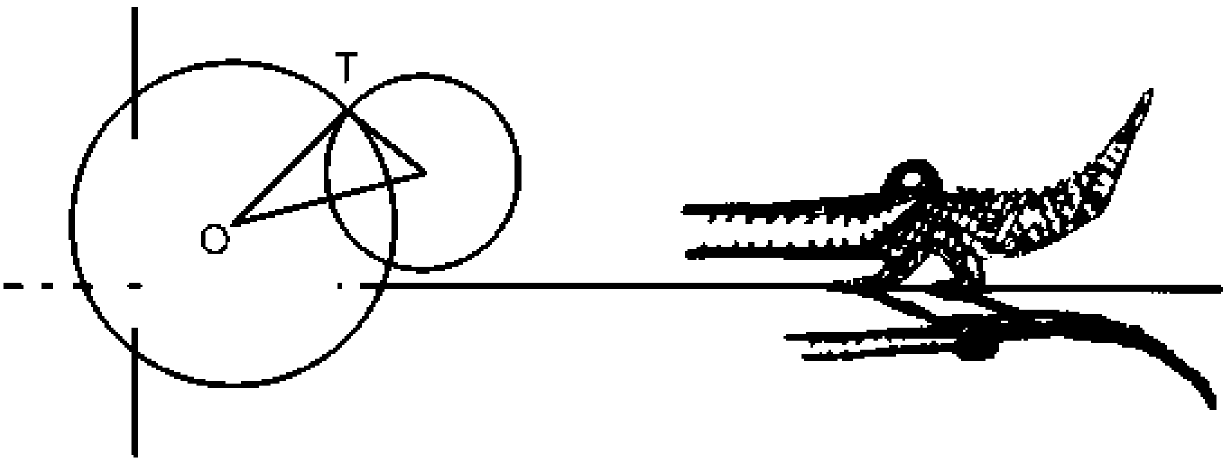
flat@kidslink.scuole.bo.it

inserendo nel messaggio e-mail il nome, la classe e il nominativo dell'Istituto.

Ulteriori informazioni

Le soluzioni possono essere scritte o direttamente nel messaggio di posta elettronica o in un file in formato Word, inviato in allegato. Se si vuole allegare un disegno, questo deve essere inviato o in formato Cabri-géomètre per MS-DOS o per Windows, altrimenti in formato Word.

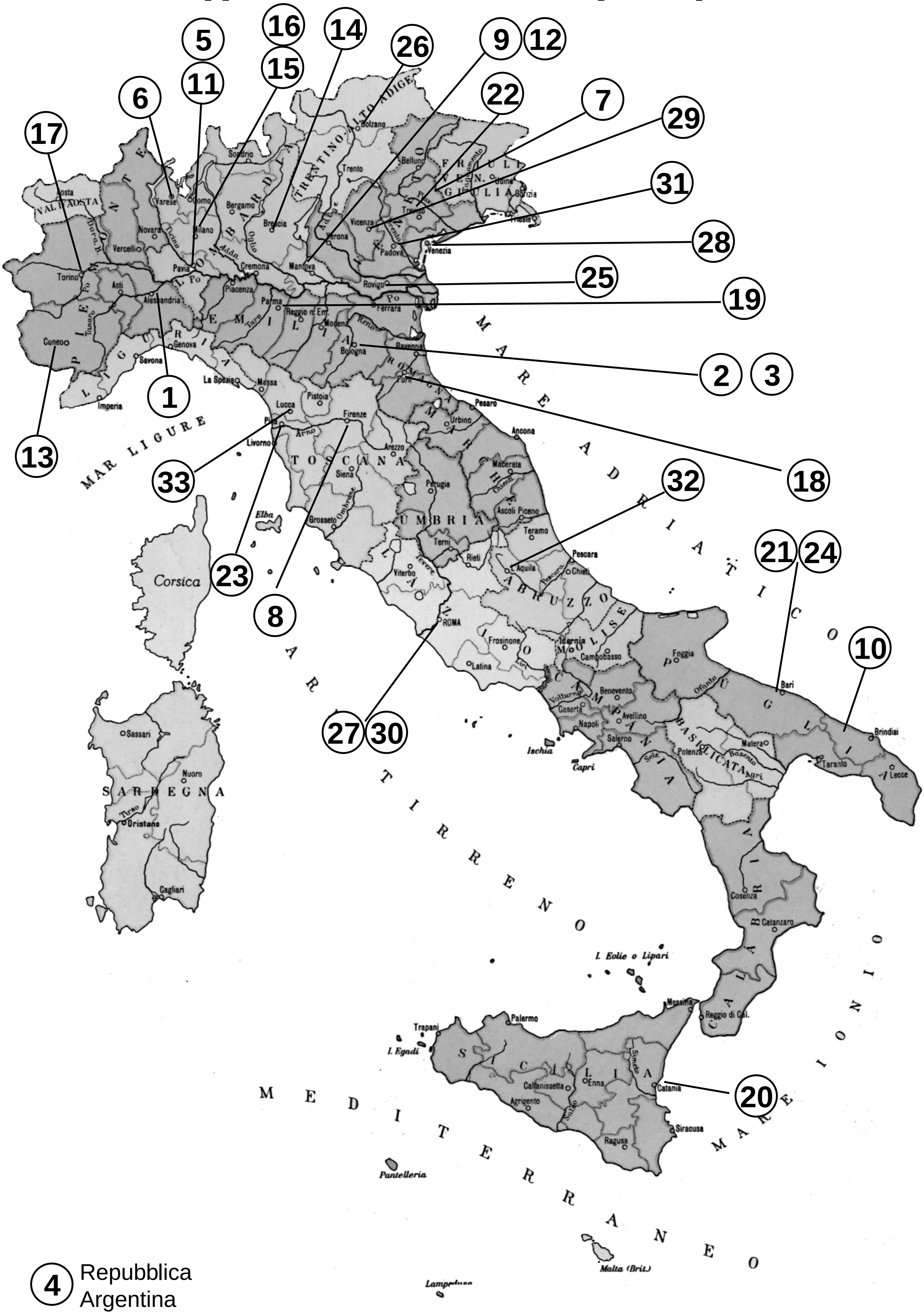
Anna Maria Arpinati



FLAT*landia*

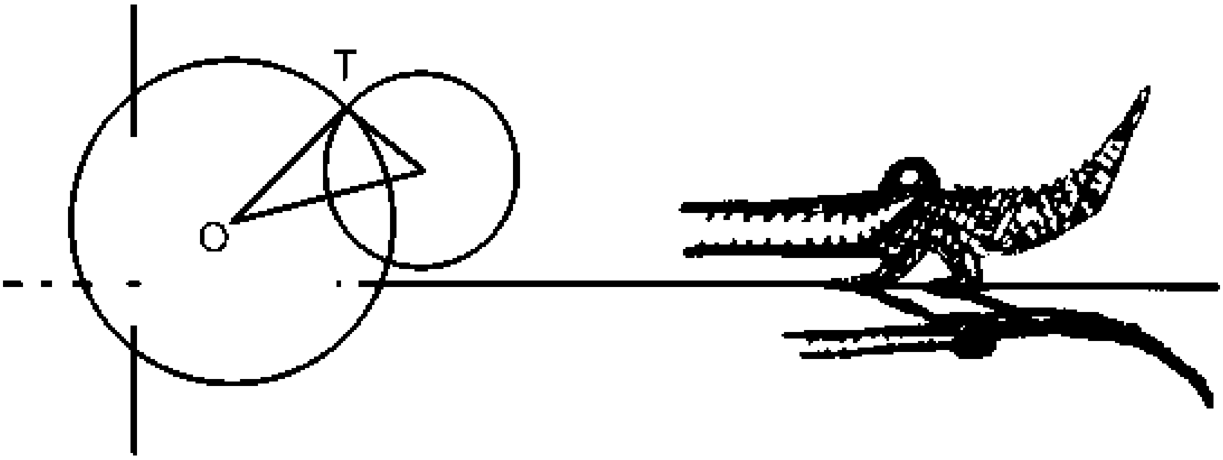
Attività 2001-2002

Mappa delle scuole che hanno partecipato



4 Repubblica Argentina

		Scuola	Frequenza							
			O	N	D	G	F	M	A	M
ELEM	1	“G. Galilei”, II Circolo Alessandria (AL)								◆
MEDIE INFERIORI	2	SM “Panzacchi”, Ozzano (BO)	◆	◆		◆		◆		
MEDIE INFERIORI	3	SM “Jussi”, S. Lazzaro di Savena (BO)	◆							
MEDIE INFERIORI	4	SM “D. Alighieri”, Rosario, Santa Fe - Argentina	◆							
MEDIE INFERIORI	5	SM “Dalla Chiesa”, San Genesio (PV)	◆	◆	◆	◆		◆	◆	◆
MEDIE INFERIORI	6	SM “De Amicis”, Busto Arsizio (VA)	◆	◆		◆				
MEDIE INFERIORI	7	SM “Zanella”, Roveredo in Piano (PN)	◆	◆		◆	◆	◆		◆
MEDIE INFERIORI	8	SM “L. da Vinci”, Rufina (FI)	◆	◆		◆	◆	◆		◆
MEDIE INFERIORI	9	SM IC 2, Suzzara (MN)		◆		◆	◆	◆		
MEDIE INFERIORI	10	SM “N. Orlandini Barnaba”, Ostuni (BR)			◆					
MEDIE INFERIORI	11	SM “Bergamaschi”, Torrevecchia Pia (PV)					◆	◆	◆	◆
MEDIE INFERIORI	12	SM “B. Croce”, Gonzaga (MN)						◆		
MEDIE INFERIORI	13	Scuola Media di Venasca (CN)						◆		
MEDIE INFERIORI	14	SM “Caduti di Piazza Loggia”, Ghedi (BS)						◆		
ISTITUTI TECNICI	15	ITI “G. Giorgi”, Milano (MI)	◆							
ISTITUTI TECNICI	16	ITI, LST “Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)		◆						◆
ISTITUTI TECNICI	17	ITI “E. Ferrari”, Torino (TO)		◆	◆		◆			
ISTITUTI TECNICI	18	ITI “B. Pascal”, Cesena (FC)				◆				
ISTITUTI TECNICI	19	ITI, LST “Berenini”, Fidenza (PR)			◆	◆	◆	◆		◆
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	20	LS “E. Boggio Lera”, Catania (CT)	◆	◆	◆					
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	21	LS “G. Galilei”, Bitonto (BA)	◆		◆			◆		◆
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	22	LS “Giorgione”, Castelfranco Veneto (TV)	◆	◆			◆			
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	23	LS “F. Buonarroti”, Pisa (PI)	◆							
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	24	LS “E. Amaldi”, Bitetto (BA)	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	25	LS “G. Galilei”, Adria (RO)	◆							
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	26	LST “B. Pascal”, Merano (BZ)	◆			◆				
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	27	LS “E. Majorana”, Guidonia (RM)	◆	◆						
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	28	LS “G. Galilei”, Dolo (VE)		◆						
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	29	LS “N. Tron”, Schio (VI)			◆					
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	30	LC “Orazio”, Roma (RM)				◆				
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	31	LL “D. Alighieri” Padova (PD)				◆				
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	32	LS “A. Bafile”, L’Aquila (AQ)					◆	◆	◆	
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	33	LS “Michelangelo”, Forte dei Marmi (LU)						◆		

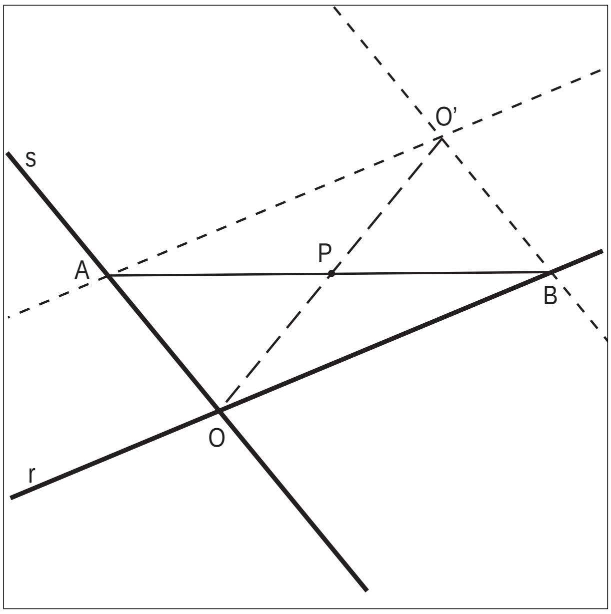


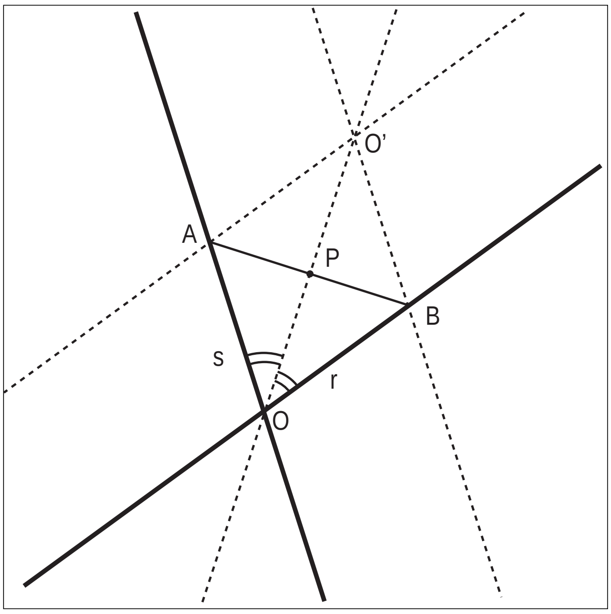
FLATlandia

Problemi e soluzioni

1 - 15 Ottobre 2001

Siano r ed s due rette incidenti in O e sia P un punto non appartenente ad esse.
a) Costruire un punto A su r ed un punto B su s in modo che il segmento AB abbia P come punto medio.
b) Come deve essere preso il punto P affinché la retta OP sia asse di AB?
Motivare le risposte.





Commento

Abbiamo ricevuto diciotto risposte, una delle quali però non è leggibile, a causa di una errata procedura di spedizione. Sette provengono da scuole medie inferiori e una di queste, come nell'Ottobre dello scorso anno, ci è giunta da Rosario in Argentina.
Anche se le soluzioni inviate non sono tutte valide, ci fa piacere riscontrare questo interesse per le questioni di geometria. A chi non ha avuto successo suggeriamo di riprovare!
Le scuole che hanno partecipato sono:

SM "Panzacchi", Ozzano (BO)
SM "Jussi ", S. Lazzaro di Savena (BO)
SM "Dante Alighieri", Rosario, Santa Fe, Argentina
SM "Dalla Chiesa", San Genesio (PV)
SM "De Amicis", Busto Arsizio (VA)
SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)
SM "L. da Vinci", Rufina (FI)
ITI "G. Giorgi", Milano (MI)
LST "B. Pascal", Merano (BZ)
LS "E. Boggio Lera", Catania (CT) (due risposte)
LS "G.Galilei", Bitonto (BA)
LS "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)
LS "F. Buonarroti", Pisa (PI)
LS "E. Amaldi", Bitetto (BA)
LS "G. Galilei", Adria (RO) (due risposte)
LS "E. Majorana", Guidonia (RM)

Nel problema proposto si chiedeva di costruire un segmento con gli estremi vincolati su due rette incidenti, essendo

assegnato il suo punto medio e di esaminare poi una situazione particolare.
La risoluzione non presentava eccessive difficoltà ed è stata affrontata in vari modi: c'è chi ha fatto ricorso alla simmetria centrale e/o a quella assiale, chi ha utilizzato le proprietà del parallelogramma e chi il teorema di Talete (o la similitudine).
Un gruppo di alunni della scuola media inferiore ha proposto una costruzione basata sulla proprietà del baricentro, corretta, ma giudicata eccessivamente laboriosa.
Alcune risposte, come abbiamo già detto, sono state considerate non accettabili o per incompletezza o per notevoli imprecisioni di procedimento. Alcune altre, pur recando una costruzione positivamente risolta, presentano errori o carenze nelle motivazioni e/o nelle descrizioni del procedimento.
Fra le risposte giudicate valide presenteremo le parti più significative o per semplicità nella costruzione e/o per chiarezza nella esposizione, in modo da proporre vari modi di risoluzione.
Riteniamo sia opportuno fare prima alcune osservazioni:

- chi usa un software di geometria per indagare il problema, non può ritenere valida come costruzione una figura ottenuta per successivi aggiustamenti; per COSTRUZIONE si può intendere un insieme di "passaggi" che permettono di ottenere una figura che non perda le sue caratteristiche se si modificano i suoi elementi base;
- chi non ha risolto la prima parte, per risolvere la seconda, deve comunque costruire la figura;
- due rette incidenti formano quattro angoli bisecati da due rette bisettrici;
- se AB è diagonale di un parallelogramma, occorre motivare il fatto che, nella nostra costruzione, P appartenga ad essa;
- se A (o B) appartiene ad una retta, è opportuno precisare che il suo corrispondente, in una qualsiasi trasformazione, appartiene alla retta corrispondente;
- per poter applicare il Teorema di Talete, occorrono almeno tre rette parallele.

Per le scuole superiori riportiamo le seguenti risposte:

La soluzione della classe 2B - LS "E. Amaldi"
La soluzione della classe 2C - LS "Giorgione" (una costruzione simile, ma incompleta, è stata proposta da un ragazzo del LST "B. Pascal")
La parte a), secondo modo, della classe 2E - LS "G. Galilei" di Bitonto
La soluzione della classe 3D - LS "F. Buonarroti" (una risposta analoga, ma confusa nella esposizione, è quella inviata da un gruppo della 3D - SM "De Amicis")

Per le scuole medie inferiori, riportiamo:

La parte a) della classe 3P - SM di San Genesio
La parte b) della classe 2A - SM "D. Alighieri" di Rosario
La parte b) secondo modo, della SM di Rufina
La soluzione della SM "Zanella"

NOTA: Le correzioni al testo o i commenti sono scritti in parentesi quadra. Sono racchiuse in doppia parentesi quadra le parti ritenute superflue.

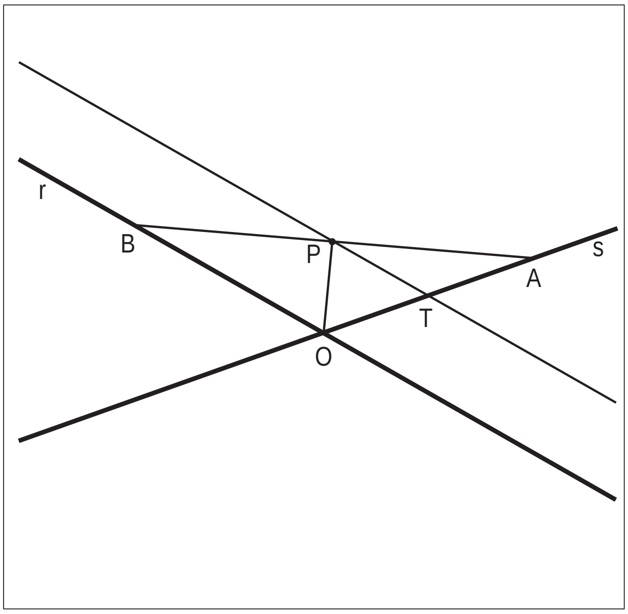
Soluzioni

Classe 2B
Liceo Scientifico "E. Amaldi"
Bitetto (BA)

[Per le figure citate si fa riferimento a quelle allegate al testo del problema]
a) Date le due rette r, s incidenti in un punto [O, e un punto] P non appartenente ad esse, costruiamo il simmetrico O' di O rispetto a P (così P diventa punto medio del segmento OO').
Da tale punto O' mandiamo le parallele alle due rette r, s che le intersecano nei punti A, B richiesti (vedi 1ª figura). Infatti nel parallelogramma O'AOB la diagonale AB dimezza l'altra diagonale proprio nel punto P (unicità del punto medio). Quindi P risulta punto medio di AB.

b) Prendendo il punto P sulla bisettrice b di [uno degli] angoli formati dalle due rette r, s il parallelogramma diventa un rombo (vedi 2ª figura). Infatti il triangolo OAO' è isoscele (angoloAOP = angoloPOB perchè b è bisettrice, angoloPOB = angoloAO'O perché alterni interni).
Ricordando che nel rombo le diagonali sono perpendicolari otteniamo che OP è asse di AB.

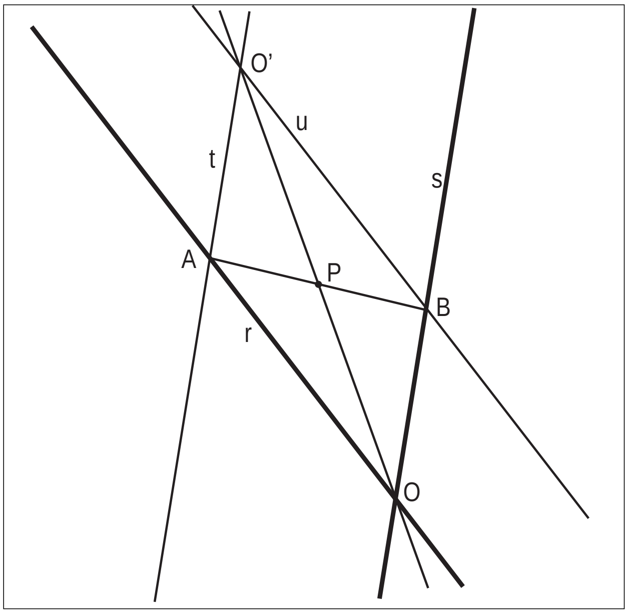
Classe 2C
Liceo Scientifico “Giorgione”
Castelfranco Veneto (TV)



a) Traccio la parallela ad una delle due rette (per es. alla retta “r”) passante per il punto P.
Segno il punto A simmetrico del punto O rispetto al punto T, intersezione della retta precedentemente tracciata con la retta “s”.
Traccio una retta passante per A e P e ottengo B sulla retta r. [[Ho ottenuto un fascio di rette parallele]] [Traccio per A la parallela alla retta “r”], applico il teorema di Talete: risulta che siccome AT è congruente a TO anche AP è congruente a PB.

b) Traccio la bisettrice di [uno degli] angoli formati dalle rette “s” e “r” e su di essa fisso il punto P. Traccio la perpendicolare alla bisettrice passante per P e ottengo i punti A, B sull’intersezione con le due rette iniziali.
Voglio dimostrare che AP è congruente a PB.
Considero i triangoli APO e BPO. Essi hanno: PO in comune, AOP[angolo] congruente a BOP[angolo] per ipotesi (bisettrice), APO[angolo] congruente a BPO[angolo] perché retti per costruzione. Pertanto APO congruente a BPO per il 2° criterio di congruenza dei triangoli.
Quindi AP è congruente a PB (lati [omologhi] di triangoli congruenti).

Classe 2E
Liceo Scientifico “G. Galilei”
Bitonto (BA)



Disegnate le due rette incidenti r ed s e il punto P non appartenente ad esse, abbiamo individuato due modi per ottenere la costruzione dei punti A e B richiesti e soddisfacenti le condizioni imposte:
1) A appartenente ad r; 2) B appartenente ad s; 3) P punto medio di AB.

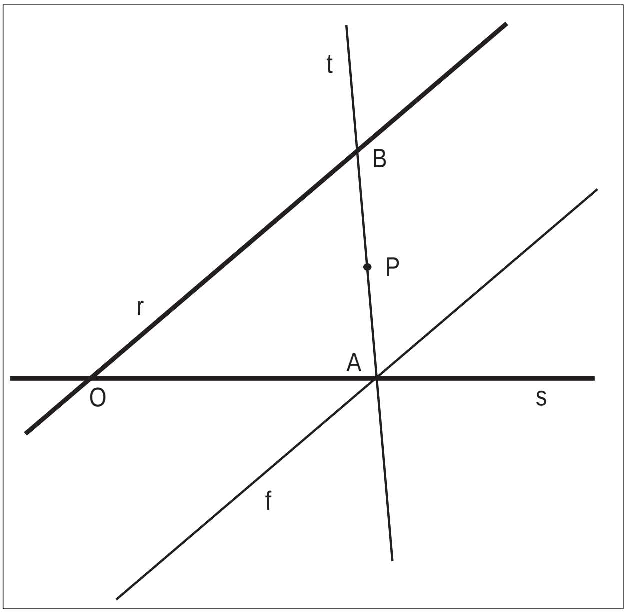
a) [...]
Secondo modo:
Costruita la retta u simmetrica di r rispetto a P e la retta t simmetrica di s rispetto a P, per la proprietà della simmetria assiale, le rette u ed r sono parallele, così pure t ed s. Detti A, B, O’ i punti di intersezione delle coppie di rette (r,t), (s,u) e (t,u), si ha che OBO’A è un parallelogrammo, avendo i lati opposti paralleli, e P ne risulta il centro di simmetria. Ne consegue che P è punto medio di AB.

b) [...]

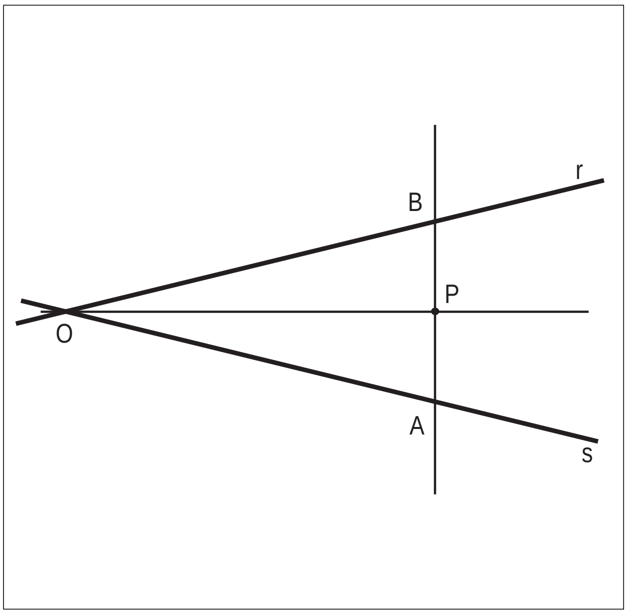
Valerio Borsò, classe 3D
Liceo Scientifico “F. Buonarroti”
Pisa (PI)

a) Per prima cosa utilizzo la simmetria centrale di centro P e costruisco f, simmetrica della retta r. Conoscendo le pro-

prietà delle simmetrie (mantengono le distanze, gli angoli ecc.) posso dire che la retta f è parallela alla retta r e che, se prendo un punto a caso D sulla retta r, avrò il suo simmetrico D', [sulla retta f], tale che PD=PD'.
Nella mia libertà di scelta se prendo il punto A in modo che sia intersezione di s con f, avrò il suo simmetrico B che appartiene alla retta r e tale che BP=PA allineati sulla retta t.



b) Prendo P sulla bisettrice dell'angolo; allora, sapendo che la bisettrice è anche l'asse di simmetria che scambia metà angolo con l'altra metà posso dire che (utilizzando la costruzione analoga a quella precedente) AP=PB e che OA=OB. Allora il triangolo OBA è isoscele e so che la mediana OP della base AB è anche asse della base [[(e anche l'altezza), quindi gli angoli $A\hat{P}O$ e $B\hat{P}O$ sono retti]].



b) [...]

Paolo Agnes e Tania Amodeo, classe 3P
Scuola Media "Dalla Chiesa"
San Genesio (PV)

a) Abbiamo disegnato due rette incidenti; abbiamo preso un punto P sul piano, non appartenente alle rette. Abbiamo disegnato la retta passante per O e P, e abbiamo preso il simmetrico di O rispetto a P.
Chiamiamo Q il punto trovato. Poiché P deve essere punto medio di AB, AB e OQ potrebbero essere le diagonali di un parallelogramma.
Per trovare A e B occorre disegnare il parallelogramma. Per trovare A abbiamo disegnato la parallela alla retta "s" passante per Q. Il punto A è l'intersezione delle due rette.
Per trovare il punto B abbiamo disegnato la parallela ad "r" passante per il punto Q.
Il punto B è l'intersezione delle due rette.

Armas Alejandro, Baccino M. Cecilia, Gorostiaga Lucia, Lignos Melina,
Martínez Eugenia, Pérez Luciana, Ronga Joaquin, Sosa Guadalupe.
Classe 2A turno mattina, Scuola Media Istituto "Dante Alighieri"
Rosario (Santa Fe - Argentina)

a) [...]

b) [...]
Possibilità Nº 2
Il punto P deve essere costruito sulla bisettrice di [uno degli] angoli formati tra le rette r e s dato che: se P è il punto medio del segmento AB, OP sarà asse del segmento AB se OP e AB saranno perpendicolari. [[Questo sarà vero, solo se]] [Allora] il triangolo OAB sarà isoscele, caso in cui OP è necessariamente la bisettrice dell'angolo AOB.

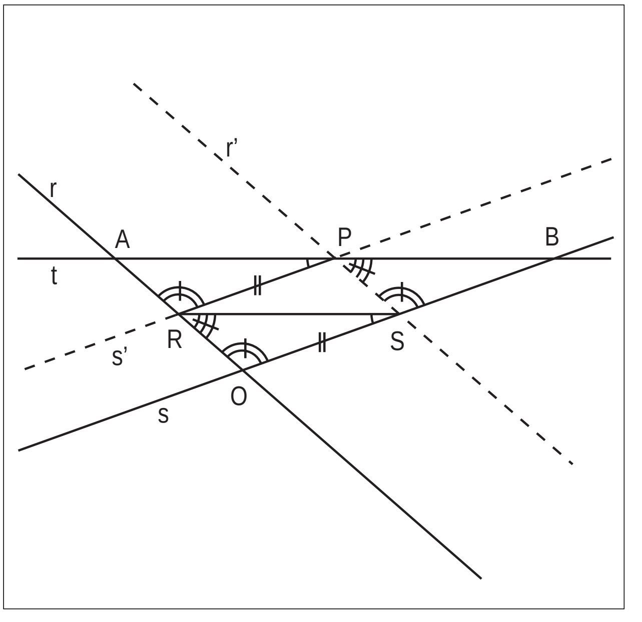
Classe 3B
Scuola Media “L. da Vinci”
Rufina (FI)

a) [...]

b) [...]
2) Ricordiamo che [[ogni punto sul]] la bisettrice [[è equidistante dai lati dell’angolo e che questa stessa]] è asse di simmetria dell’angolo. Immaginiamo quindi di prendere il punto P sulla bisettrice e di condurre per esso la perpendicolare alla bisettrice medesima: il segmento AB sarà diviso in due parti congruenti di [per] cui la bisettrice sarà anche asse. [[Inoltre avremo OA=OB, quindi il triangolo OAB sarà sempre isoscele...]]

Classe 3A
Scuola Media “G. Zanella”
Roveredo in Piano (PN)

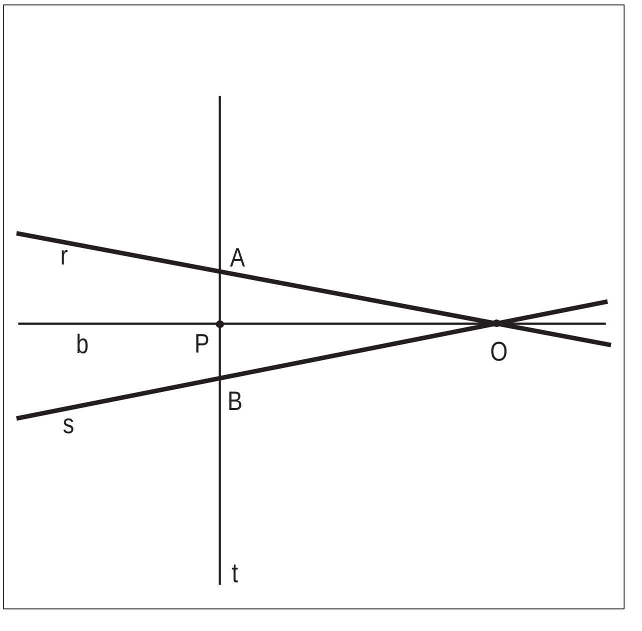
a) Date le rette r ed s incidenti in O ed il punto P non appartenente ad esse.
1. Retta s’ parallela ad s, passante per P; sua intersezione R con r;
2. Retta r’ parallela ad r, passante per P; sua intersezione S con s;
3. Segmento RS;
4. Parallela t al segmento RS, passante per P;
5. Intersezioni di t: con r (A), con s (B).



- Il poligono OSPR è un parallelogramma per costruzione.
- I Triangoli PBS e RSO sono congruenti (gli angoli di vertice P ed R sono congruenti avendo i lati paralleli per costruzione, i segmenti PS ed RO sono lati opposti del parallelogramma e quindi congruenti, gli angoli di vertice S ed O sono congruenti perché i lati risultano paralleli per costruzione); anche il triangolo APR risulta congruente con RSO (il ragionamento è analogo a quello sopra).

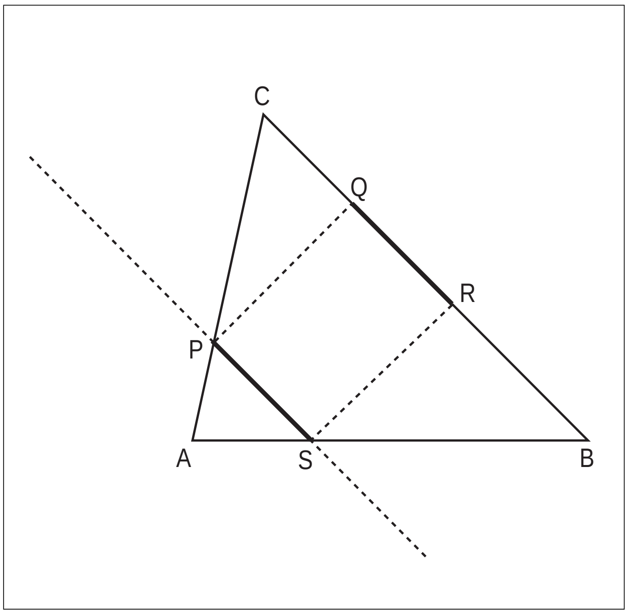
Consegue che i segmenti AP e PB sono congruenti (essendo congruenti ad RS), quindi P è il punto medio del segmento AB (sulla retta t).

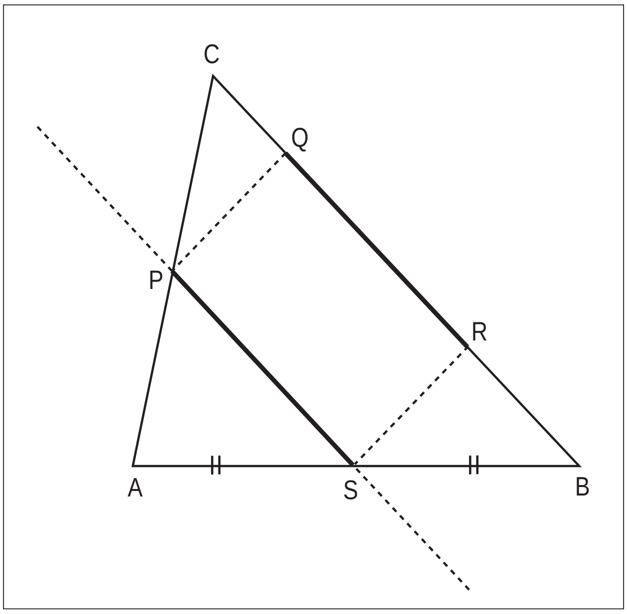
b) La bisettrice (b) è asse di simmetria dell’angolo; posto P sulla bisettrice si traccia la perpendicolare ad essa passante per P e si determina il segmento AB intersecandola con i lati dell’angolo; A e B risultano simmetrici rispetto b e P è il punto medio del segmento AB.

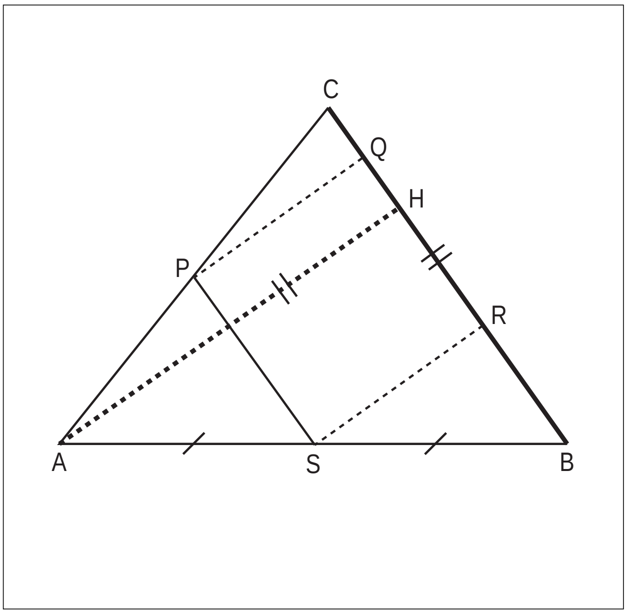


5 - 19 Novembre 2001

Sia ABC un triangolo qualunque.
Da un punto S sul lato AB condurre la retta parallela al lato CB fino ad incontrare in P il lato AC.
Siano R e Q le proiezioni ortogonali di S e P sulla retta CB.
a) Di quale tipo è il quadrilatero SPQR?
b) Determinare una possibile posizione per il punto S affinché l’area di SPQR sia la metà dell’area di ABC. Tale posizione è unica?(Facoltativo)
c) Qualora sia verificata la condizione (b), a quale ipotesi deve soddisfare il triangolo ABC affinché SPQR sia un quadrato?
Motivare le risposte.







Commento

Abbiamo ricevuto quattordici risposte: sei provengono dalle scuole medie inferiori, sette dalle scuole superiori e una è di provenienza sconosciuta.
Le scuole che hanno partecipato sono:

SM Istituto comprensivo 2 Suzzara (MN)
SM “Dalla Chiesa”, San Genesio (PV)
SM “Panzacchi”, Ozzano (BO)
SM “De Amicis”, Busto Arsizio (VA)
SM “L. da Vinci”, Rufina (FI)
SM “Zanella”, Roveredo in Piano (PN)
ITI “E. Ferrari”, Torini (TO)
ITI LST “Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)
LS “E. Amaldi”, Bitetto (BA)
LS “G. Galilei”, Dolo (VE)
LS “E. Majorana”, Guidonia (RM)
LS “E. Boggio Lera”, Catania (CT)
LS “Giorgione”, Castelfranco Veneto (TV)

Il problema proponeva di inscrivere un rettangolo in un triangolo e di individuare due situazioni particolari: quando la superficie del rettangolo è metà di quella del triangolo e, in tal caso, quando il quadrilatero diventa quadrato. Era richiesta come facoltativa la dimostrazione della unicità del caso particolare. Il problema è stato affrontato in vari modi. Chi ha utilizzato i teoremi della geometria euclidea (proprietà dei punti medi, similitudine), chi ha fatto ricorso alle proprietà della simmetria (centrale o assiale). L’uso delle simmetrie ha ingenerato però qualche confusione; qualcuno ha iniziato introducendo la simmetria e concluso con la congruenza dei triangoli, producendo un eccesso di giustificazioni; qualcun’altro invece si è basato sulla evidenza della simmetria tralasciando alcune necessarie giustificazioni.

Pochi hanno tentato la dimostrazione della unicità, senza riuscirvi. Un modo per verificare la unicità del rettangolo, la cui area sia metà di quella del triangolo, è di cercare la soluzione per via algebrica. Ricorrendo alla similitudine si giunge ad una semplice equazione di primo grado, la cui soluzione, se esiste, è unica.

Poche sono le risposte completamente corrette. Molti hanno considerato nell’ultima parte del problema solo casi particolari. Ben cinque risoluzioni non sono accettabili per incompletezza o mancanza delle giustificazioni.

Inoltre, anche nelle risposte accolte, abbiamo riscontrato varie imprecisioni nella esposizione.

Una di queste è la confusione fra proiezione ortogonale e distanza.

Abbiamo scelto di riportare le seguenti soluzioni:

per le scuole medie inferiori

SM “Dalla Chiesa” di San Genesio, parte (a) e (b), privata della figura in quanto non indispensabile alla comprensione del testo.
SM “L. da Vinci” di Rufina (solo le parti più significative)
Scuola Media di Suzzara (completa)
SM “Zanella” di Roveredo, parte (a), in cui si considerano le diverse possibilità della figura e parte (b)
SM “De Amicis” di Busto Arsizio, parte (b) e (c) in cui si utilizza la simmetria assiale

per le scuole superiori

LST Cesaris, completa, simile nella parte (a) e (b) a quella del LS Amaldi
ITI Ferrari di Torino, parte (b), in quanto si differenzia da tutte le precedenti (una soluzione simile è stata presentata dal LS Boggio Lera di Catania, più imprecisa nella esposizione)

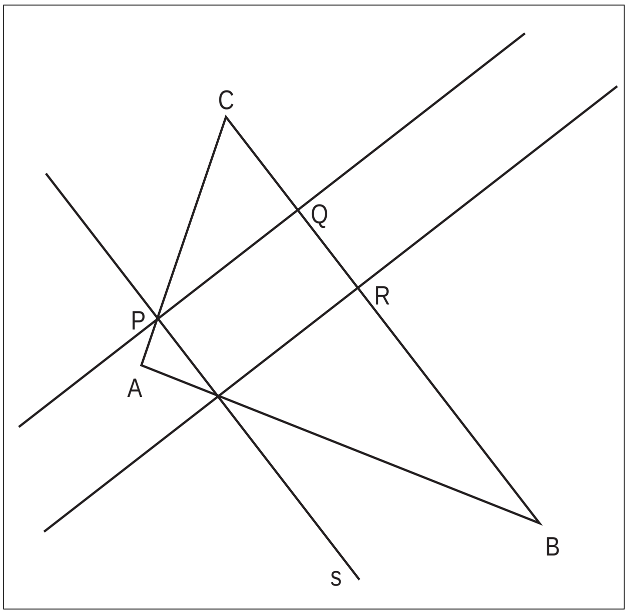
NOTA: *Le correzioni al testo o i commenti sono scritti in parentesi quadra. Sono racchiuse in doppia parentesi quadra le parti ritenute superflue.*

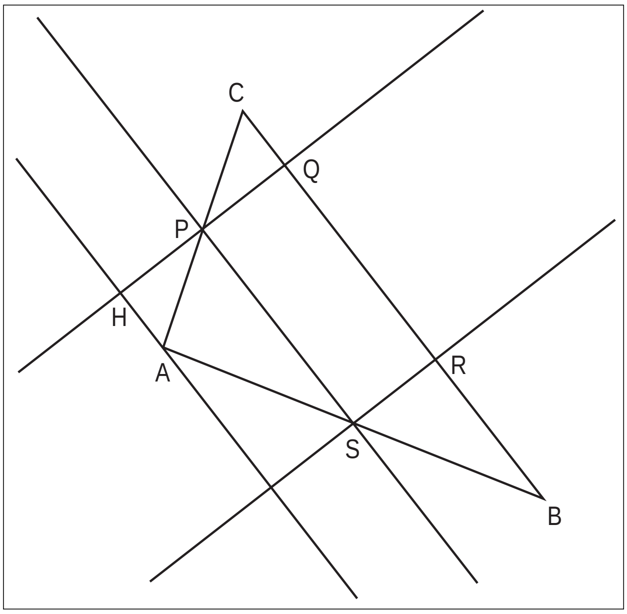
Soluzioni

F. Feroldi 3C, P. Rovesti 3C, M. Masella 3A, G. Fanetti 3A
Istituto Comprensivo 2 - Scuola Media
Suzzara (MN)

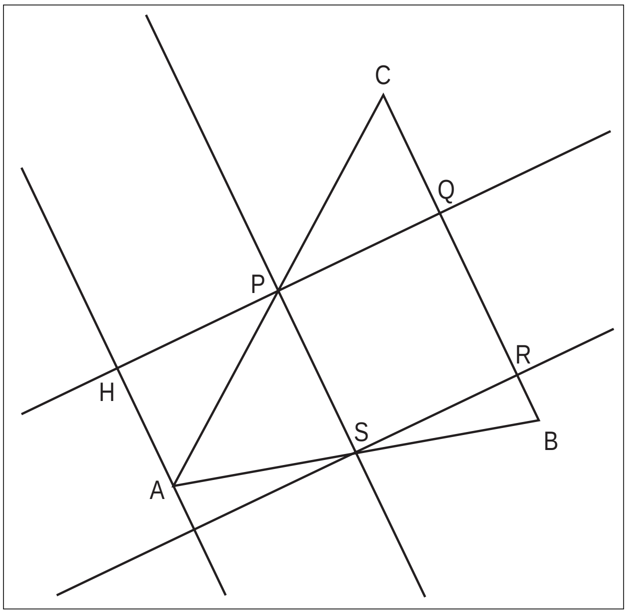
a) il quadrilatero SPQR è un rettangolo infatti, SP è parallelo a QR per costruzione, SR parallelo a PQ perché perpendicolari allo stesso lato CB; inoltre gli angoli in Q ed R sono entrambi retti (perché Q ed R sono le proiezioni di P ed S su BC), di conseguenza sono retti anche gli angoli P ed S.

b) Il punto S deve essere posizionato nel punto medio del lato AB. In questo caso tracciando la parallela al lato BC che passa per A otteniamo un fascio di rette parallele tagliate da alcune trasversali. Poiché S è il punto medio di AB, P è punto medio di HQ. Il segmento PS, unendo i punti medi di due lati di un triangolo, è metà del terzo lato.





L’area del rettangolo SPQR è PS x PQ; l’area del triangolo ABC è (BC x QH) / 2; poiché BC = 2PS e QH = 2PQ, l’area del triangolo ABC è (2PSx 2PQ)/ 2 = 2(PS x PQ), cioè l’area del triangolo è doppia dell’area del rettangolo.

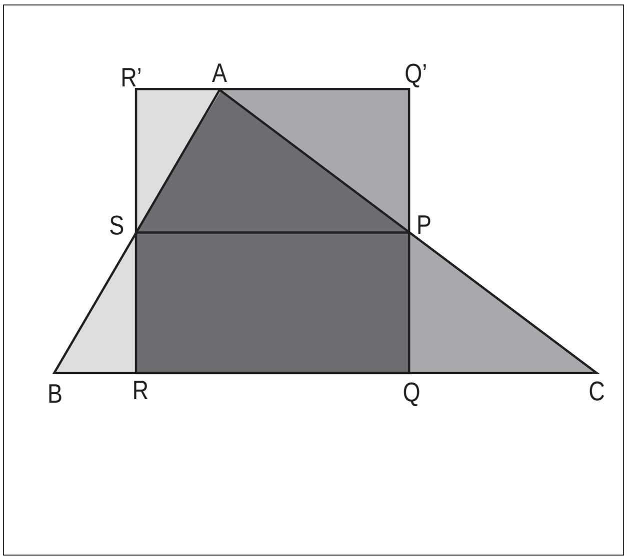


c) La base BC del triangolo ABC deve essere uguale all’altezza HQ ad essa relativa; in questo caso, infatti, i due lati consecutivi (PS e PQ) del rettangolo risultano uguali perché metà di segmenti uguali.

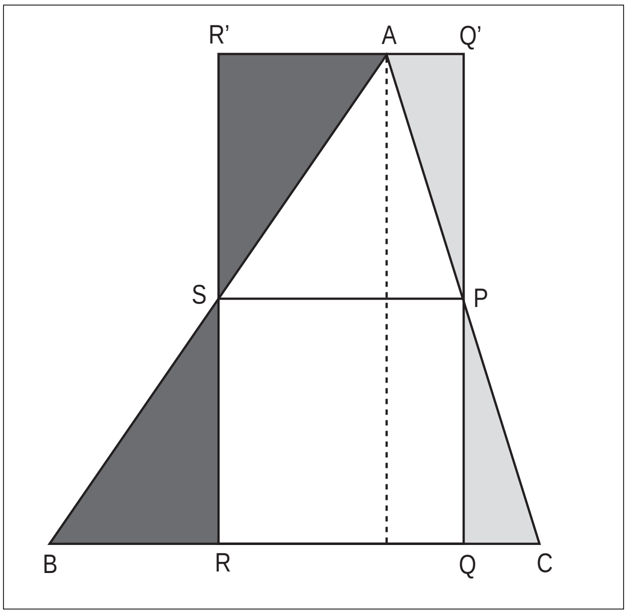
Classe 3B
Scuola Media “L. da Vinci”
Rufina (FI)

a) *Di che natura sarà il poligono SRPQ?*
Il poligono SPQR è un rettangolo perché costruito tracciando le parallele SP a CB e le perpendicolari passanti a S e P al lato CB medesimo [risultando così perpendicolari anche a CB].

b) *Quale posizione dovrà assumere il punto S affinché l’area del poligono SPQR sia equivalente alla metà dell’area del triangolo ABC?*
Perché si verifichi la condizione richiesta, il punto S deve essere preso sul punto medio del lato AB.
Considero infatti il triangolo ABC costituito dal poligono SPQR e dai triangoli SRB, PCQ, PAS. Con simmetria centrale costruisco il simmetrico dei due triangoli SRB e PCQ (centro in S, punto medio di AB e centro in P punto medio di AC); si forma così un rettangolo SPQ’R’ [occorre prima dimostrare l’allineamento dei punti R’, A,



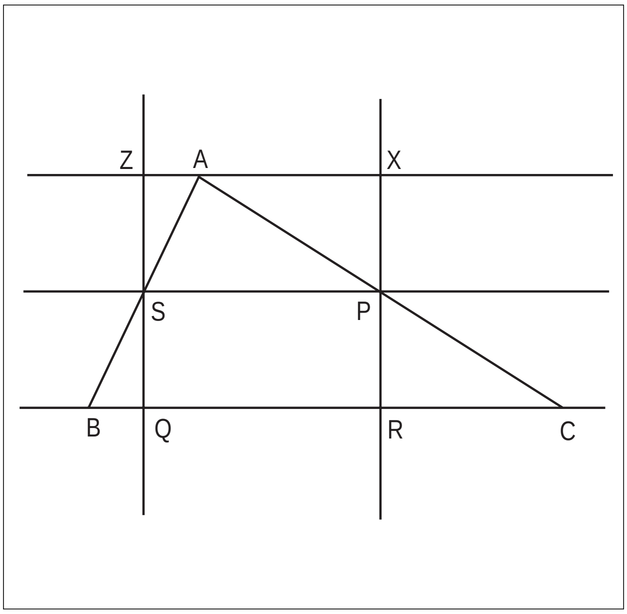
Q’, come evidenziato nella figura] equivalente al rettangolo SPQR perché hanno stessa [uguale o congruente] altezza e stessa base.



Inoltre il rettangolo QRR’Q’ è equivalente al triangolo ABC perché composto dalle stesse figure del triangolo.
c) *Quale ipotesi deve soddisfare il triangolo ABC affinché SPQR sia un quadrato?*
Per quanto già detto la condizione richiesta si verifica nel caso in cui il poligono QRR’Q’ sia un rettangolo con le dimensioni una doppia dell’altra.
Quindi il triangolo ABC di partenza dovrà avere altezza e base uguali.

De Bernardi, Ferrario, Gallazzi, Mecchina, Santoro, Vargiu
Classe 3D - Scuola Media “E. De Amicis”
Busto Arsizio (VA)

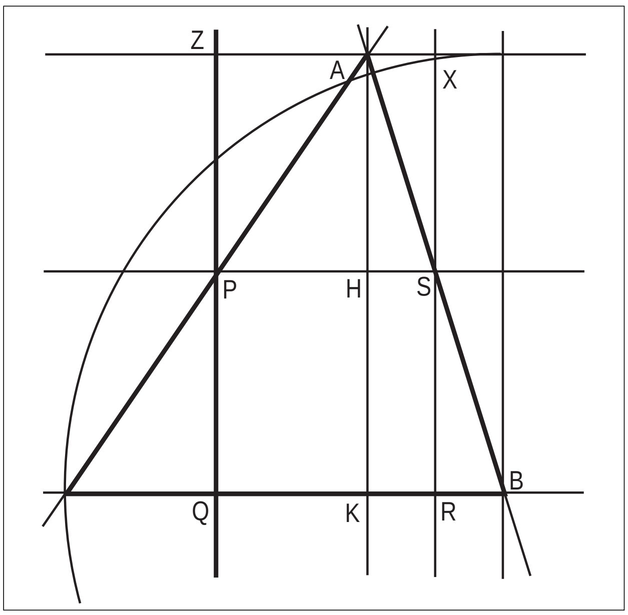
a) […]



b) [Sia S punto medio di AB]
Ribaltando (simmetria assiale con asse SP) il quadrilatero SPQR attorno al lato SP ottengo il rettangolo SPXZ che è uguale a SPQR perché il movimento è una isometria. Allora il quadrilatero QRZX è equivalente al triangolo ABC in quanto i triangoli SAZ e SBQ come AXP e PRC sono uguali secondo il 1° criterio di uguaglianza [Occorre prima dimostrare che il punto A appartiene al lato SZ].
Per i triangoli SAZ e SBQ :
- Gli angoli BSQ = ZSA perché opposti al vertice
- SB = SA e SQ = SZ per costruzione.

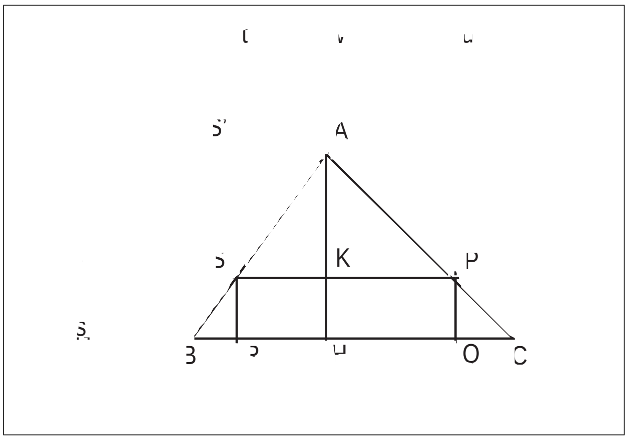
Per i triangoli PRC e PAX:
- Gli angoli SPC = APX perché opposti al vertice
- AP = PC per il teorema di Talete.

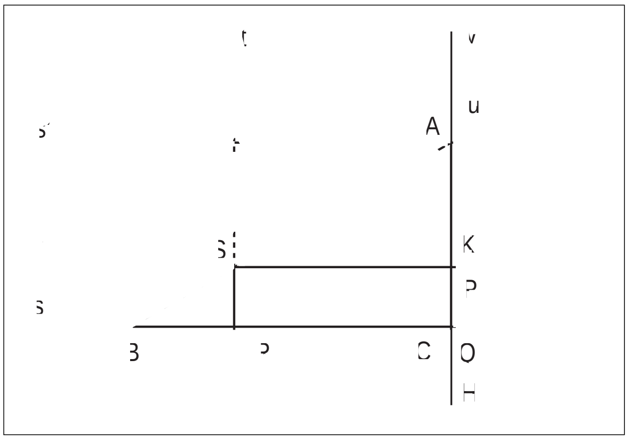
Pertanto QRXZ è equivalente ad ABC ed è il doppio di SPQR.
SPQR è metà di ABC.



c) La dimostrazione è ovvia! Qualora sia verificata la condizione (B), il triangolo ABC deve soddisfare alla condizione che la base CB e la relativa altezza AK devono essere congruenti!
Infatti [supposto che SPQR sia un quadrato] AK è il doppio del lato del quadrato, la lunghezza di CQ più quella di RB equivale alla lunghezza del lato SP, ma la base [CB] è composta da: CQ, RB e il lato del quadrato; quindi l’altezza AK é uguale alla base CB.

Classe 3A
Scuola media “G. Zanella”
Roveredo in Piano (PN)

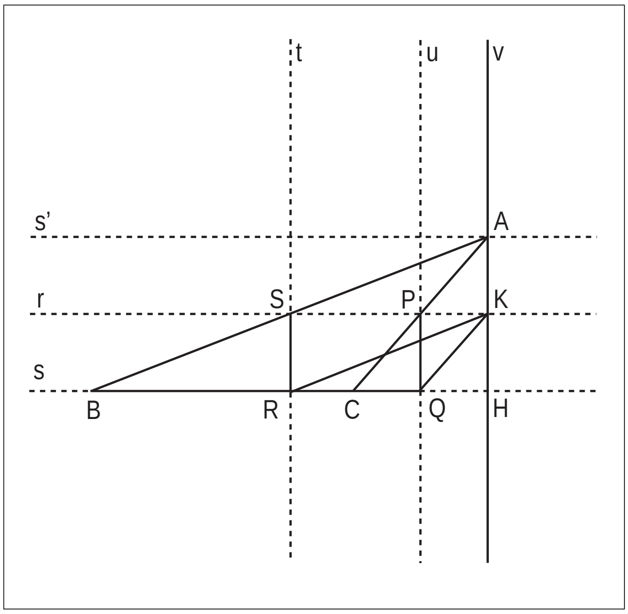




COSTRUZIONE.
1. Due rette parallele (s, s’);
2.Triangolo ABC: A su s’, B e C su s;
3. Costruzione come indica il testo del problema (... retta r parallela a s per S; retta t perpendicolare a s, per S; retta u perpendicolare a s per P; ...);
4. Retta v, perpendicolare a s e passante per A;
5. Intersezione H di v con s; intersezione K di v con r.
Consideriamo A punto di animazione:
* H (piede dell’altezza relativa al lato BC dal vertice A) coincide con C o con B (triangolo rettangolo);
* è esterno al segmento BC (triangolo ottusangolo);
* sta tra C e B (il triangolo può essere rettangolo, acutangolo, ottusangolo: l’angolo di vertice A dipende dalla distanza delle rette s, s’ e dal segmento BC).

a) Il quadrilatero SPQR è rettangolo per costruzione (lati opposti su rette parallele e gli angoli risultano retti perché ottenuti disegnando le rette t ed u perpendicolari ad s ed r).

b)
COSTRUZIONE
6. Segmenti RK, KQ.
Il punto S coincide con il punto medio del lato AB.



- I triangoli ABC e KRQ sono simili, avendo gli angoli corrispondenti congruenti, dato che i lati risultano paralleli. (I segmenti BS e SA sono congruenti per costruzione; le tre rette s, r, s’ sono parallele per costruzione e per il Teorema di Talete, i segmenti AK e KH risultano congruenti; i segmenti KH e SR sono congruenti e paralleli. Consegue che SR ed AK sono congruenti e paralleli, quindi SKRS è un parallelogramma. Il segmento RK è parallelo a SA e ad AB che lo contiene. RK risulta la metà di AB. Ragionamento analogo vale per i segmenti KQ e AC (tra loro paralleli; si consideri il parallelogramma PQKA)).
- Il triangolo RQK ha il lato RQ e la relativa altezza KH congruenti coi i lati del rettangolo RQPS, quindi la sua area è la metà di quella del rettangolo;
- L’area del rettangolo SPQR essendo il doppio dell’area del triangolo RKQ è la metà dell’area del triangolo ABC (i lati corrispondenti RK ed BA stanno nel rapporto 1 a 2, vedi sopra, e il rapporto delle aree dei rispettivi triangoli è 1 a 4).

c) […]

Agnes, Amodeo, Braschi, Civardi, Izzo, Loffredo, Pozzato, Tasti
Classe 3P Scuola Media "Dalla Chiesa"
S. Genesio (PV)

a) La figura SPQR ha due coppie di lati opposti paralleli (BC//SP per costruzione e SR//PQ perché rette perpendicolari ad una stessa retta). E' quindi un parallelogramma. Dal momento che possiede anche due angoli retti per costruzione, è un rettangolo.
Ci accorgiamo che il triangolo ABC e il triangolo ASP sono simili: questo perché SP//BC e quindi gli angoli PCB=APS e CBS=PSA perché sono angoli corrispondenti; l'angolo BAC è in comune.

b) Per fare in modo che l'area di SPQR sia la metà dell'area di ABC, il punto S deve coincidere con il punto medio del lato AB.
- B è il simmetrico di A in una simmetria centrale di centro S.
Il punto P è punto medio di AC, dato che i triangoli ABC e ASP sono simili, di conseguenza anche il punto C è simmetrico di A in una simmetria centrale di centro P.
- Tracciamo una retta parallela ai segmenti SP e BC passante per il punto A e la chiamiamo "s".
Prolungo PQ e chiamiamo M il punto d'intersezione con la retta "s".
Prolungo RS e chiamiamo N il punto d'intersezione con la retta "s".
I due triangoli PCQ e AMP sono congruenti. Lo deduciamo dal fatto che si corrispondono in una simmetria centrale di centro P perché: [la dimostrazione che segue è superflua se si fa notare che M è il simmetrico di Q]
- PA=PC
- (gli angoli) CQP=PMA perché angoli retti
- (gli angoli) QPC=MPA perché angoli opposti al vertice.
Per gli stessi motivi anche i triangoli SNA e SRB sono congruenti, perché si corrispondono in una simmetria centrale di centro P.
Il rettangolo MNRQ è equiesteso al triangolo ABC per somma di figure congruenti. Poiché NS=RS, il rettangolo SPQR ha area uguale 1/2 dell'area MNRQ, quindi l'area di SPQR è uguale a 1/2 dell'area di ABC.

c) [...]

Monica Bandoni
Classe 2LT - Liceo scientifico tecnologico
ITI "Cesaris" - Casalpusterlengo (LO)

a) Il quadrilatero ottenuto è un rettangolo. E' un parallelogramma perché ha PS // CB per costruzione, PQ ed RS sono le [[...]] distanze di due rette parallele, quindi sono isometriche e parallele.
E' un rettangolo perché PQ ed RS (distanze) formano angoli retti.

b) L'unica [Una] posizione per cui è possibile il verificarsi del rapporto tra le due aree è quando il punto S è il punto medio di AB. Infatti, in tal caso, [per la proprietà dei punti medi ...] abbiamo che PS è [[pari al]] la metà di BC; per questo anche SR è metà dell'altezza AH. L'area del triangolo si trova facendo il semiprodotto tra l'altezza e la base del triangolo; allora l'area del triangolo è uguale al prodotto tra BC e AH diviso 2.
L'area del rettangolo è data da RQ * SR =1/2BC * 1/2AH =1/4(BC *AH) = 1/2 area (ABC).

c) Il triangolo ABC, di base AB, dovrebbe avere l'altezza AH isometrica alla base, in tal caso i lati del rettangolo, isometrici rispettivamente a metà base e a metà altezza risultano uguali.

Marco Guernieri e Riccardo Zambarbieri
Classe 2A ST - Istituto "E. Ferrari"
Torino (TO)

a) […]

b) S deve coincidere con il punto medio di AB.
Infatti, per il teorema di Talete, P coinciderà con il punto medio di AC.
Conducendo il segmento AH perpendicolare a CB, che incontra PS in O, il triangolo ABC viene suddiviso in due trian-

goli rettangoli, composti a loro volta da quattro triangoli congruenti.

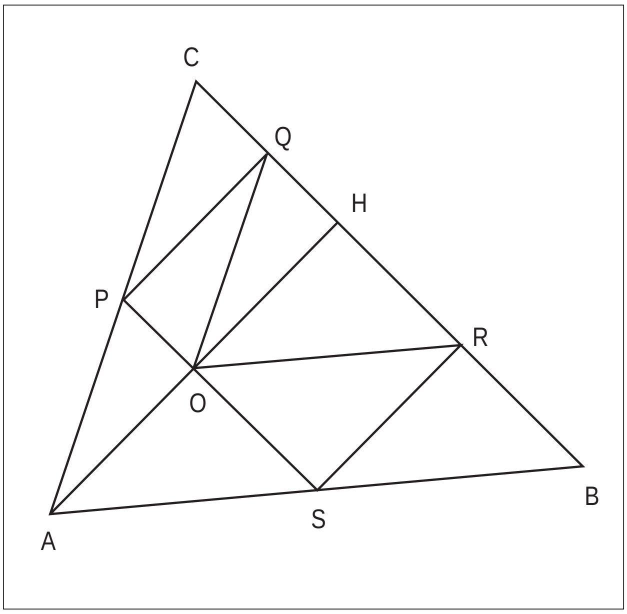
AHC=AOP+OPQ+PQC+OHQ=4*OPQ

ABH=ASO+SBR+ORH+SRO=4*SRO

Il rettangolo SPQR è composto da quattro triangoli uguali a due a due:

SPQR=2*OPQ+2*SRO

ABC=2*SPQR



Dimostro che i triangoli OHQ e OPQ sono congruenti:

-OQ in comune

-gli angoli OHQ e OPQ sono congruenti perché retti

-gli angoli POQ e OQH sono congruenti perché alterni interni (parallele PS e CB, trasversale OQ).

Analogamente si dimostra che AOP è congruente a PQC ed a OPQ.

Dimostro che ASO e SBR sono congruenti:

-AS=SB perché S è il punto medio di AB

-gli angoli OSA e RBS sono congruenti perché corrispondenti (parallele OS e RB, trasversale AB)

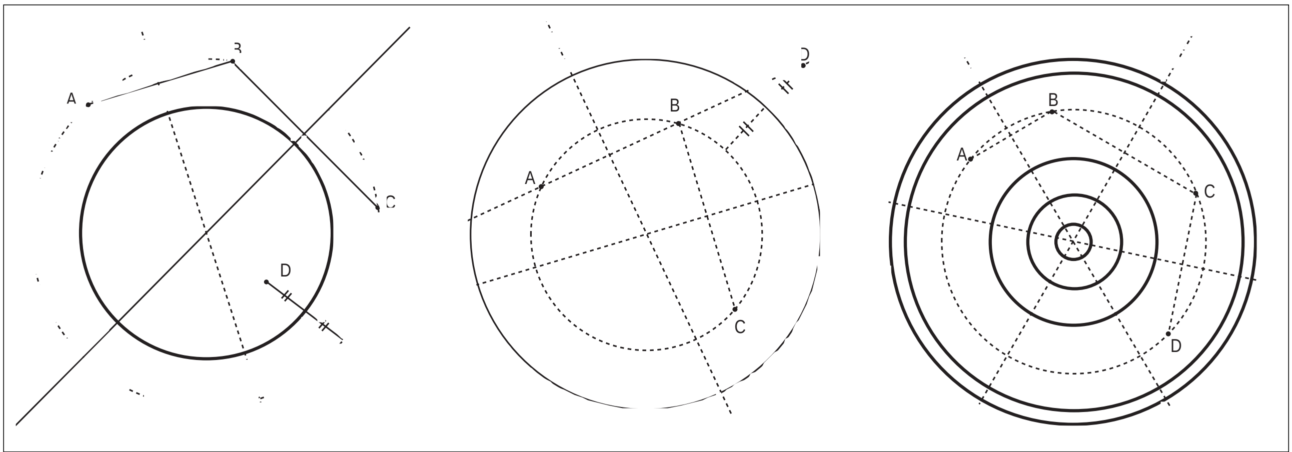
-gli angoli OAS e RSB sono congruenti perché corrispondenti (parallele OA e RS, trasversale AB).

Analogamente si dimostra che anche i triangoli ORH e SRO sono congruenti ad ASO e SBR.

c) […]

3 - 17 Dicembre 2001

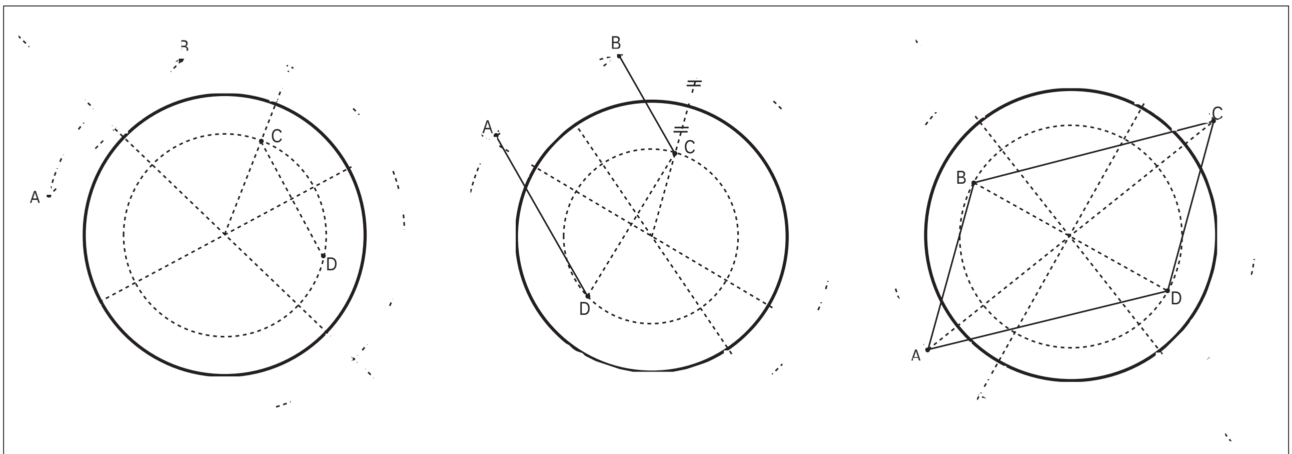
a) Per distanza di un punto da una circonferenza si intende il minimo segmento che congiunge quel punto con un punto della circonferenza.
Come costruire tale distanza?
Giustificare la risposta.
b) Dati ora quattro punti in uno stesso piano, non tutti sulla stessa retta, disegnare una circonferenza equidistante da essi.
Motivare la costruzione.
c) Il problema proposto in (b) ha un'unica soluzione?



Si possono ottenere quattro circonferenze distinte fornite dalle terne di punti (A,B,C),(A,B,D),(A,C,D),(B,C,D)

In questo caso si ottengono tre circonferenze distinte fornite dalle terne di punti (A,B,C),(A,D,C),(B,D,C)

Si hanno infinite soluzioni: tutte le circonferenze concentriche con quella per i quattro punti



Si hanno tre distinte circonferenze fornite dalle coppie di segmenti (AB,CD), (AC,BD), (BC,AD)

Se AD//BC si hanno due sole circonferenze fornite dalle coppie di segmenti (AB,CD), (AC,BD)

Se AB//CD e AD//BC si ha una sola soluzione data dalla coppia di segmenti (AC,BD)

Commento

Abbiamo ricevuto in tutto undici risposte provenienti da dieci scuole. Solo due scuole medie inferiori hanno tentato l'impresa.
Il problema proponeva una riflessione sul concetto di distanza fra un punto ed una circonferenza e richiedeva un "pizzico" di fantasia per costruire una circonferenza equidistante da quattro punti. Si chiedeva poi, per stimolare la ricerca di eventuali altre soluzioni, se quella trovata fosse l'unica soluzione possibile.
Nelle risposte pervenute sono stati individuati due percorsi per la costruzione della suddetta circonferenza e, per ciascuno di essi, qualcuno ha indagato su quante soluzioni fossero possibili in base alla scelta dei quattro punti.
In nessuna risposta sono stati individuati tutti i casi che potevano presentarsi, ma ciò non era richiesto.
Sono state considerate complete le soluzioni in cui risulta:
• una esauriente presentazione e giustificazione della distanza richiesta nel punto (a)
• la corretta descrizione di una costruzione nella parte (b)
• non affermativa, fornendo almeno un esempio, la risposta alla parte (c)
Poche sono le risposte che soddisfano tutti questi requisiti; si sono riscontrate infatti varie carenze e/o errori nella prima e terza parte. Quasi tutti i partecipanti hanno fornito una costruzione accettabile nella seconda parte: la maggior parte ha considerato la circonferenza per tre dei punti dati e dimezzato la distanza del quarto da tale circonferenza, alcuni invece hanno considerato due circonferenze concentriche ciascuna per due dei punti assegnati e dimezzato la loro distanza.
A corredo del testo viene presentata, a cura del comitato, una serie di figure che illustrano varie possibilità di soluzione del quesito (b).
Le scuole che hanno partecipato sono:

SM "Dalla Chiesa", San Genesio (PV)
SM "N. Orlandini Barnaba", Ostuni (BR)
ITI "E. Ferrari", Torino (TO)
ITI LST "Berenini", Fidenza (PR) (due risposte)
LS "N. Tron", Schio (VI)
LS "G. Galilei", Bitonto (BA)
LS "E. Boggio Lera", Catania (CT)
LS "E. Amaldi", Bitetto (BA)

Si è convenuto di presentare le seguenti soluzioni:

Liceo Scientifico Tecnologico "Cesaris", che ha fornito la risposta più completa prendendo in esame nel punto (b) due tipi di costruzione (la seconda di queste è stata fornita anche dall'ITI "Ferrari" e dal LS "Boggio Lera").
Liceo Scientifico "N. Tron" di Schio, parte (b) e (c), che fornisce una descrizione più dettagliata della prima costruzione esaminata nella risposta precedente.
Scuola Media di S. Genesio a testimonianza dell'impegno dimostrato.

NOTA: *Le correzioni al testo o i commenti sono scritti in parentesi quadra. Sono racchiuse in doppia parentesi quadra le parti ritenute superflue.*

Soluzioni

Gruppo di alunni
Classe 2LT - Liceo scientifico tecnologico
ITI "Cesaris" - Casalpusterlengo (LO)

a) Consideriamo una circonferenza c di centro O e un punto P ad essa esterno. Congiungiamo P con O. Il segmento PO interseca la circonferenza in H. PH è la distanza di P da c.
Infatti congiungendo P con un qualsiasi altro punto R della circonferenza, PH < PR, utilizzando il teorema che dice "in un triangolo, la differenza di due lati è minore del terzo lato e applicandolo al triangolo PRO si ha
PO - OR < PR cioè, poiché OR = OH, PH < PR
Se il punto P fosse interno alla circonferenza, la sua distanza sarebbe data dal segmento PH, dove H è l'intersezione tra c e il prolungamento, oltre P, del raggio passante per P. In questo caso preso un qualsiasi altro punto R di c e ragionando sul triangolo ORP si ottiene ancora
PR > RO - PO = HO - PO = HP

Se il punto P appartenesse alla circonferenza la sua distanza sarebbe nulla.

b) Se i quattro punti appartenessero ad una circonferenza, questa sarebbe la circonferenza cercata (da cui distano tutti zero) [una delle infinite, tutte le circonferenze concentriche con questa sono una soluzione].
[Altrimenti] costruiamo la circonferenza c di centro O passante per tre dei quattro punti. Il quarto punto D potrebbe essere interno o esterno. La circonferenza equidistante dai quattro punti è ovviamente quella di centro O e di raggio uguale alla media aritmetica tra il raggio di c e la misura OP [(r+OP)/2].
Dati i quattro punti, questo ragionamento si può rifare per ogni scelta dei tre iniziali e quindi ci sono quattro possibili circonferenze.
Si possono anche costruire circonferenze equidistanti dai quattro punti e che ne lascino due interni e due esterni.
Si osserva che se due punti sono esterni (o interni) alla circonferenza ed equidistanti da essa, le loro distanze dal centro O devono essere uguali per quanto visto nel punto a).
Costruiamo una delle possibili soluzioni.
Il centro O della circonferenza cercata dovrà appartenere quindi all'asse del segmento AD e anche all'asse del segmento BC. Quindi il centro O si trova nella loro intersezione. Il raggio della circonferenza cercata è la media aritmetica dei raggi delle circonferenze di centro O e passanti rispettivamente per A e D.
In questo modo la circonferenza è equidistante dai quattro punti A, B, C, D. Potremmo rifare il ragionamento prendendo le coppie A,C e B,D oppure le coppie A,B e C,D

c) Il problema non ha un'unica soluzione, come visto nel punto b).

Classe 2 TB
Liceo Scientifico "N. Tron"
Schio (VI)

a) [...]

b) Fissare quattro punti non allineati nel piano.
Tracciare la circonferenza passante per tre di essi [non allineati]. Ciò perché per tre punti passa una e una sola circonferenza [[ed essi saranno equidistanti da essa (d = 0)]].
Ora ci sono due casi possibili in relazione alla posizione del quarto punto.
1. Esso è appartenente alla circonferenza appena costruita: le circonferenze equidistanti dai quattro punti sono infinite, cioè tutte le circonferenze concentriche a quella di partenza.
2. Esso è interno o esterno alla circonferenza costruita:
In questo caso si traccia la semiretta di origine O [centro della circonferenza per tre punti] passante per [il quarto punto] D; sia I il punto d'intersezione della circonferenza con tale semiretta.
Si trova il punto medio M del segmento DI.
Tracciando la circonferenza di centro O e raggio OM, si avrà che i quattro punti fissati saranno equidistanti da questa circonferenza.
Ciò perché, essendo le due circonferenze concentriche i tre punti appartenenti alla prima, sono equidistanti anche alla seconda con distanza IM.
La distanza tra il quarto punto e la nuova circonferenza è MD, ma, essendo M punto medio del segmento ID, IM = MD, perciò le quattro distanze sono congruenti.

c) La procedura precedente può essere applicata considerando qualsiasi delle quattro terne di punti possibili per la costruzione della prima circonferenza.
Se i quattro punti non appartengono alla stessa circonferenza, si individuerà una circonferenza equidistante diversa per ogni terna considerata.

Agnes, Amodeo, Ariodante, Braschi, Izzo, Pozzato
Classe 3P - Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa"
San Genesio ed Uniti (PV)

a)
- P esterno alla circonferenza:
  congiungendo P con O centro della circonferenza otteniamo il segmento PO. Chiamiamo A il punto di intersezione

tra il segmento e la circonferenza. Il segmento PA è la distanza di P dalla circonferenza.

- P interno alla circonferenza:

tracciamo il raggio passante per P. Il punto di intersezione del raggio con la circonferenza lo chiamiamo A. La distanza è PA.

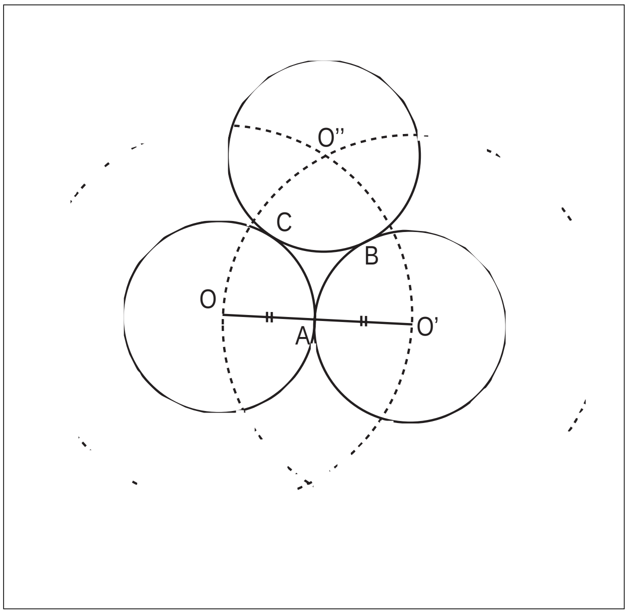
PA è il segmento di lunghezza minima perché se prendiamo un altro punto K sulla circonferenza e congiungiamo i punti P, O, K si ottiene il triangolo PKO; se PK fosse uguale a PA , OK e PK sarebbero sovrapposti a PO e se fosse PK<PA non si sarebbe potuto formare il triangolo [giustificazione non del tutto rigorosa ed incompleta].

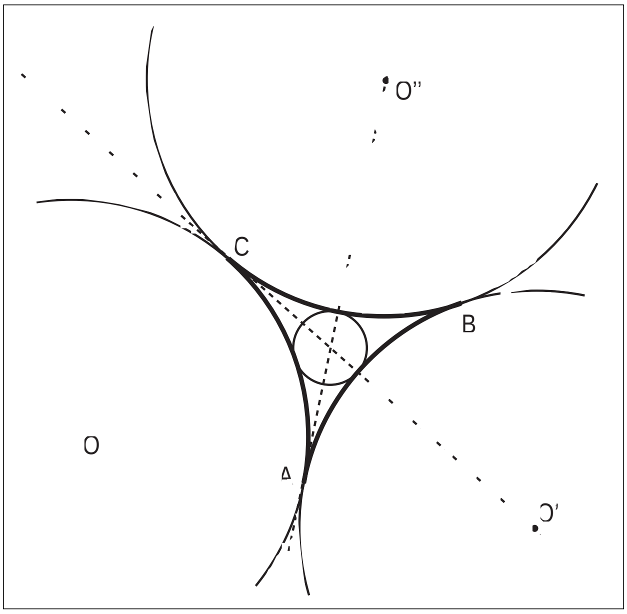
b) Chiamiamo A, B, C, D quattro punti non allineati del piano.
Consideriamo il triangolo ABC. Il punto d'intersezione degli assi dei segmenti AB e AC è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, che chiamiamo O.
Tracciamo il segmento che congiunge O con D e chiamiamo N il punto di intersezione con la circonferenza.
Troviamo il punto medio M del segmento ND.
Tracciamo la circonferenza di centro O con apertura OM. Questa è la circonferenza che cercavamo, perché i punti A, B,C distano dalla circonferenza NM e il punto D dista dalla circonferenza MD, poiché NM=MD i punti sono ad ugual distanza.
Nel caso in cui D sia interno alla circonferenza passante per A, B e C, la costruzione è la stessa.

c) [...]

7 - 21 Gennaio 2002

a) Costruire tre circonferenze di raggio 1 (uno) a due a due tangenti esternamente. Giustificare la costruzione.
b) Indicati con A, B, C i punti di tangenza, considerare su ciascuna circonferenza il minore dei due archi ottenuti. Sia ABC il “triangolo curvilineo” delimitato da tali archi.
Determinare la posizione del centro e la lunghezza del raggio della circonferenza inscritta in ABC, motivando le risposte.
c) Calcolare l’area del “triangolo curvilineo” ABC.





Commento

Abbiamo ricevuto diciotto risposte provenienti da dodici scuole (sei scuole medie inferiori e sei superiori). Ci è pervenuta anche una risposta da una classe terza di un liceo scientifico, ma, come è scritto nel messaggio di presentazione del problema del mese, non possiamo più pubblicarla.
Le scuole che hanno partecipato sono:

SM “Panzacchi”, Ozzano Emilia (BO)
SM Istituto Comprensivo 2, Suzzara (MN)
SM “Dalla Chiesa”, S. Genesio (PV)
SM “Zanella”, Roveredo in Piano (PN)
SM Ist. Comprensivo “De Amicis”, Busto Arsizio (VA)
SM “L. Da Vinci”, Rufina (FI)
ITI “B. Pascal”, Cesena (FC)
ITI, LST “Berenini”, Fidenza (PR) (sei risposte)
LC “Orazio”, Roma (RM) (due risposte)
LS “E. Amaldi”, Bitetto (BA)
LL “D. Alighieri”, Padova (PD)
LS “B. Pascal”, Merano (BZ)

Nel problema proposto si chiedeva di costruire tre circonferenze di ugual raggio, a due a due tangenti, e di determinare il centro della circonferenza inscritta nel “triangolo curvilineo” da esse racchiuso. Si chiedeva inoltre di calcolare la misura del raggio della circonferenza inscritta e la misura dell’area di tale triangolo.
I quesiti posti non erano difficili e, proprio per questo, saremo più rigorosi nella valutazione dei vostri elaborati.
Pochi sono gli errori riscontrati: il calcolo del raggio della circonferenza inscritta, in due risposte, e una giustificazione alla prima costruzione in un’altra risposta. Nella maggior parte delle soluzioni abbiamo però trovato spesso incomplete e/o imprecise le giustificazioni alle costruzioni. Probabilmente l’immediatezza delle proprietà da rilevare e dei calcoli da eseguire ha contribuito a rendere le vostre risposte un po’ precipitose.
Riteniamo necessario fare alcune osservazioni:

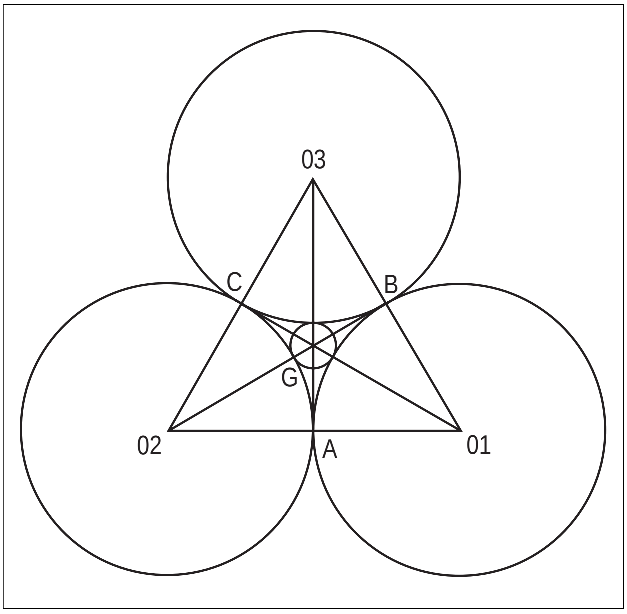
- ribadiamo ancora una volta che è opportuno descrivere le costruzioni, ma, soprattutto per i ragazzi di scuola superiore, è doveroso giustificarle;
- quando si assegna una generica unità di misura non è necessario attribuirle una estensione (il centimetro o altro);
- ad una unità di misura non si può assegnare un valore numerico diverso da "uno", qualsiasi sia la grandezza che la ra presenta;
- nei calcoli con risultati decimali non finiti è preferibile esprimere tali risultati mediante simboli (pi greco, radice quadrata, 1/3 ...), soprattutto da parte dei ragazzi di scuola superiore;
- se si opta per il calcolo con numeri decimali approssimati, è opportuno usare almeno due cifre decimali.

Riteniamo infine doveroso da parte nostra fare un elogio ai ragazzi delle scuole medie inferiori in quanto si sono dimostrati più attenti, sia nelle descrizioni sia nelle motivazioni, di molti loro compagni più grandi.

Il problema di questo mese non si prestava a diversi percorsi di risoluzione, quindi presenteremo una sola risposta per ciascuno dei due ordini di scuola. Per la scuola media inferiore abbiamo scelto quella dell'Istituto Comprensivo di Suzzara e, per le scuole superiori, la risposta di Alessandro Studer dell'ITI "Berenini" di Fidenza.

NOTA: Come di consueto inseriremo le nostre correzioni o osservazioni fra parentesi quadra.

Soluzioni



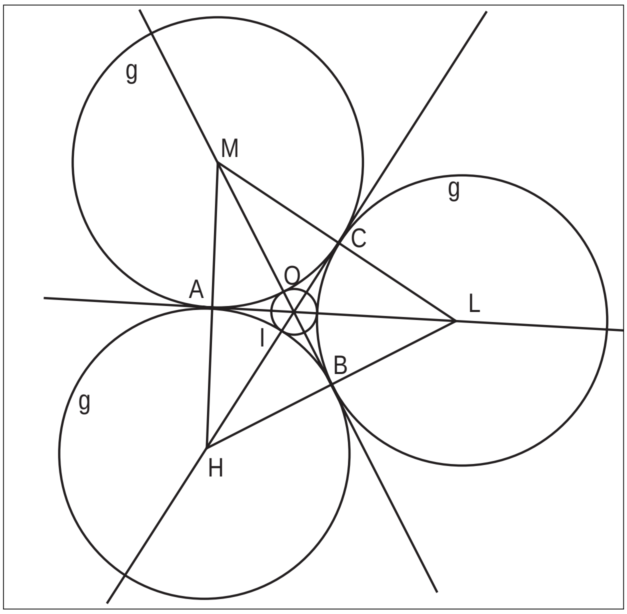
Feroldi Fabio, Rovesti Pietro, Di Giacomo Ascanio
Classe 3C - Istituto Comprensivo 2
Suzzara (MN)

a) Disegniamo un triangolo equilatero di lato 2 [e vertici $O_1O_2O_3$]; disegniamo le circonferenze con centro nei vertici del triangolo e passanti ciascuna per i punti medi di due lati consecutivi e perciò di raggio 1. Tali circonferenze sono tangenti esternamente a due a due, infatti:
O_1O_2= 2= R_1+R_2
O_1O_3= 2= R_1+R_3
O_2O_3= 2= R_2+R_3
Cioè la distanza dei centri è sempre uguale alla somma dei raggi.

b) Il centro del cerchio inscritto nel "triangolo curvilineo" ABC è determinato dal punto G, incontro delle mediane del triangolo $O_1O_2O_3$, infatti:
G è equidistante dai vertici del triangolo e perciò è equidistante dalle tre circonferenze; tale distanza è il raggio del cerchio inscritto.
Calcoliamo la lunghezza del raggio:
O_1C = sqr(22-12) = 1,73
O_1G = 1,73:3*2 = 1,16
Raggio = O_1G-R_1 = 1,16-1 = 0,16
c) L'area del triangolo curvilineo ABC può essere calcolata togliendo dall'area del triangolo $O_1O_2O_3$ i tre settori circolari interni al triangolo di ampiezza 60° ciascuno.
Area triangolo = (2*1,73):2 = 1,73
Area settori = (1*1*3,14):6*3 = 1,57
Area triangolo curvilineo = 1,73-1,57 = 0,16

Alessandro Studer
2B ST - ITI "Berenini"
Fidenza (PR)

a) I centri delle tre circonferenze devono coincidere con i vertici di un triangolo equilatero di lato 2 perché due circonferenze sono tangenti quando la distanza tra i centri è uguale alla somma dei due raggi, per cui il raggio del cerchio deve essere uguale alla metà del lato del triangolo equilatero.
Il posizionamento dei centri sui vertici di un triangolo equilatero soddisfa questa condizione per il fatto che i lati del triangolo sono uguali.



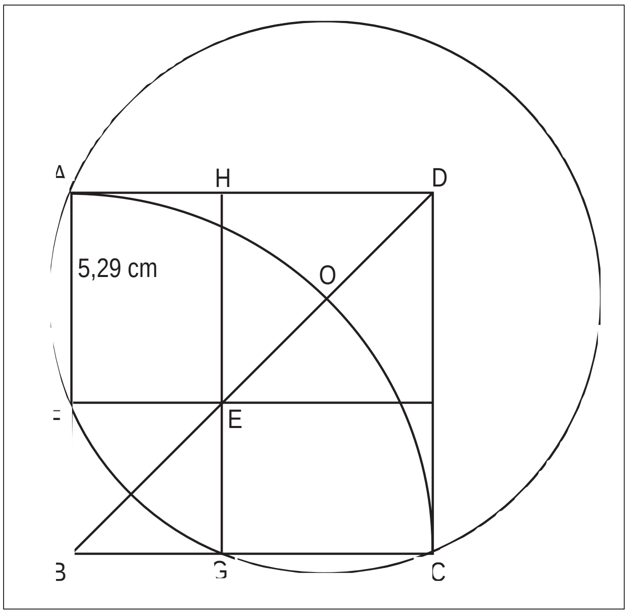
b) La posizione del centro della circonferenza inscritta nel triangolo curvilineo ABC è collocata nell'intersezione delle altezze, mediane e bisettrici, cioè nel circocentro, baricentro e ortocentro del triangolo equilatero HLM.
Questo perché la mediana, l'altezza e la bisettrice del triangolo HLM lo sono anche nel triangolo curvilineo ABC [essendo i tre archi congruenti fra loro].
La lunghezza del raggio della circonferenza iscritta in ABC risulterà essere uguale alla distanza tra il vertice e l'ortocentro (HO) diminuita del raggio del cerchio (HI).
HO è pari a 2/3 di HC perché il baricentro O divide la mediana HC in due parti una il doppio dell'altra.
HC si trova applicando il Teorema di Pitagora.
HC = sqrt(2^2-1^2) = sqrt(3)
HO = 2/3*sqrt(3)
HI = 1
OI = HO-HI = (2/3*sqrt(3))-1 = 0.15

c) L'area del triangolo ABC viene calcolata come differenza dell'area del triangolo HLM meno la somma dei tre settori circolari HBA, LBC, MAC, che essendo ciascuno 1/6 di cerchio (ognuno [ogni angolo al centro] misura 60°, perché angolo del triangolo equilatero) danno luogo complessivamente ad un totale di 1/2 cerchio.
Area HLM = (HC*ML)/2 = sqrt(3)
Area semicerchio "1/2 g" = 1/2 (HI^2)*(pi greco) = 1/2*(pi greco)
Area ABC = A(HLM)-A("1/2 g") = sqrt(3)- 1/2*(pi greco).

4 - 18 Febbraio 2002

E’ dato un segmento AB di lunghezza a.
1) Costruire un quadrato che abbia AB come somma tra la diagonale e il lato.
Motivare la costruzione.
2) Calcolare in funzione di a il lato del quadrato ottenuto.

Costruzione proposta da
Guernieri Marco, Rando Francesco, Rodella Andrea
Classe 2A ST - ITI “E. Ferrari”, Torino



- Costruisco un quadrato di lato AB=a e traccio la sua diagonale;
- disegno una circonferenza di centro B con raggio AB che interseca la diagonale del quadrato ABCD in un punto O;
- traccio una circonferenza di centro O e raggio OA, che interseca il quadrato ABCD nei punti F e G;
- disegno la parallela a BC passante per F e la parallela ad AB passante per G che si incontrano nel punto E.

PROPOSTA: Dimostrare, senza ricorrere al calcolo algebrico, la seguente affermazione:
il quadrato BFEG è quel quadrato in cui la somma del lato e della diagonale è uguale al segmento AB.

Commento

Abbiamo ricevuto quattordici risposte provenienti da nove scuole, di cui cinque superiori e quattro inferiori.

SM “Bergamaschi”, Torrevecchia Pia (PV)
SM Istituto comprensivo 2, Suzzara (MN)
SM “L. da Vinci”, Rufina (FI)
SM “Zanella”, Roveredo in Piano” (PN)
ITI “Ferrari”, Torino (TO)
ITI “Berenini”, Fidenza (PR) (cinque risposte)
LS “A. Bafile”, L’Aquila (AQ) (due risposte)
LS “Giorgione”, Castelfranco Veneto (TV)
LS “E. Amaldi”, Bitetto (BA)

Nel problema si chiedeva di costruire un quadrato, a partire da un segmento assegnato che ne rappresentasse la somma del lato e della diagonale, e di calcolarne il lato in funzione della misura del segmento dato.
Eravamo perplessi sulla opportunità di proporre tale problema, ci ha quindi sorpreso il numero delle risposte (che non si

è discostato da quello che mediamente riceviamo) e la varietà delle soluzioni.
I ragazzi delle scuole superiori hanno in maggioranza privilegiato la soluzione algebrica e da questa dedotto la costruzione richiesta. Alcuni ragazzi dell'ITI Berenini hanno invece fornito una costruzione analizzando le proprietà della figura risultante.
Una bella costruzione, purtroppo senza giustificazione, ci è pervenuta dall'ITI Ferrari. Abbiamo pensato di presentarla a illustrazione del testo e di proporre la sua dimostrazione, da inviare entro Settembre, ai ragazzi che seguono questa attività.
Altre tre risposte non sono state ritenute valide, una per incompletezza e due perché in esse non si è "costruito" il lato del quadrato geometricamente (con riga e compasso), ma "trasportata" la sua misura (approssimata) dalla calcolatrice del software Cabri. Questo non è un modo corretto per risolvere costruzioni geometriche.
Un elogio va ai ragazzi della scuola media inferiore che hanno proposto interessanti soluzioni: tre ricorrendo al Teorema di Talete o alla similitudine, e una basata sulla equivalenza.
Riporteremo una soluzione di ogni tipo, quella che riteniamo più esauriente, citando quelle analoghe.
Per la scuola superiore:

ITI "Berenini", Alessandro Studer; la sua risposta è analoga a quella di Manuel Rinaldi, della stessa classe, ma più completa nella giustificazione della costruzione.

ITI "Berenini", Mattia Santini; lo stesso metodo di costruzione, anche se con percorsi diversi, si trova nelle risposte di Gianni Gualano del LS "Giorgione", di Lorenzo Lugani dell'ITI "Berenini" e della classe 2E, LS "E. Amaldi".

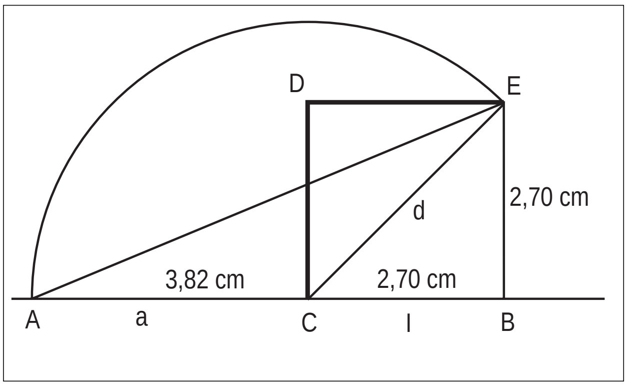
Per la scuola media inferiore riportiamo la prima parte di tre delle risposte pervenute (il calcolo del lato è corretto, ma è già presente in modo più completo nelle precedenti risposte):

SM "Zanella"
SM "Bergamaschi" (analoga a quella inviata da Suzzara)
SM "L. Da Vinci".

Soluzioni

Alessandro Studer
Classe 2B ST - ITI "Berenini"
Fidenza (PR)

1) prendiamo prima in considerazione il quadrato CBED di lato l e diagonale CE = d.
- Riportiamo la diagonale d adiacente al lato CB.
- il segmento AB è uguale alla somma AC + CB ovvero d + l e quindi corrisponde al segmento proposto.



Congiungendo il punto A con il vertice E si individua il triangolo ACE che ha le seguenti caratteristiche:
- è isoscele perché ha due lati uguali (AC e CE) per costruzione
- l'angolo ACE è di 90° + 45° = 135°.

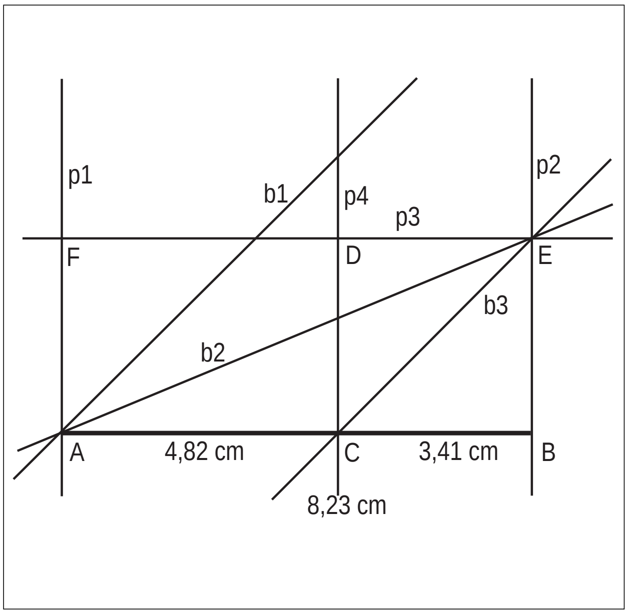
Gli angoli CAE e AEC sono uguali e valgono (180°-135°): 2 = 22,5° pari a 1/4 di 90°.
Il problema sarà dunque risolto costruendo il triangolo ACE a partire dal segmento proposto AB.
- Tracciamo le perpendicolari al segmento AB per i punti A e B (p_1 e p_2).
- Tracciamo la bisettrice (b_1) dell'angolo formato dalla retta p_1 e dal segmento AB.
- Tracciamo la bisettrice (b_2) dell'angolo formato dalla bisettrice b_1 e da AB ed avremo due angoli di 22,5°.

L'intersezione tra b_2 e p_2 individua il punto E vertice del quadrato ed EB è un lato. E è un vertice del triangolo [isoscele].
- Tracciamo la parallela (p_3) ad AB per E, individua il punto F su p_1.
- L'angolo FEA è di 22,5° perché alterno interno con EAB.
- Tracciamo la bisettrice (b_3) dell'angolo formato da p_3 e p_2, si individuano il punto C su AB e due angoli FEC e CEB entrambi di 45°.

L'angolo AEC è FEC - FEA = 45° - 22,5°.
L'angolo AEC è uguale a 180° - ECB = 180° - 45° = 135° (ECB è alterno interno di FEC).

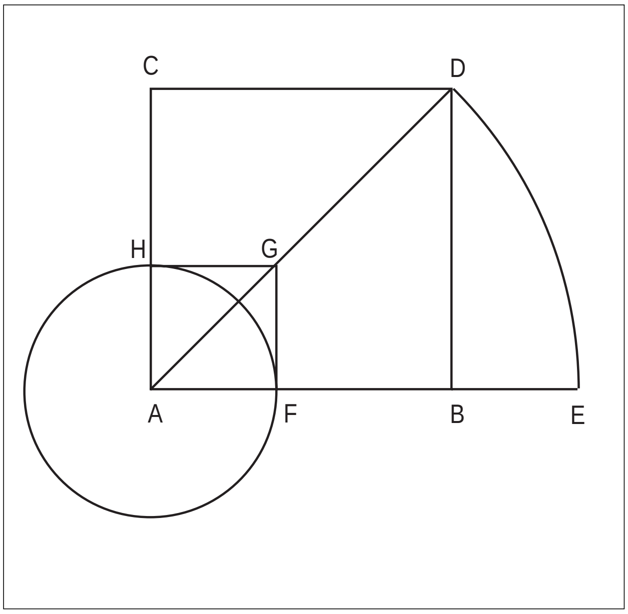
Il triangolo ACE è quello cercato; CB e BE sono due lati del quadrato che si completa con la perpendicolare ad AB per C (p_4); l'intersezione con p_3 individua il punto D.
Il segmento AC è uguale alla diagonale del quadrato e AB è la somma di d+l.

2) Il lato del quadrato, dato a, si trova impostando l'equazione di primo grado: a = l + l*rad(2) da cui
l = a / (1 + rad(2)) e razionalizzando l = a*(rad(2) - 1).



Mattia Santini
Classe 2ST - ITI "Berenini"
Fidenza PR

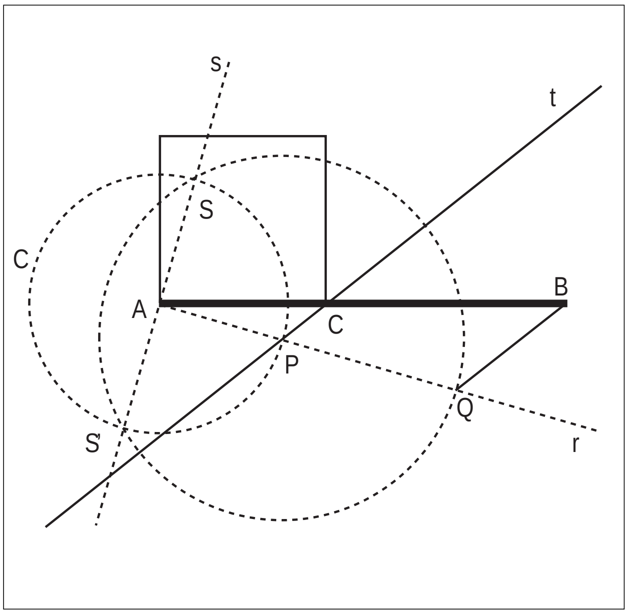
1) Si inizia disegnando il quadrato ABCD di lato AB. Sapendo che il lato AB è la somma del lato k e della diagonale d (uguale a k*sqr(2)) del quadrato da costruire si ha
a = k+k*sqr(2)
La lunghezza della diagonale AD è
a*sqr(2) = k*sqr(2)+2k
Puntando il compasso in A con apertura AD, si determina sulla semiretta AB il punto E.
Ora sapendo che è
AE = k*sqr(2)+2k e che è
AB = k+k*sqr(2)
sottraendo dal segmento AE il segmento AB, si trova
BE = (k*sqr(2)+2k))-(k+k*sqr(2)) = k
Con apertura BE, puntando con il compasso nel punto A, si determina il punto F sul segmento AB; in questo modo si trova il lato del quadrato AFGH.



2) Per calcolare in funzione di a il lato del quadrato AFGH si imposta l'equazione
a = k+k*sqr(2), si ottiene a = k*(1+sqr(2)), si calcola il valore di k = a/(1+sqr(2)).
Ora, razionalizzando, si ottiene che k = a*(sqr(2)-1).

Classe 2 A (Costruzione e motivazione 1a)
Classe 3 A (Motivazione 1b, risposta 2)
Scuola Media "Zanella", Roveredo in Piano (PN)

1. Dato il segmento AB.
Procedura:
1. Semiretta r di origine A;
2. Punto P su r;
3. Retta s perpendicolare ad r, passante per A;
4. Circonferenza c di centro A, per P;
5. Intersezione di c con s (S, S');
6. Circonferenza k di centro P, per S;
7. Intersezione di k con r (Q).



1a)
- I segmenti AP e AS sono congruenti e perpendicolari per costruzione, quindi si possono considerare due lati consecutivi del quadrato di diagonale SP;
- Il segmento PQ è congruente con SP per costruzione;

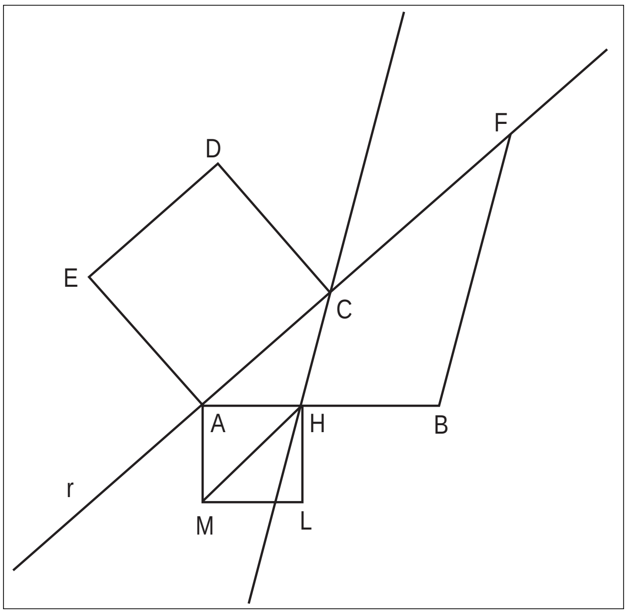
- allora il segmento AQ è la somma del lato e della diagonale di un quadrato.
Procedura:
8. Segmento BQ;
9. Retta t parallela al segmento BQ [per P]; Intersezione di t con AB (C). Il segmento AC è lato del quadrato che ha per diagonale il segmento CB.

1b) I triangoli APC e AQB sono simili avendo gli angoli corrispondenti congruenti per costruzione.
Essendo i lati corrispondenti in proporzione lo sono anche le loro differenze, quindi il rapporto tra AP e PQ è lo stesso del rapporto tra AC e CB.

Ilaria Andena e Sara Taha
Classe 3M - Scuola Media "Bergamaschi"
Torrevecchia Pia (PV)

1) Sappiamo che, per il teorema di Pitagora, la diagonale di un quadrato di lato *l* misura $l\sqrt{2}$
Dobbiamo quindi dividere il segmento dato AB in due parti tali che il loro rapporto sia $\sqrt{2}$

Procediamo così:
Disegniamo il segmento AB e una retta r passante per A e non per B. Prendiamo un qualunque punto C su di essa, costruiamo il quadrato di lato AC [ACDE] e chiamiamo F il punto di intersezione tra la retta r e la circonferenza di centro C e raggio CE. Poiché CF = EC (diagonale del quadrato) è CF:AC = $\sqrt{2}$
Uniamo F con B, tracciamo per C la parallela a BF e chiamiamo H il punto di intersezione di questa parallela con AB.
Per il teorema di Talete: CF:AC = HB:AH = $\sqrt{2}$
AH è il lato del quadrato richiesto.
Costruiamo quindi il quadrato di lato AH.

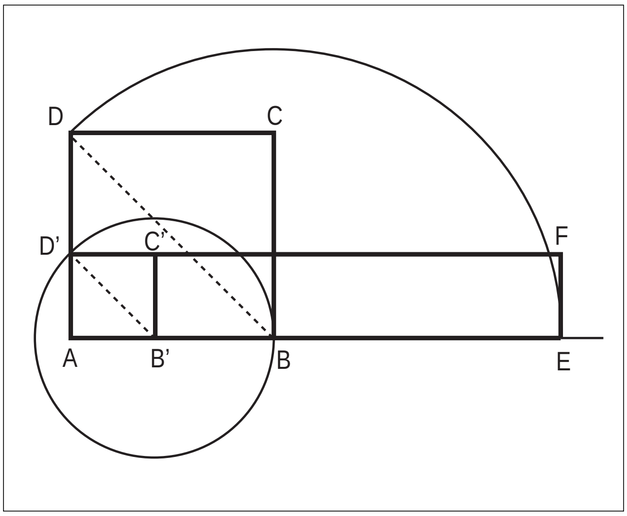


Sarti Elisa, Papi Luisa, Nocentini Helena, Barasso Francesca, Vettori Sara
Classe 3B - Scuola Media "L. da Vinci"
Rufina (FI)

1) Considero il quadrato ABCD (costruito sul lato AB) e stabilisco
AB = a;
AC = d (la sua diagonale);
AB'= a' (il lato del quadrato richiesto);
AC'= d' (la diagonale del quadrato medesimo);
a = a' + d'.
Poiché tutti i quadrati sono simili avremo:
a : d = a' : d' e, applicando il comporre
(a + d) : a = (a '+ d') : a' e, sostituendo
(a + d) : a = a : a'
a^2 = (a +d) * a'
Quindi l'area del quadrato costruito su AB è equivalente all'area del rettangolo avente per base la somma del lato AB e della sua diagonale, l'altezza congruente al lato a' richiesto.

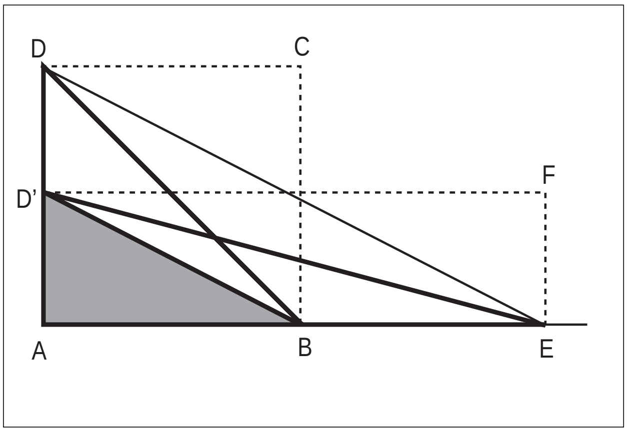
Costruzione
1) Semiretta AB (origine A).
2) Quadrato ABCD.
3) Compasso, apertura AC centro in B.
4) Individuo il punto E di intersezione della circonferenza con la semiretta AB e costruisco il segmento AE.
5) Macro qua-rett-equiv. (elementi di partenza: quadrato, semiretta AB, punto E), per trasformare il quadrato ABCD nel

rettangolo AEFD’ equivalente ad esso, di base AE. Chiamo D’ l’altezza di tale rettangolo sul lato AD.
6) Compasso apertura AD’, centro in A, individuo il punto B’.
7) Quadrato AB’C’D’.
8) Compasso apertura AC’ centro in B’.



Osservo che la diagonale del quadrato è, come richiesto, congruente al segmento B’B.

Per la Macro Qua-rett_equiv:
1) Semiretta AB, origine A.
2) Considero il triangolo ABD, isoscele e rettangolo in A
3) Segmento DE.
4) Parallela a DE passante per B.
5) Individuo il punto D’ intersezione di tale parallela con il lato AD.
6) Triangolo AED’.

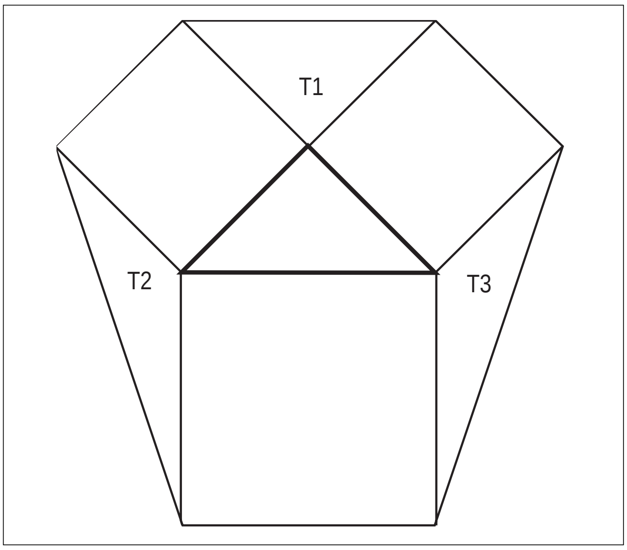


Dimostriamo che il triangolo ABD è equivalente a AED’.
Infatti:
ABD = ABD’+ D’BD e AED’ = ABD’+ D’BE.
Inoltre D’BD ≅ D’BE, perché hanno stessa base D’B e stessa altezza (la distanza tra le due rette parallele D’B e DE).
Quindi i due triangoli ABD e AED’ sono equivalenti perché equicomposti.

Di conseguenza anche il quadrato ABCD, costruito sul triangolo ABD, è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni i cateti del triangolo AED’.

4 - 18 Marzo 2002

a) Disegnare un quadrato su ciascun lato di un triangolo rettangolo isoscele. Congiungendo i vertici dei quadrati, come nella figura allegata, si ottengono tre triangoli T1, T2, T3 fra loro equivalenti.
Dimostrare tale affermazione.
b) La proprietà precedente vale anche nel caso di un qualsiasi triangolo?
Giustificare la risposta.



Commento

Abbiamo ricevuto quindici risposte: dieci dalle scuole medie inferiori e cinque dalle scuole superiori.
Le scuole che hanno partecipato sono:

SM “Bergamaschi”, Torrevecchia Pia (PV)
SM “B. Croce”, Gonzaga (MN)
Scuola Media di Venasca (CN)
SM dell’Istituto Comprensivo 2, Suzzara (MN) (due risposte)
SM “Panzacchi”, Ozzano Emilia (BO)
SM “C. A. Dalla Chiesa”, S. Genesio ed Uniti (PV)
SM “Caduti di Piazza Loggia”, Ghedi (BS)
SM “Zanella”, Roveredo in Piano (PN)
SM “L. da Vinci”, Rufina (FI)
LS “E. Amaldi”, Bitetto (BA)
LS “G. Galilei”, Bitonto (BA)
LS “A. Bafile”, L’Aquila (AQ)
LS “Michelangelo”, Forte dei Marmi (LU)
ITI “Berenini”, Fidenza (PR)

Nel problema si chiedeva di dimostrare l’equivalenza di tre triangoli che si formano costruendo un quadrato su ciascun lato di un triangolo assegnato. In questo mese è stata introdotta una novità rispetto al metodo finora seguito: onde evitare noiose descrizioni è stata allegata al testo la figura relativa al caso particolare proposto nella prima parte del problema. Non era richiesta giustificazione della sua costruzione. La particolare situazione raffigurata, in cui era evidente la congruenza di uno dei tre triangoli da esaminare con quello assegnato, aveva lo scopo di suggerire il percorso più immediato per risolvere poi il problema nel caso generale richiesto nella seconda parte: bastava infatti dimostrare l’equivalenza con il triangolo dato di uno solo dei tre triangoli ottenuti dalla costruzione. I ragazzi della scuola media hanno dimostrato di aver gradito questo tipo di problema e hanno risposto in numero superiore al solito. Purtroppo molti hanno considerato, anche nella seconda parte, solo situazioni particolari: triangolo rettangolo scaleno o triangolo non rettangolo, ma isoscele. Qualcuno ha dichiarato di non saper risolvere il caso generale, qualcuno ha affermato che questo non vale (per chi usa software geometrici basta una verifica numerica, calcolando l’area, per accorgersi del contrario). Anche fra i ragazzi delle scuole superiori c’è chi non ha interpretato correttamente il testo del problema nella seconda parte. In generale si sono delineati due percorsi di risoluzione: c’è chi ha fatto ricorso al calcolo delle aree, chi

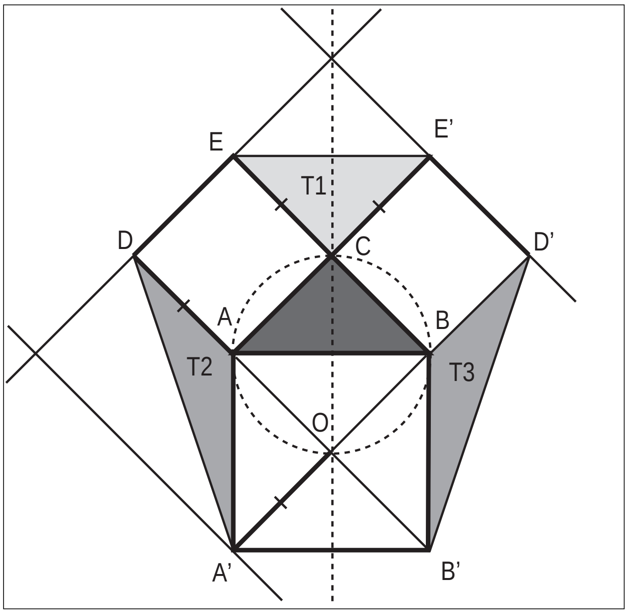
ha indagato sulle proprietà geometriche della figura, utilizzando le proprietà del quadrato, la congruenza di opportuni triangoli rettangoli o le trasformazioni geometriche. Nessuna delle soluzioni proposte è completamente valida in quanto chi ha individuato il percorso più immediato ha poi commesso imprecisioni e/o errori nelle giustificazioni; chi ha presentato una soluzione corretta nella esposizione non ha però individuato il modo più breve per la dimostrazione.
Prima di presentare le soluzioni scelte è opportuno fare ancora una osservazione: non è corretto affermare la congruenza degli angoli di due triangoli rettangoli dicendo che sono complementari o la congruenza di due angoli dicendo che sono differenza di angoli supplementari: due angoli sono congruenti fra loro se sono complementari (o supplementari) di uno stesso angolo (o di angoli congruenti) e, ancora, due angoli sono congruenti se sono somma o differenza di angoli congruenti (non complementari o supplementari).
Sono state scelte le soluzioni inviate da:

SM “Zanella”, classe 2A (prima parte), classe 3A (seconda parte, in cui si propone una interessante costruzione)
Scuola Media di Venasca, prima parte, in cui si ricorre al calcolo delle aree
SM “Bergamaschi”, seconda parte, in cui si fa ricorso alle rotazioni
LS “Galilei”, completa, per la correttezza della esposizione
LS “Michelangelo”, prima parte, per la originale “ricostruzione” della figura.

NOTA: *come al solito, le correzioni e i commenti sono inseriti in parentesi quadra.*

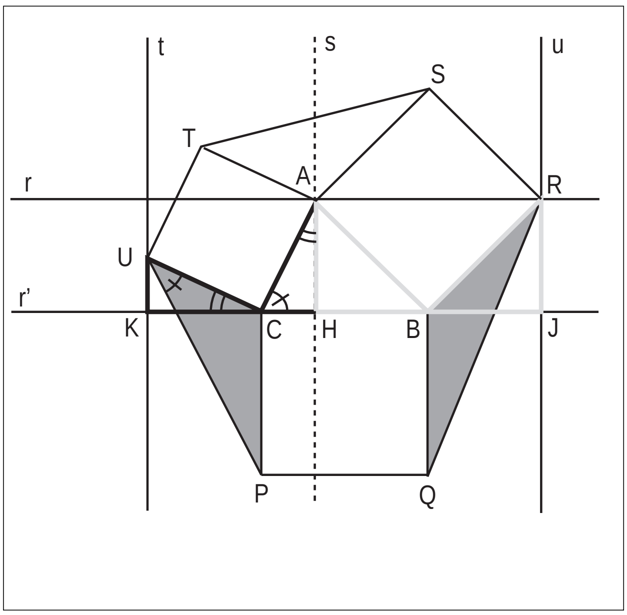
Soluzioni

Classe 2A (prima parte) e Classe 3A (seconda parte)
Scuola Media “Zanella”
Roveredo in Piano (PN)



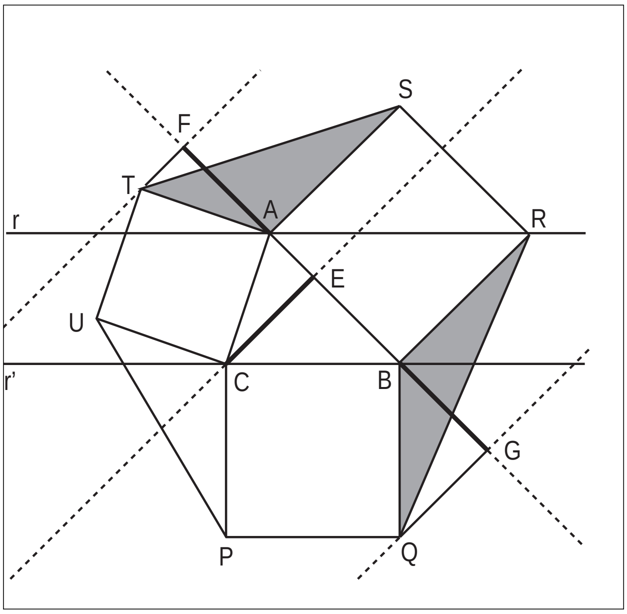
a) (classe 2A)
Il triangolo ABC (rettangolo isoscele, rettangolo in C) ha i cateti congruenti con metà diagonale del quadrato ABB’A’ (quadrato costruito sull’ipotenusa AB) ed è congruente col triangolo T1.
Del triangolo T2 consideriamo il lato AD e la sua altezza A’O, congruenti ai cateti del triangolo T1. I Triangoli T1 e T2 sono equivalenti.
Analogo ragionamento vale per T1 e T3.

b) (classe 3A)
Costruiamo il triangolo ABC con A sulla retta r parallela al lato CB (retta r’). Triangolo T1, di vertici AST; triangolo T2, di vertici PCU, triangolo T3, di vertici QRB.



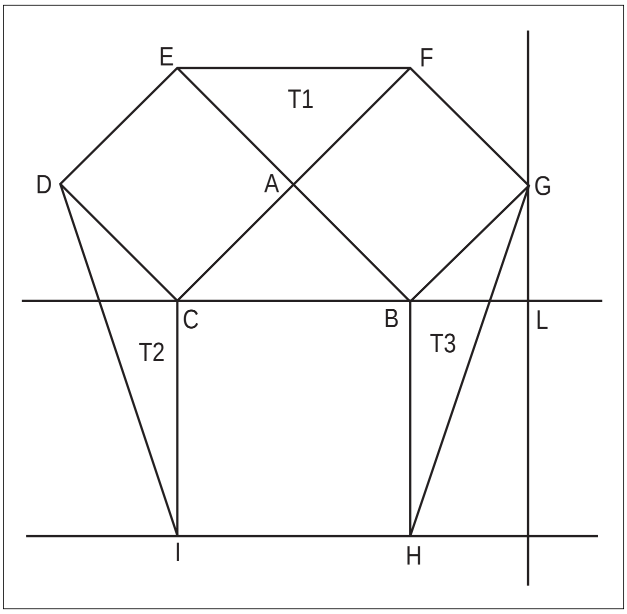
Questa costruzione ci permette di studiare il movimento della figura all’animarsi di A sulla retta sui cui è posto, in particolare otteniamo i luoghi di U e di R, luoghi che ci hanno suggerito come procedere nel ragionamento [i luoghi, qui “osservati” ma non giustificati, si formano solo in questa particolare costruzione in cui il punto A si muove su una retta parallela a CB e il segmento CB resta fisso].
Retta s, perpendicolare ad r’ per A e loro intersezione H; retta t perpendicolare ad r’(o parallela ad s) per U e loro intersezione K (è luogo di U all’animarsi di A su r); retta u perpendicolare ad r’(o parallela ad s) per R e loro intersezione J (è luogo di R all’animarsi di r).
I triangoli UKC e AHC sono congruenti (sono rettangoli, rispettivamente, in K ed in H e le ipotenuse sono lati consecutivi del quadrato CATU, gli angoli in C [KCU e HCA] sono complementari e lo sono anche rispettivamente degli angoli di vertice U [KUC] e di vertice A

[HAC] [quindi HCA=KUC perché complementari dello stesso angolo); sono congruenti anche i triangoli AHB e BJR (ragionamento analogo a quello sopra).
Segue che i segmenti KC, AH, BJ risultano congruenti.
I triangoli UCP (T2) e QBR (T3) (anche il triangolo ABC) sono equivalenti avendo un lato (è lato del quadrato CBQP) e la rispettiva altezza congruenti (lato CP e altezza CK, lato BQ e altezza BJ).
Facciamo un'analoga costruzione per i triangoli TAS (T1) e BQR (T3) in cui i segmenti AF, CE, BG sono congruenti; i triangoli T1, T2, T3, quindi, sono equivalenti.
Il caso a) (triangolo rettangolo isoscele) è un caso particolare per il quale valgono le stesse conclusioni.



Classe 3A
Scuola Media di Venasca (CN)

a) Indicata con l la misura dei cateti del triangolo rettangolo isoscele ABC assegnato (vedi figura), T1 è anch'esso, per costruzione, un triangolo rettangolo isoscele e congruente ad ABC, per cui la sua area è uguale a 1/2 l^2
T3 è equivalente a T1 perché la sua area si ottiene moltiplicando l'altezza BL per la base BH, fratto 2.
Ma BH=BC=l*sqr(2) e BL = l/sqr(2) perché è il lato del triangolo rettangolo isoscele avente BG come ipotenusa.
Quindi l'area di T3=1/2 BH*BL=1/2 l*sqr(2)*(l/sqr(2)) = 1/2 l^2
T3 e T2 sono triangoli congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli in quanto hanno congruenti due lati (DC= BG e CI= BH) e l'angolo fra essi compreso (rispettivamente DCI e GBH = 135°).
Pertanto i tre triangoli T1, T2 e T3 sono equivalenti.

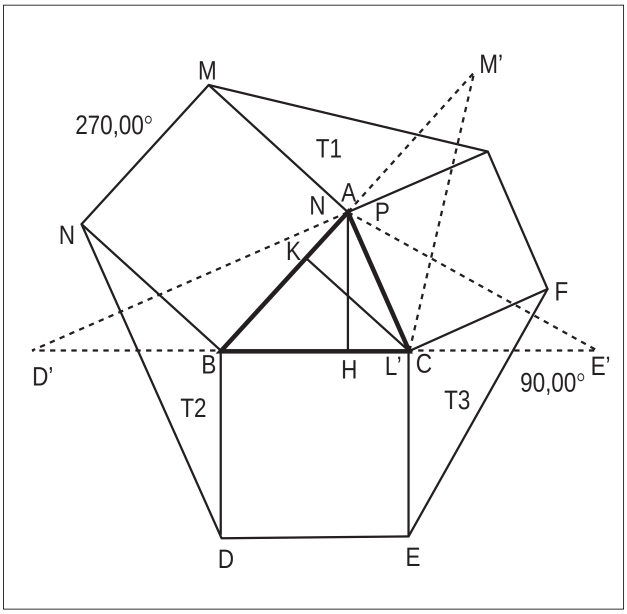


Davide Montalbano, Ilaria Andena,
Sarah Taha, Silvia Gasti
Classe 3M – Scuola Media "Bergamaschi"
Torrevecchia Pia (PV)

La manipolazione della figura mediante gli strumenti di Cabri II ci ha suggerito di partire con la dimostrazione richiesta al punto **b)**

Considerato che:
- L'angolo ABC è supplementare dell'angolo NBD (infatti 360° = ABC + NBD + ABN + CBD = ABC + NBD + 90° + 90° —> ABC + NBD = 180°),
- NB = AB perché lati di un quadrato,

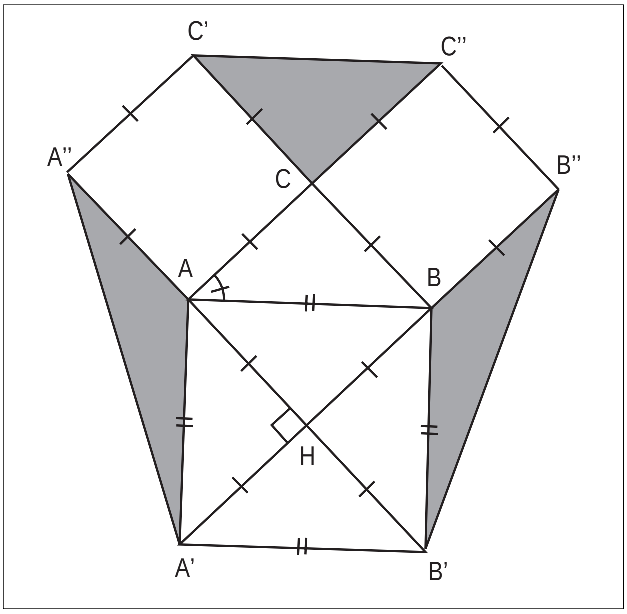
la rotazione di 270° in senso antiorario di centro B, trasforma il triangolo T2 nel triangolo D'N'B con N'≡ A [essendo NB=BA perché lati dello stesso quadrato] e D' allineato con B e C (infatti l'angolo D'BA è congruente all'angolo DBN, essendo il suo corrispondente in una rotazione, e perciò è anch'esso supplementare di ABC, per cui BD' e BC sono semirette opposte). Quindi AH, altezza del triangolo ABC relativa alla base BC, è altezza anche del triangolo D'N'B, relativa alla base D'B. I due triangoli ABC e D'N'B, avendo basi congruenti (D'B =



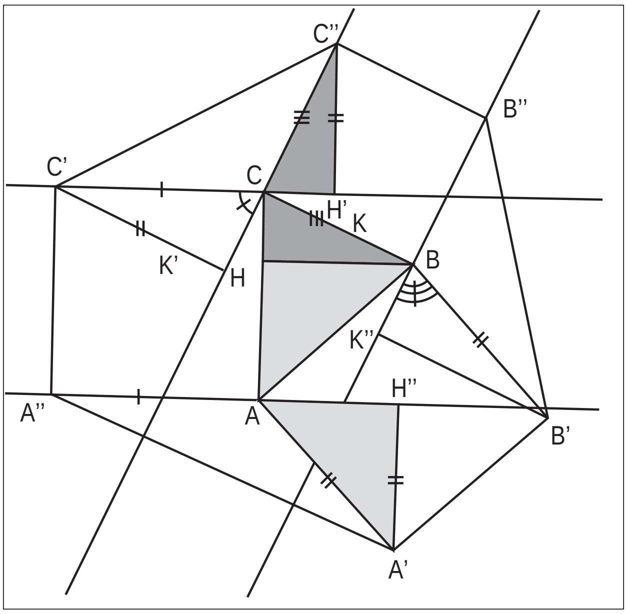
BD perché corrispondenti in una rotazione e BD = BC perché lati di un quadrato e quindi, per la proprietà transitiva della congruenza, BC = D'B) e altezza ad esse relative in comune, hanno la stessa area. Per la proprietà transitiva, essendo T2 congruente e quindi equivalente a D'N'B, è ***T2 equivalente al triangolo ABC.***
Analogamente dimostriamo che gli angoli ACB e FCE sono supplementari e che la rotazione di 90° in senso antiorario di centro C porta F in A e E in E' allineato con B e C. Quindi AH è altezza anche del triangolo ACE' relativa al lato CE' per cui i triangoli ABC e ACE' sono equivalenti e di conseguenza ***T3 è equivalente al triangolo ABC.***
Ripetiamo un procedimento analogo sul triangolo T1. Poiché gli angoli MAL e CAB sono supplementari e AL = AC perché lati di un quadrato, la rotazione di 270° in senso antiorario di centro A, porta L in C e M in M' allineato con A e B. Il segmento CK è perciò altezza relativa al lato AB nel triangolo ABC e altezza relativa al lato AM' nel triangolo ACM' e poiché è anche M'A = AB (perché entrambi uguali ad MA), i triangoli ABC e ACM' sono equivalenti. Di conseguenza ***T1 è equivalente al triangolo ABC.***
Per la proprietà transitiva della relazione di equivalenza, essendo T1, T2, T3 equivalenti al triangolo ABC, sono tra di loro equivalenti.
Il caso del triangolo rettangolo isoscele considerato al punto a) è solo un caso particolare, che risulta così dimostrato.

Classe 2E
Liceo Scientifico "G. Galilei"
Bitonto (BA)

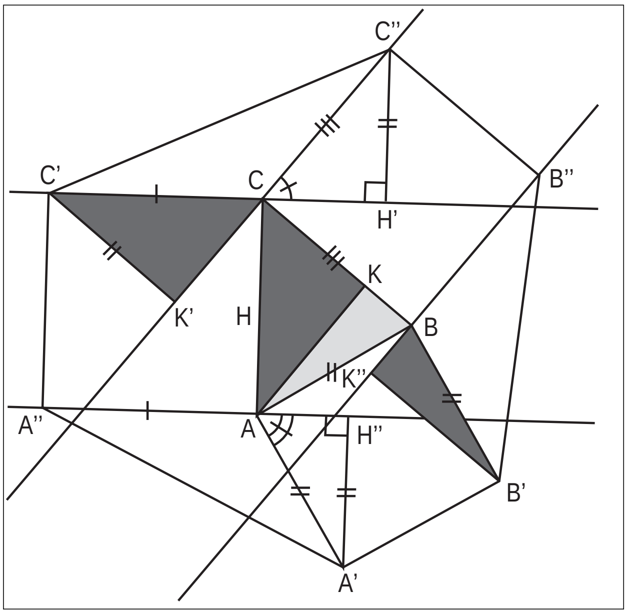
a) I triangoli AA'A" e BB'B" sono congruenti e quindi equivalenti per il primo criterio di congruenza (AA"=BB", AA'=BB', gli angoli A"AA'=B"BB' =135°). CC'C" è equivalente ai primi due per avere base e altezze congruenti (CC'=AA"=BB", CC"=A'H=B'H).
Quest'ultima relazione discende dal fatto che le rette AA" e BB" essendo inclinate [formando un angolo] di 45° su AA' e BB' contengono le diagonali del quadrato costruito su AB, che sono tra loro perpendicolari e tali che A'H=B'H=AC.



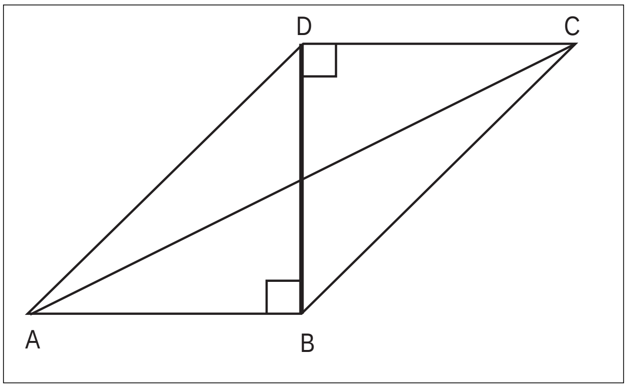
b) Anche se il triangolo ABC è qualsiasi, continua a sussistere la proprietà, cioè i triangoli AA'A", BB'B" e CC'C" sono equivalenti.
Infatti si riconosce (fig. 1) che AA'A" e CC'C" hanno le basi congruenti (AA"=CC' lati opposti dello stesso quadrato) e le altezze congruenti (C"H'=A'H" perché entrambi congruenti a BH, altezza relativa al lato AC in ABC, come si deduce dalla congruenza delle coppie di triangoli rettangoli CH'C" e CHB ed ancora BHA e AA'H". Infatti questi hanno le ipotenuse congruenti in quanto lati dello stesso quadrato e angoli acuti congruenti perché complementari dello stesso angolo: C"CH'=HCB e HAB=H"AA').



In maniera analoga (fig. 2), CC'C" e BB'B" sono equivalenti per avere le basi congruenti (CC"=BB") e le altezze (C'K'=B'K") congruenti, in quanto congruenti entrambi a AK, altezza relativa al lato CB in ABC, così, come si deduce dalla congruenza dei triangoli rettangoli CC'K'=CAK e B'BK"=ABK.
Da quanto dimostrato per transitività si deduce la tesi.



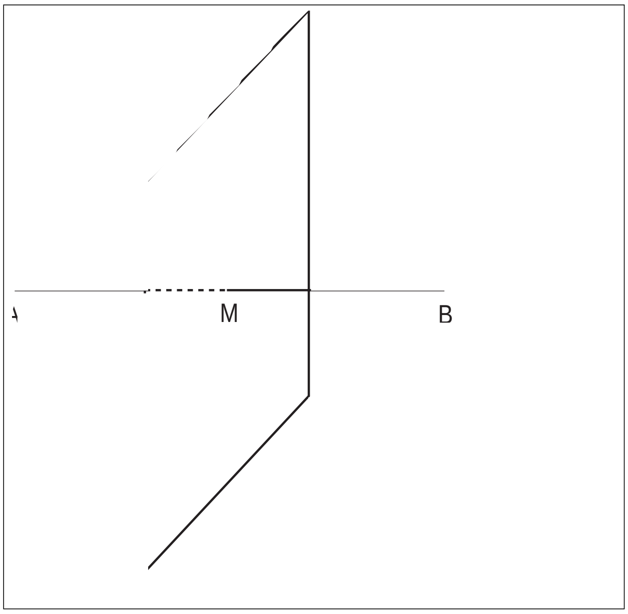
Cristina Pernacchia, classe 2C
Liceo Scientifico "Michelangelo"
Forte dei Marmi (LU)

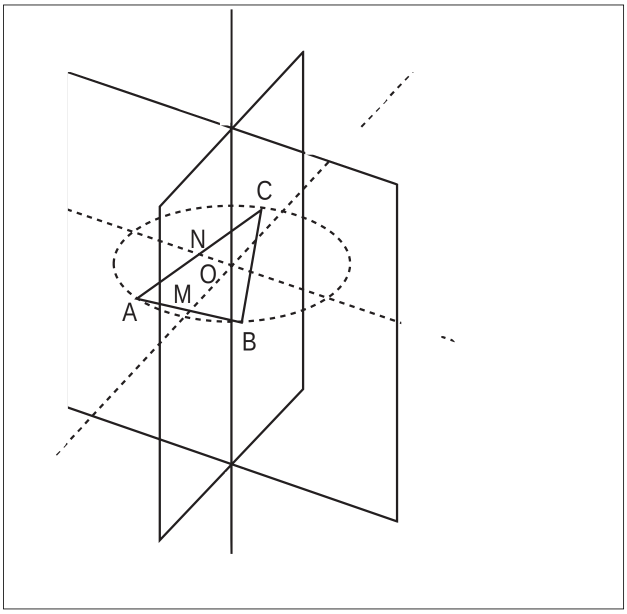


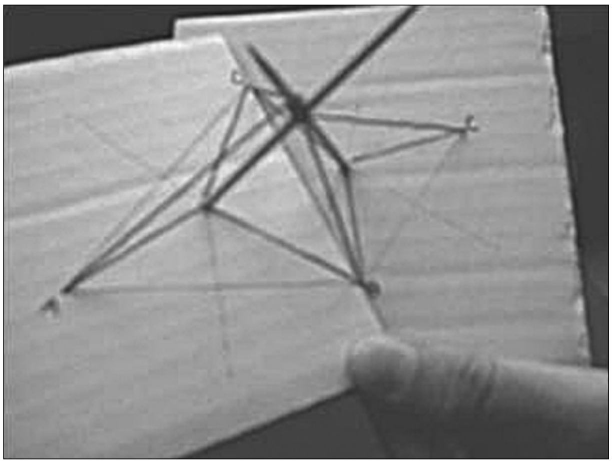
a) Costruisco il triangolo ABD uguale per costruzione al triangolo T1 avente l'angolo retto in B.
Costruisco poi BCD uguale al triangolo T1, esso ha BD in comune con il triangolo ABD e l'angolo retto in D. Prendendo in considerazione il quadrilatero ABCD unisco poi A con C. Si formano così due triangoli, ACD e ACB, essi hanno un lato che coincide con il cateto AB e [o] DC, un secondo lato che coincide con l'ipotenusa AD e [o] BC, l'angolo ADC = ABC dato che essi sono formati da 90°+45° = 135° e che somme di angoli uguali sono uguali.
Allora per il primo criterio di uguaglianza i due triangoli ACD e ACB sono uguali. Inoltre i due sono uguali a T2 e T3 poiché un lato è un cateto del triangolo iniziale T, l' [un] altro uguale all'ipotenusa e l'angolo compreso tra essi è 360°-90°-90°-45° = 135° allora per il primo criterio di uguaglianza T[2] = T[3] = ADC = ABC.
Sapendo che ABCD può essere formato da due triangoli uguali a T1, o dai due triangoli T2 e T3, [[...]] T1, T2, T3 sono equivalenti [perché ciascuno è metà della stessa superficie].

8 - 22 Aprile 2002

1. Qual è, nello spazio, l'insieme dei punti equidistanti da due punti dati?
2. E da tre punti dati, non allineati?
3. E da quattro punti dati non complanari e tali che non più di due appartengono alla stessa retta?
Motivare le risposte.







Scuola Media "Bergamaschi"
Torrevecchia Pia
Per meglio capire le figure nello spazio, abbiamo costruito un modellino di cui abbiamo fotografato la fase finale.

Commento

Abbiamo ricevuto quattro risposte due delle quali dalla scuola media inferiore. Forse i ragazzi che ci seguono non amano molto i quesiti sulla geometria dello spazio oppure in questo periodo sono maggiormente impegnati in altre attività. Le scuole che hanno partecipato sono:

LS "E. Amaldi", Bitetto (BA)
LS "A. Bafile", L'Aquila (AQ)
SM "C. A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV)
SM "Bergamaschi", Torrevecchia Pia (PV)

Il problema proponeva tre quesiti sul concetto di luogo geometrico di punti nello spazio. Nelle risposte pervenute sono stati affrontati tutti i quesiti, ma nessuna di esse è da ritenersi pienamente soddisfacente.
Nella prima e seconda parte del problema, anche nel caso in cui sia stato correttamente individuato il luogo richiesto, non è stata dimostrata la sua unicità. Vi ricordiamo che si definisce LUOGO l'insieme di TUTTI e SOLI i punti che godono di una data proprietà.

Nella terza parte, in una sola risposta ci si è preoccupati di dimostrare la complanarità delle due rette che poi individueranno il punto che rappresenta il luogo richiesto; anche in questo caso però la risposta non è esauriente. Inoltre nessuno dei partecipanti ha notato che tale punto è il centro della sfera passante per i quattro punti assegnati. In analogia con la circonferenza nel piano, esiste ed è unica la sfera che passa per quattro punti, a tre a tre non complanari.
Abbiamo stabilito di presentare ugualmente le parti di soluzioni ritenute più valide accompagnate da nostre osservazioni o completamenti, racchiuse, come di solito, in parentesi quadre. Ci dispiace per lo studente di L'Aquila del cui lavoro non possiamo riportare alcuna parte, in quanto, come abbiamo più volte ribadito, le risposte dei ragazzi delle scuole superiori debbono essere pienamente giustificate. Riporteremo dunque le soluzioni:

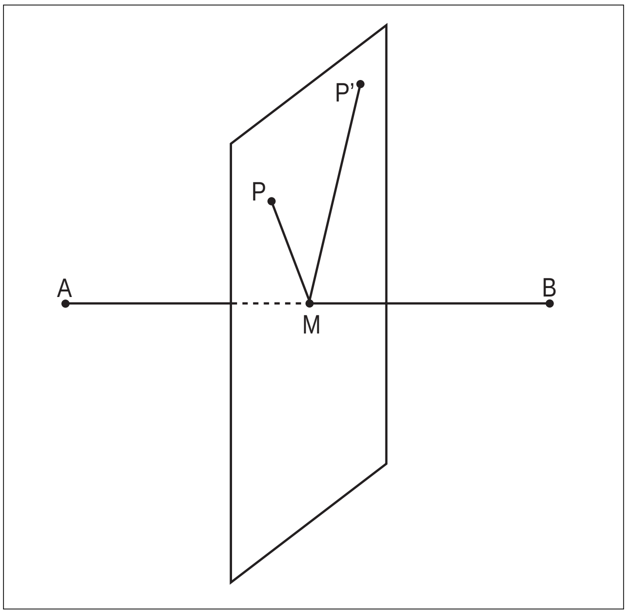
LS "E. Amaldi", prima e seconda parte completate da una nostra nota sulla unicità.
SM di San Genesio, terza parte completata da una nostra osservazione.
SM di Torrevecchia Pia, soluzione completa che necessita anch'essa di nostre osservazioni.

NOTA: come al solito, le correzioni e i commenti sono inseriti in parentesi quadra. Le parti superflue o quelle omesse in doppia parentesi quadra.

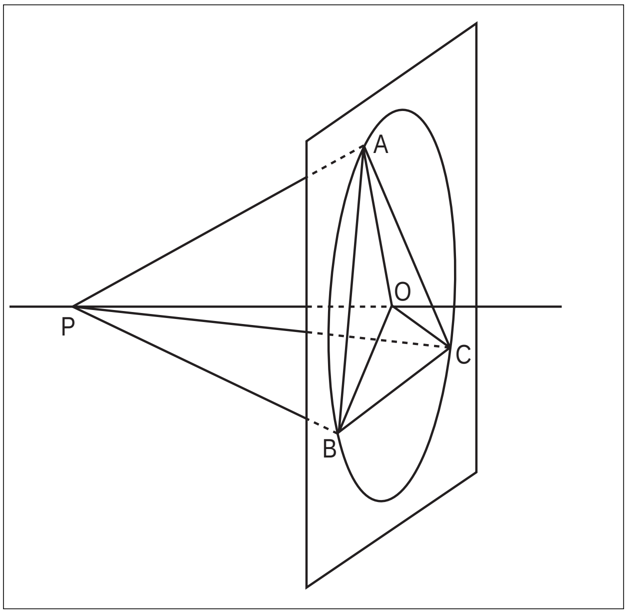
Soluzioni

Classe 2B
Liceo Scientifico "E. Amaldi"
Bitetto (BA)

1) L'insieme dei punti nello spazio equidistanti da A e B, distinti è il piano perpendicolare, nel punto medio M del segmento AB, al segmento stesso AB.
Infatti (vedi fig.1) se P è un punto di tale piano, PA e PB sono ipotenuse dei triangoli rettangoli PMA e PMB, ed essendo MA=MB, sarà PA=PB.
[*NOTA: occorre ora dimostrare che i punti di tale piano "p" sono gli unici punti dello spazio equidistanti da A e B: supponiamo che esista un altro punto Q, non appartenente a "p", tale che sia QA=QB.*
Il triangolo QAB sarà allora isoscele su AB, risulterà QM perpendicolare ad AB e quindi appartenente ad un piano "q" perpendicolare ad AB in M.
Poiché non possono esistere due piani distinti perpendicolari ad una retta in un suo punto sarà "p"="q"].



2) Nel secondo caso, i tre punti non allineati formano un triangolo ABC.
Sul piano da essi determinato, costruiamo il suo circocentro O (in figura 2, la conica-ellisse simula la circonferenza circoscritta ed i vertici A, B, C risultano equidistanti da O, cioè AO = BO = CO).
L'insieme dei punti nello spazio, equidistanti da A, B e C è la retta perpendicolare nel circocentro O del triangolo ABC al piano del triangolo.
Infatti, se P è un qualsiasi punto su tale perpendicolare le tre distanze PA, PB e PC sono tutte uguali tra loro essendo ipotenuse dei triangoli rettangoli PAO, PBO e PCO (infatti se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni retta del piano passante per l'intersezione è perpendicolare alla retta) ed essendo AO = BO = CO.
[*NOTA: I punti di tale retta sono i soli equidistanti da A, B e C essendo essa intersezione dei tre piani perpendicolari al lati del triangolo ABC nei loro punti medi*].



3) [...]

Paolo Agnes, classe 3P
Scuola Media "C. A. Dalla Chiesa"
S. Genesio (PV)

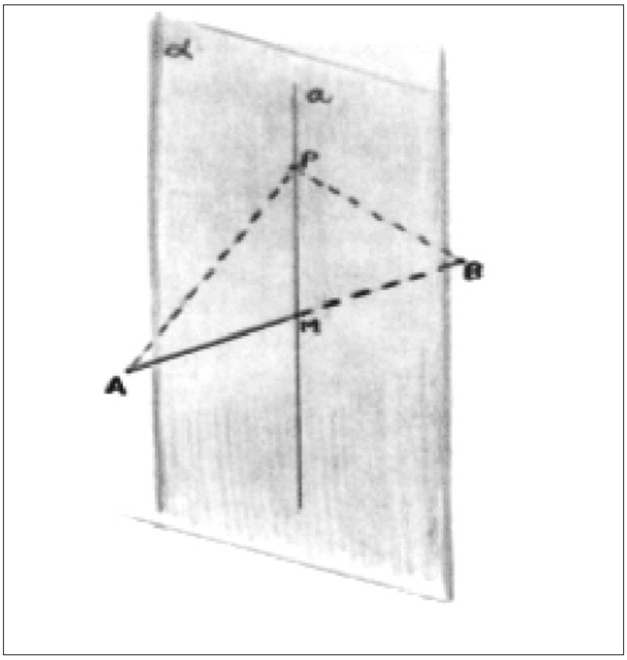
1) [...]

2) [...]

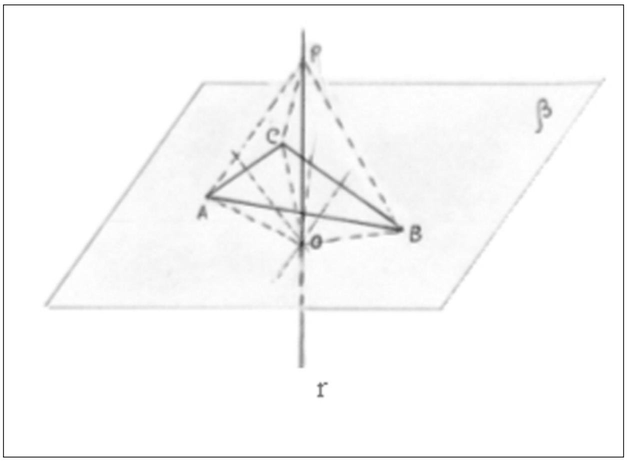
3) Presi quattro punti non complanari A, B, C e D considero tre punti per volta. Questi individuano un piano. Sul piano ABC considero il triangolo ABC e trovo il suo ortocentro [circocentro], che chiamo Q.
Chiamo "s" la retta passante per Q e perpendicolare al piano. Sul piano ABD considero gli assi di AB e BD e trovo l'ortocentro [circocentro] di ABD. Chiamo P il punto ottenuto, e la retta perpendicolare al piano e passante per esso la chiamo "t". Considero il piano individuato dalla retta "s" e dall'asse del segmento AB passante per Q.
Questo piano "alfa" è perpendicolare ad AB e passa per il suo punto medio.
Considero ora il piano individuato dalla retta "t" e dall'asse di AB passante per P.
Anche questo piano "beta" è perpendicolare ad AB e passa per il suo punto medio.
Pertanto i due piani "alfa" e "beta" coincidono essendo perpendicolari nello stesso punto allo stesso segmento. Le rette "t" e "s" sono quindi complanari [*e incidenti essendo esse perpendicolari, nello stesso piano, a due rette che si incontrano, gli assi di AB passanti uno per P e uno per Q*].
Il punto O, intersezione di "t" e "s" è quindi equidistante da A, B, C e D nello spazio.

Davide Montalbano, Ilaria Andena,
Teresa Pedrini, Sarah Taha
Classe 3M, Scuola Media Statale "Bergamaschi"
Torrevecchia Pia (PV)

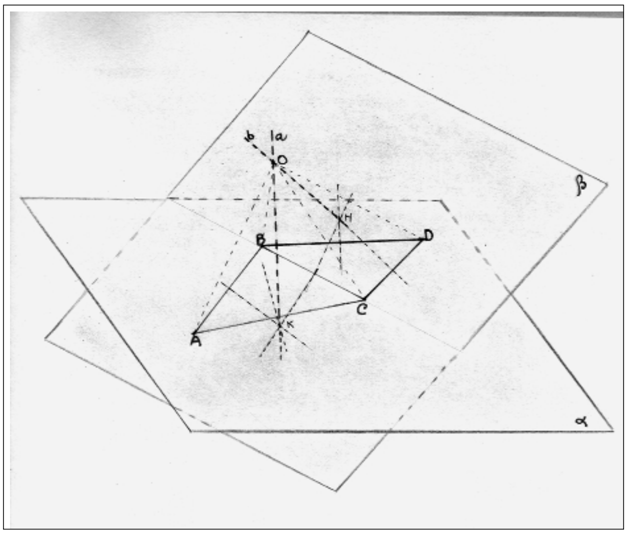
1) Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti A e B è il piano α passante per il punto medio del segmento AB e perpendicolare al segmento AB.
Infatti:
in un piano α contenente A e B, il luogo dei punti equidistanti da A e B è l'asse a del segmento AB; quindi PA = PB $\forall$ P$\in$a. Se faccio variare il piano α in modo da considerare gli infiniti piani dello spazio passanti per AB, l'asse a descrive il piano α; quindi
PA = PB $\forall$ P$\in\alpha$
[Il ragionamento fatto è una "osservazione, non una dimostrazione]



2) Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da tre punti A, B, C non allineati è la retta r passante per il circocentro O del triangolo ABC e perpendicolare al piano individuato dai tre punti.
Infatti:
- A, B, C individuano un piano perché non sono allineati
- OA = OB = OC poiché il circocentro, punto d'incontro degli assi dei lati di un triangolo, è equidistante dai vertici
- i triangoli POA, POB, POC sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli poiché hanno:
  - PO in comune
  - OA = OB = OC essendo O il circocentro del triangolo ABC
  - POA = POB = POC = 90° perché r è perpendicolare al piano del triangolo e quindi è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per O.



Di conseguenza è PA = PB = PC $\forall$ P$\in$ r
[Per la unicità dei due luoghi descritti, vedere le note alla risposta del LS “E. Amaldi”].



3) Poiché i quattro punti non sono complanari, il piano α individuato da A, B, C, che non sono allineati, non contiene D. Costruiamo la retta a perpendicolare ad α passante per K, circocentro del triangolo ABC. Per la precedente dimostrazione è PA = PB = PC $\forall$ P$\in$a
Analogamente il piano β individuato da B, C, D, che non sono allineati, non contiene A. Costruiamo la retta b perpendicolare a β passante per H, circocentro del triangolo BCD.
E’ PB = PC = PD $\forall$ P$\in$b
a e b sono rette incidenti perché sono perpendicolari a due piani incidenti, essendo $\alpha \cap \beta$ = retta BC
Il punto O = a $\cap$ b è tale che OA = OB = OC e OB = OC = OD e, per la proprietà transitiva,
OA = OB = OC = OD, quindi O è il punto equidistante da quattro punti non complanari e tali che non più di due appartengono alla stessa retta.

6 - 20 Maggio 2002

In un qualunque trapezio ABCD sia I il punto in cui si intersecano le diagonali AC e BD.
a) Condurre per I la retta parallela alle basi del trapezio. Essa incontra i lati obliqui AD e BC rispettivamente in E e F. Che cosa rappresenta il punto I per il segmento EF?
b) Prolungare i lati obliqui, sia K il loro punto di incontro. In quali punti la retta IK taglia le basi del trapezio? Motivare le risposte.

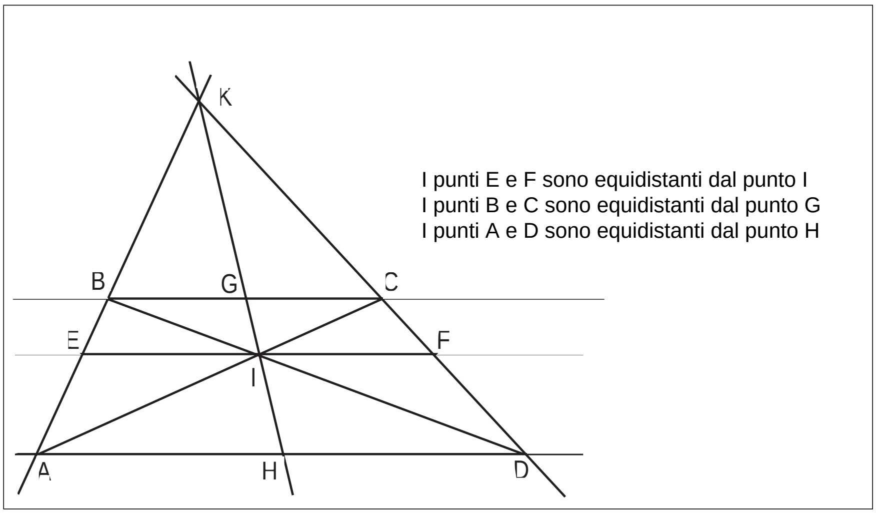


Figura inviata dagli alunni delle classi quinte
Scuola Elementare "Galileo Galilei"
Alessandria

Commento

Abbiamo ricevuto undici risposte una delle quali da una scuola elementare. Le restanti dieci risposte si sono distribuite in modo uguale fra scuole medie inferiori e superiori, alcune scuole hanno inviato più di una soluzione.
Le scuole che hanno partecipato sono:

SE "Galileo Galilei", Alessandria (AL)
SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)
SM "L. da Vinci", Rufina (FI) (due risposte)
SM "Bergamaschi", Torrevecchia Pia (PV)
SM "Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)
ITI "A. Berenini" , Fidenza (PR) (due risposte)
ITI, LST "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)
LS "Amaldi", Bitetto (BA)
LS "G. Galilei", Bitonto (BA)

Consapevoli del gravoso lavoro di chiusura dell'anno scolastico, abbiamo proposto per il mese di Maggio un problema abbastanza semplice che, articolato in due parti, conduce a scoprire una proprietà presente in tutti i trapezi: la retta che congiunge il punto comune alle diagonali con il punto comune ai prolungamenti dei lati obliqui divide a metà le due basi. C'è chi, approfondendo l'indagine sulla figura, ha scoperto una caratteristica ancor più generale che riporteremo nelle soluzioni da proporre all'attenzione dei partecipanti. Le soluzioni pervenute non presentano in sostanza errori di rilievo. Tuttavia, come spesso succede quando le proprietà della figura sono immediate, si riscontrano in alcune di esse considerazioni non opportunamente introdotte o conclusioni affrettate. Come di consueto saremo più severi con i ragazzi della scuola superiore che dovrebbero, a questo punto dell'anno scolastico, saper gestire in modo esauriente una dimostrazione, una volta individuato il ragionamento che porta alla soluzione del quesito proposto.
Riteniamo, in proposito, di dover esprimere alcune osservazioni:

- anche se due triangoli sono "evidentemente" simili, occorre giustificare se pur brevemente per quale motivo;
- nello stesso modo si deve procedere di fronte ad una coppia o a più triangoli omotetici;
- due coppie di triangoli simili non hanno in generale lo stesso rapporto di similitudine; quando accade, occorre giustificarlo;
- in due triangoli simili, la retta che contiene la mediana di uno contiene anche quella dell'altro solo in particolari omotetie come nel caso considerato.

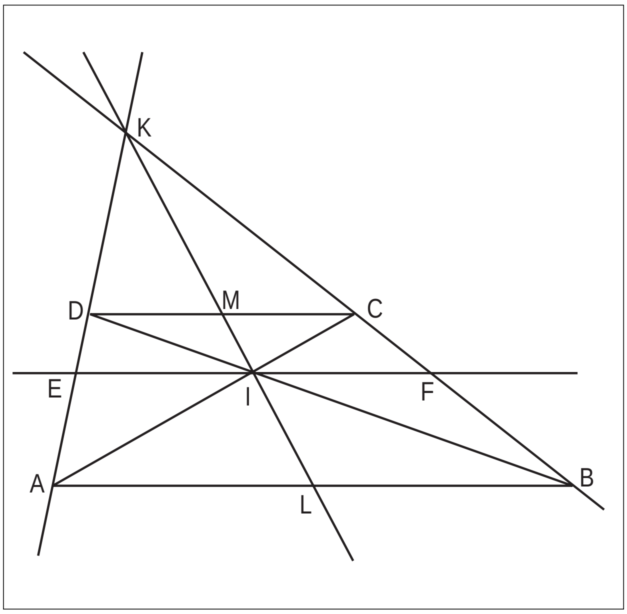
Abbiamo apprezzato il lavoro della quinta classe di scuola elementare.
Utilizzeremo la loro figura per presentare il problema sul sito web. Abbiamo scelto inoltre di presentare le seguenti risposte:

SM "Bergamaschi", che propone una soluzione completa, ricorrendo alla similitudine e al Teorema di Talete
SM "Zanella", la cui prima parte è risolta con l'equivalenza, la seconda parte con la similitudine
SM "L. da Vinci", di cui presenteremo la seconda parte della prima delle due risposte, in cui si fa ricorso alla omotetia, e una osservazione contenuta nella seconda risposta.

NOTA: come al solito, le correzioni e i commenti sono inseriti in parentesi quadra. Le parti superflue o quelle mancanti in doppia parentesi quadra.

Soluzioni

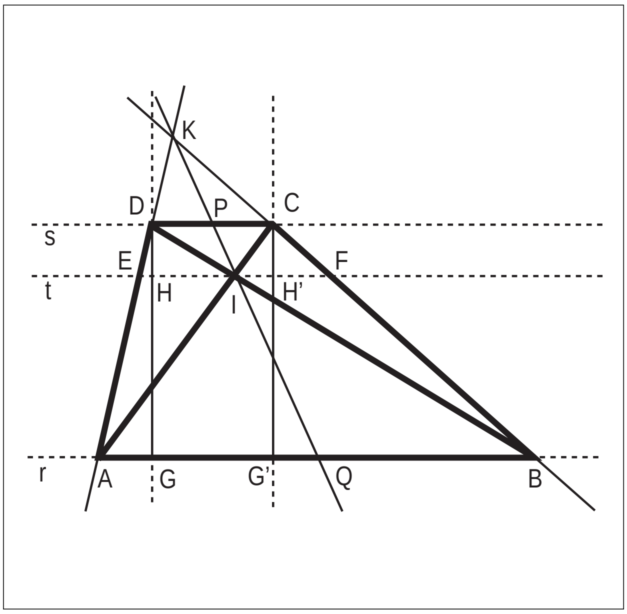
Taha Sarah, Andena Ilaria, Montalbano Davide,
Di Miceli Rosalinda, Secchi Federica, Baietta Fabiola
Classe 3M - Scuola Media "Bergamaschi"
Torrevecchia Pia (PV)



a) Considero i triangoli ADB e EDI:
hanno l'angolo EDI in comune;
gli angoli DEI e DAB congruenti, perché angoli corrispondenti formati dalle rette AB e EI, parallele per ipotesi, tagliate dalla trasversale DA;
gli angoli DIE e DBA congruenti, perché se due triangoli hanno congruenti due angoli, hanno congruente anche il terzo, essendo la somma degli angoli interni di un triangolo 180°.
I due triangoli, per il primo criterio di similitudine, sono simili; quindi
AB : EI = AD : DE (*)
Analogamente dimostro che sono simili i triangoli ABC e CFI; quindi
AB : IF = CB : CF (*)
Considero le parallele AB, EF, DC tagliate dalle trasversali DA e CB; per il teorema di Talete
DA : ED = CB : CF,
perciò i rapporti al secondo membro delle proporzioni (*) sono uguali, quindi risulta
AB : EI = AB : IF dalla quale, applicando la proprietà del permutare delle proporzioni, ottengo
AB : AB = EI : IF e perciò
EI = IF, ossia I è il punto medio di EF.

b) In modo analogo dimostro che M, punto di intersezione di DC con la retta KI, è punto medio di DC. Considero i triangoli KDM e KEI. Essendo DM e EI parallele, i triangoli sono simili, per il primo criterio di similitudine e quindi
DM : EI = KD : KE
Analogamente dimostro che sono simili i triangoli KMC e KIF, per cui
MC : IF = KC : KF
per il teorema di Talete è
KD : KE = KC : KF e quindi dalle proporzioni precedenti si ricava che
DM : EI = MC : IF —> DM : MC = EI : IF, ma essendo EI = IF, per la dimostrazione a) ricavo
DM = MC, ossia M è il punto medio di DC.
In modo analogo, per la similitudine dei triangoli KEI e KAL [dove L è il punto di intersezione della retta IK con la base AB], scrivo EI : AL = KE : KA
e per la similitudine dei triangoli KIF e KLB
IF : LB = KF : KB
Inoltre per il teorema di Talete è KE : KA = KF : KB e quindi EI : AL = IF : LB —> EI : IF = AL : LB, per cui
AL = LB, ossia L è punto medio di AB.

Classe 2A, parte (a); Nicolò Redivo (3A), parte (b)
Scuola Media "Zanella"
Roveredo in Piano (PN)



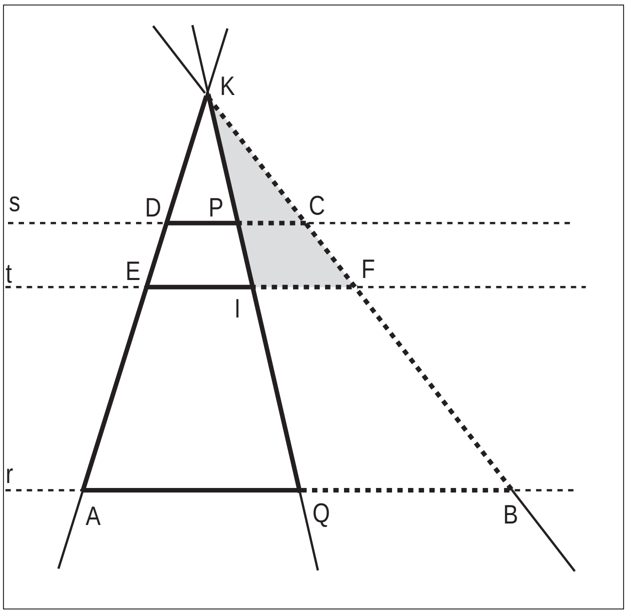
a) (Classe 2A)
Il trapezio è stato costruito su due rette (r, s) parallele (A,B su r; DC su s). La retta t è parallela a r per I. Retta perpendicolare ad r per D, sue intersezioni con r (G) e con t (H); retta perpendicolare a r per C e sue intersezioni con r (G') e con t (H').

1. I triangoli ABD, ABC:
sono equivalenti (stesso lato [base] AB e stessa altezza del trapezio);
hanno in comune il triangolo ABI che viene sottratto da entrambi: dal triangolo ABD si ottiene il triangolo AID e da ABC otteniamo il triangolo BCI. Quindi i triangoli ADI e BCI sono equivalenti.

2. Il triangolo ADI è la somma dei triangoli EID e AIE che hanno in comune il lato EI e le cui altezze DH e HG (rispetto al lato [base] EI) danno per somma l'altezza del trapezio DG. Anche la somma dei segmenti CH' (altezza del triangolo IFC rispetto al lato [base] IF) e H'G' (altezza del triangolo BFI rispetto al lato [base] IF) è altezza del trapezio (i triangoli IFC e IBF hanno il lato IF in comune e danno per somma il triangolo BCI).

3. I segmenti DH e CH' sono congruenti (distanza di due rette parallele) e li indichiamo con "h"; i segmenti HG e H'G' sono congruenti (distanze tra le rette r e t) e li indichiamo con "k". Calcoliamo le doppie aree dei triangoli equivalenti AID e BCI che indichiamo con 2A:
EI * h + EI * k = 2A; IF * h + IF * k = 2A.
Consegue che le misure di IE e IF sono uguali, quindi il punto I è il punto medio del segmento EF.

b) (Nicolò Redivo, Classe 3A)
(La classe seconda non ha ancora consolidato le conoscenze sulla similitudine).
I triangoli KPC e KIF risultano simili (angoli corrispondenti congruenti essendo i lati [DC ed EF] paralleli per costruzione); vale la proporzione tra le misure dei lati: KP : KI = PC : IF; anche i triangoli KDP e KEI sono simili per la congruenza degli angoli [corrispondenti], per cui vale: KP : KI = DP : IE. Dalle due proporzioni possiamo scrivere: PC : IF = DP : IE (permutando i medi, PC : DP = IF : IE), da cui si deduce che P è il punto medio del segmento DC come lo è I del segmento EF.
Ragionamento analogo vale per le coppie di triangoli simili KQB, KIF e KAQ, KEI in cui i segmenti QB, IF e AQ, EI sono in proporzione. La retta KI taglia le basi del trapezio in parti uguali, nei loro punti medi.

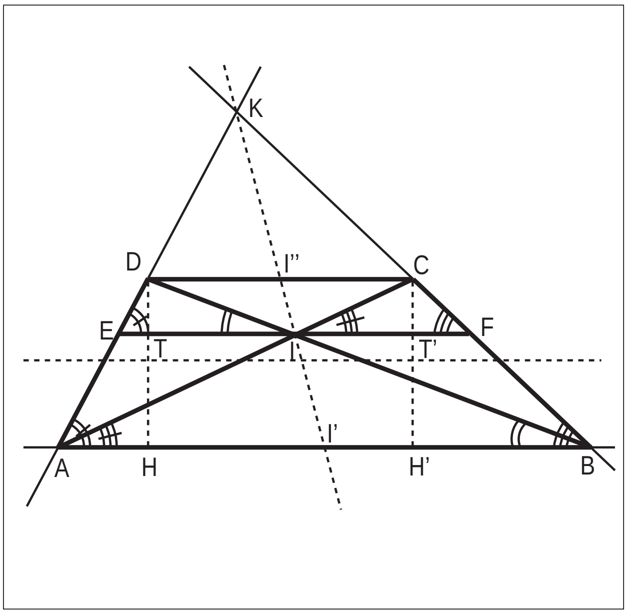


Sara Vettori ed Helena Nocentini
Scuola Media "L. da Vinci"
Rufina (FI)

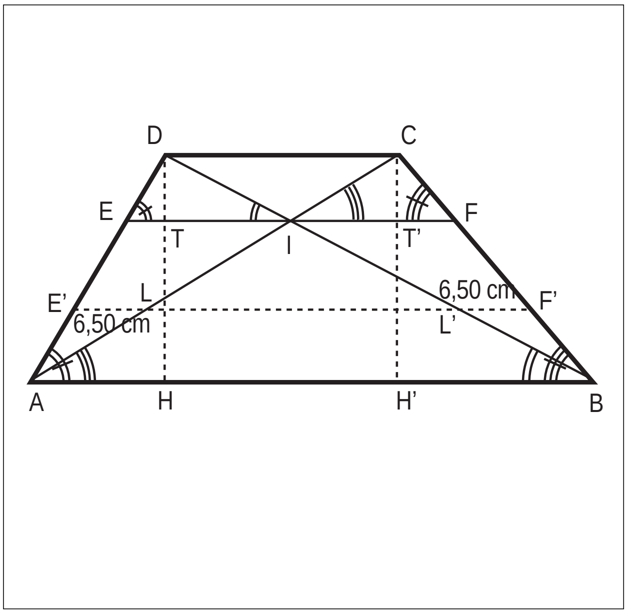
Prima risposta:
a) [...]

b) Consideriamo i triangoli KDC, KEF e KAB. Sono omotetici tra di loro perché individuati da rette uscenti da un

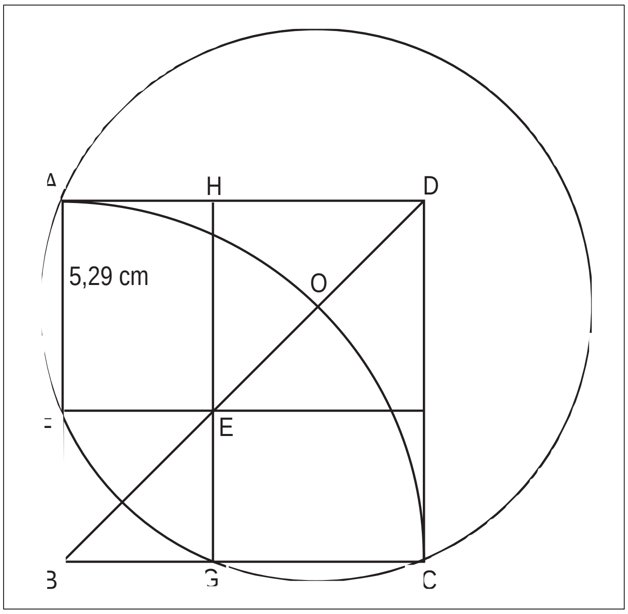
punto comune K, e da rette parallele che intersecano le rette sopraddette. [[Quindi]] gli angoli in D, E e A sono uguali perché corrispondenti, formati dall'intersezione delle basi DC, EF e AB, con il lato obliquo AD.
Stessa cosa vale per gli angoli in B, F e C, formati dall'intersezione delle basi con il lato obliquo CB.
Chiamo I' e I'' i punti di intersezione delle basi AB e DC con la retta IK.
Per la similitudine stabilita [fra le coppie di triangoli KEF e KEI, KAB e KAI', e KDC e KDI''] avremo:
EF : EI = AB : AI' = DC : DI''
Poiché al primo membro abbiamo un rapporto 2 : 1, tale rapporto varrà anche al secondo e terzo membro. La retta IK quindi rappresenta la mediana del triangolo KEF, ma anche di tutti i triangoli omotetici ad esso.



Seconda risposta:
a) […]
Generalizzazione:
Risulta evidente dall'osservazione delle proporzioni [AB : EI = DH : DT e AB : IF = DH' : DT' considerate nella prima parte] che ogni parallela [alle basi] condotta per un punto qualsiasi [E'] di un lato obliquo interseca le diagonali [e l'altro lato obliquo] individuando segmenti congruenti, basi di una coppia di triangoli equivalenti [E'L'D, CLF'].
Perciò i segmenti individuati dall'intersezione di ogni parallela alle basi del trapezio con un [[qualsiasi punto del]] lato obliquo e la rispettiva diagonale, sono congruenti [E'L = L'F'].



b) […]



Settembre 2002

Nel commento alle risposte del problema di Febbraio proponemmo di dimostrare, entro il mese di Settembre, la seguente costruzione realizzata da un gruppo di ragazzi dell'ITI "Ferrari" di Torino, ma non giustificata (vedi il commento al problema di Febbraio per i dettagli).

• Costruisco un quadrato di lato AB=a e traccio la sua diagonale;

• disegno una circonferenza di centro B con raggio AB che interseca la diagonale del quadrato ABCD in un punto O;

• traccio una circonferenza di centro O e raggio OA, che interseca il quadrato ABCD nei punti F e G;

• disegno la parallela a BC passante per F e la parallela ad AB passante per G che si incontrano nel punto E.

PROPOSTA: dimostrare, senza ricorrere al calcolo algebrico, la seguente affermazione:
Il quadrato BFEG è quel quadrato in cui la somma del lato e della diagonale è uguale al segmento AB.

Commento

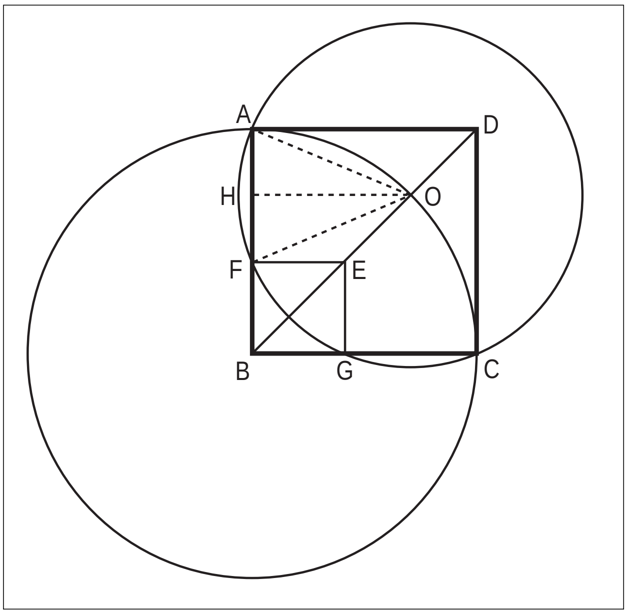
Abbiamo ricevuto tre risposte dalla scuola media "Leonardo da Vinci" di Rufina (FI). Ne presentiamo una, quella che abbiamo ritenuto più sintetica.

Riportiamo anche, in via eccezionale, la risposta inviata da Daniele Urzì, un ragazzo che, giunto ormai al quinto anno del liceo scientifico "G. Galilei" di Catania, ha continuato ad interessarsi ai problemi di FLAT*landia.*

Soluzioni

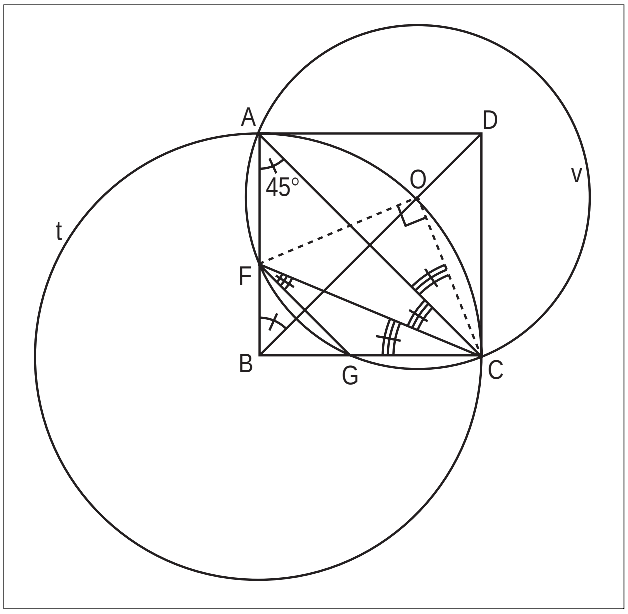
Luisa Papi, Francesca Barasso,
Helena Nocentini, Sara Vettori
Classe 3B - S.M. "L. da Vinci"
Rufina (FI)

[Nella seguente dimostrazione sono indicati con a' e d' rispettivamente il lato e la diagonale del quadrato da costruire a partire dal segmento AB.]
Consideriamo un qualsiasi quadrato ABCD: la proiezione [ortogonale] della diagonale AC sulla retta AB è congruente al lato del quadrato, la proiezione [ortogonale] del lato AB sulla retta BD è congruente a metà diagonale.
Per questo motivo il lato AB = (d'+ a'), riportato sulla diagonale BD, avrà come proiezione [ortogonale] BH = (a'+ 1/2 * d')

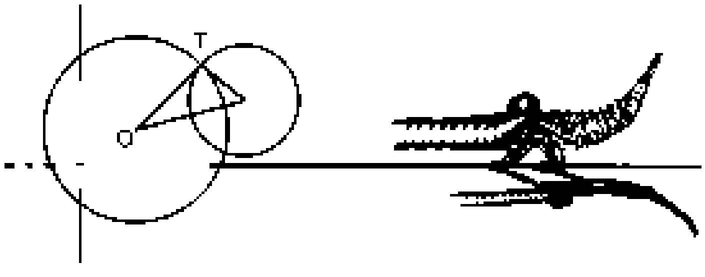


Quindi AH=(AB – HB) = (a’+ d’) – (a’+ 1/2 * d’) = 1/2 * d’
L’uso del compasso, con centro in O e apertura OA, permette di individuare il punto simmetrico di A rispetto alla retta OH, asse di simmetria nel triangolo isoscele AOF.
Avremo così AF = d’, e di conseguenza FB = a’.

Daniele Urzì
Classe 5B - Liceo scientifico “G. Galilei”
Catania



Siano t e v le circonferenze di centro rispettivamente B e O e raggio rispettivamente AB e OA.
In riferimento alla figura, il quadrilatero AFGC è inscritto in v, dunque la somma di due angoli opposti è un angolo piatto. Da ciò segue FGB=FAC=45°.
Discorso analogo per l’angolo BFG. Il triangolo FBG è quindi isoscele rettangolo (FB=BG). Rispetto a t si ha OCA=OBA/2=45°/2.
Il triangolo FOC è isoscele rettangolo, infatti, rispetto a v, è FOC=2*FAC=2*45°=90°.
Poiché gli angoli OCF, OCA misurano rispettivamente 45° e 45°/2, anche ACF misura 45°/2.
Del resto l’angolo ACB misura 45° e quindi si ha FCG=45°/2.
Dovendo essere FCG+CFG=FGB=45°, segue CFG=45°/2; ciò significa che il triangolo FCG è isoscele su base FC. Per le considerazioni fatte si ha FB+FG=BG+GC=AB, e si può concludere che il quadrato di lato FB è quello richiesto.



Alcune considerazioni

Confrontando la tabella che affianca la mappa con quelle degli anni precedenti si può osservare in questo anno un significativo aumento nella partecipazione delle scuole medie inferiori. Anche se alcune hanno risposto ai quesiti di FLATlandia una sola volta, abbiamo riscontrato nelle altre una maggiore frequenza. Questi dati ci confortano e ci inducono a pensare che con molta probabilità l'uso di software didattici favorisce l'interesse anche dei ragazzi più giovani per l'indagine e la deduzione.
Vi sono classi che partecipano coralmente, gruppi costituiti da ragazzi di classi parallele, ragazzi che partecipano singolarmente o in collaborazione con uno o più compagni.
Dietro di loro ci sono sicuramente insegnanti che riconoscono il ruolo formativo della geometria, stimolando nei loro allievi la curiosità per le questioni geometriche.
Segnaliamo ancora la partecipazione di una quinta elementare, che ha inviato anche quest'anno una costruzione realizzata con il software Cabri II.
Anche fra i partecipanti delle scuole superiori vi sono classi e ragazzi che seguono l'attività con una continuità veramente lodevole, altri invece che partecipano in modo saltuario, trovando probabilmente difficoltà a conciliare il loro percorso scolastico con i quesiti proposti. Alcuni, dopo una prima apparizione abbandonano l'attività. Non vorremmo che questi ultimi fossero demotivati dall'insuccesso della loro risposta.
La partecipazione a FLATlandia non deve essere necessariamente una dimostrazione di abilità, anche se le risposte da pubblicare vengono scelte fra le migliori. Deve essere soprattutto l'espressione di un interesse a misurarsi e a confrontarsi in un impegno logico-matematico, che si svolge tramite le nuove tecnologie, che accomuna scuole e ragazzi sparsi in tutta la nazione e non solo. Abbiamo avuto occasione di appurare anche in quest'anno che i problemi di FLATlandia vengono letti, attraverso Internet, da scuole di lingua italiana che si trovano all'estero.

Ringraziamenti

Ancora una volta le curatrici di questo quinto resoconto sull'attività di FLATlandia desiderano ringraziare:
Anna Maria Arpinati e Valerio Mezzogori, per aver progettato e promosso questa attività;
Giuliano Mazzanti e Valter Roselli per il prezioso apporto delle loro competenze disciplinari nella scelta dei problemi e nella correzione degli elaborati;
Alberto Mingardi per la sua collaborazione nella gestione delle pagine web;
il Consiglio Direttivo dell'IRRE Emilia Romagna per avere approvato l'attività e messo a disposizione i mezzi dell'Istituto per la sua riuscita;
la casa editrice Loescher di Torino, distributrice del software Cabri-géomètre, per avere finora supportato l'iniziativa sostenendo le spese delle precedenti e della presente pubblicazione.

"…quando avrete risolto un problema, non fermatevi lì; ricostruite mentalmente il vostro cammino, ricordate le vostre difficoltà, ciò che vi ha aiutato od ostacolato, cercate soprattutto di identificare ciò che vi potrebbe servire in altre occasioni.
Solo facendo così si costruisce, a poco a poco, il pensiero matematico."

George Pólya, 1887 - 1985

FLAT*landia*, geometria on-line

L'IRRE dell'Emilia Romagna,
valendosi dell'apporto di operatori interni
e di collaboratori esterni all'Istituto,
ha proposto questo servizio in rete
rivolto a docenti e alunni
che si interessano di matematica.
Il servizio, promosso nell'anno scolastico '97-'98,
e giunto al suo sesto anno di attività,
ha visto l'adesione di Istituzioni Scolastiche
di vario tipo

Nel presente volumetto il resoconto
del quinto anno di attività

I.R.R.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 5 Settembre - Ottobre 2002, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca Educativa dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24 - 10 - 1980. Direttore resp. Luciano Lelli, Direttore edit. Arnaldo Luisi proprietà IRRE/ER