

Presentazione a cura di:
Giuliana Bettini e Franca Noè

FLAT*landia*

anno II

**geometria on-line
nella scuola secondaria**

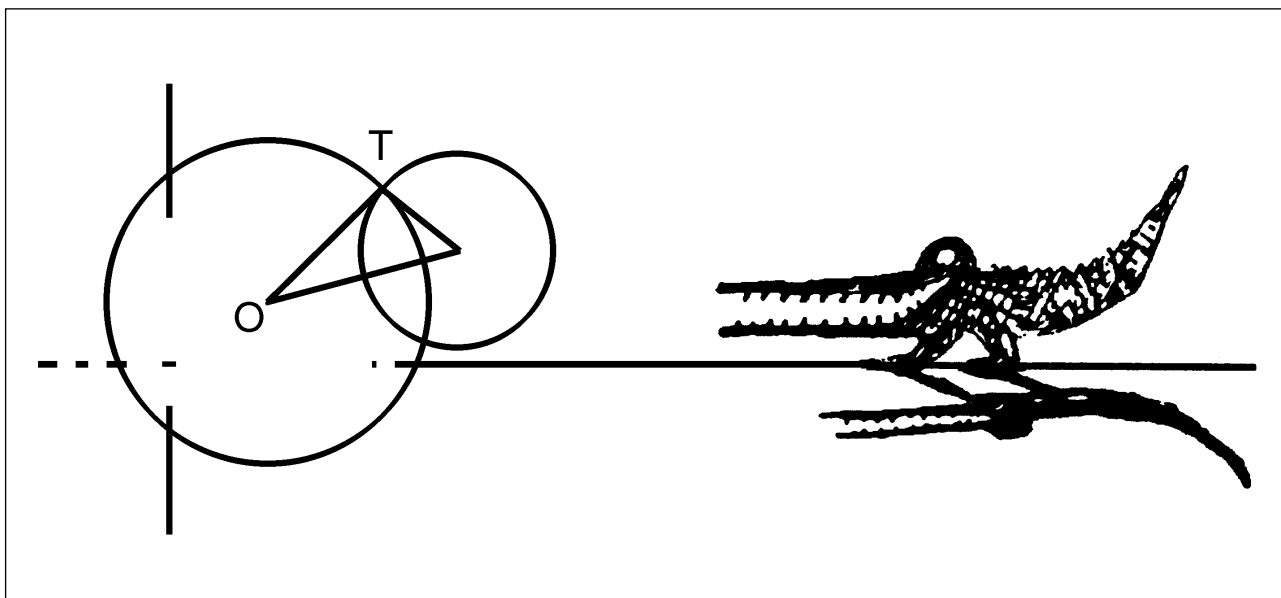
n°

16

Giuliana Bettini, laureata in matematica, ha partecipato all'esperienza, fa parte della redazione del bollettino *CABRI*RRSAE e collabora con l'I.R.R.S.A.E. - E.R. in attività legate alla utilizzazione del software CABRI.

Franca Noè, insegnante di matematica, distaccata presso l'I.R.R.S.A.E. - E.R., fa parte della redazione del bollettino *CABRI*RRSAE e partecipa da alcuni anni con l'I.R.R.S.A.E. - E.R. ad attività legate alla utilizzazione del software CABRI.

Il materiale pubblicato da **CABRI**RRSAE può essere riprodotto, citando la fonte



FLAT*landia*

anno II

**geometria on-line
nella scuola secondaria**

Indice

▼	Presentazione	Pag. 5
▼	Attività 1998/'99	Pag. 7
▼	Problemi e soluzioni	Pag. 11
	5 - 19 ottobre 1998	Pag. 12
	3 - 17 novembre 1998	Pag. 15
	7 - 21 dicembre 1998	Pag. 17
	11 - 25 gennaio 1999	Pag. 20
	1 - 15 febbraio 1999	Pag. 22
	1 - 15 marzo 1999	Pag. 25
	7 - 19 aprile 1999	Pag. 28
	3 - 17 maggio 1999	Pag. 31
▼	Conclusioni	Pag. 34

FLATlandia

E' un'attività dell'IRRSAE-ER rivolta soprattutto agli alunni del terzo anno della Scuola Media inferiore e del biennio della Scuola Secondaria superiore.

Ogni mese viene chiesto ai ragazzi di risolvere un problema di geometria. Entro lo stesso mese vengono valutate le risposte pervenute e vengono segnalate quelle ritenute meritevoli.

Testo e soluzioni sono inviati usando esclusivamente collegamenti telematici.

Un po' di storia...

L'iniziativa è giunta al terzo anno di attività. Nata inizialmente come idea di supporto alla lista di discussione Cabrinews, sempre gestita dall'IRRSAE Emilia Romagna, FLATlandia ha trovato velocemente una sua collocazione autonoma, gradita alle scuole ove operano docenti di matematica curiosi di conoscere le opportunità che la rete può offrire in più, rispetto al lavoro che si può fare nelle classi.

Mentre negli Stati Uniti attività di questo genere sono assai comuni (si consulti ad esempio il forum di matematica di Swarthmore in Pennsylvania: <http://forum.swarthmore.edu>), a quanto ci risulta, FLATlandia è l'unico esempio in lingua italiana di Forum della geometria.

Se nell'anno scolastico 1997-1998 le scuole che hanno aderito alla iniziativa erano 21, nell'anno scolastico 1998-1999, si è raggiunto il risultato di 30 adesioni, dislocate su tutto il territorio nazionale. Tenuto conto della lentezza con cui ogni tipo di novità entra nel mondo della scuola, il risultato è da ritenersi apprezzabile.

Il progetto

E' gestito da un comitato composto da insegnanti di scuola secondaria, da un docente universitario e da un tecnico informatico.

Il problema proposto richiede di solito una costruzione (da eseguire con gli strumenti tradizionali o con l'ausilio di software dedicati all'insegnamento della geometria) e una dimostrazione. L'intento è quello di coinvolgere gli alunni in una attività che richiede qualche conoscenza di geometria accompagnata da un po' di fantasia e creatività.

L'idea della matematica come disciplina fortemente creativa viene così potenziata.

A parere del gruppo che coordina l'attività, un progetto di questo genere può permettere ai docenti un "guadagno formativo" non altrimenti ottenibile all'interno delle classi.

La possibilità infatti di conoscere in tempi brevi, via e-mail o tramite il sito web dell'attività, le diverse soluzioni dello stesso problema, i motivi per cui alcune risposte sono ritenute più interessanti, ha una notevole valenza didattica perché induce a riflessioni e discussioni collettive che portano ad individuare percorsi ottimali per la risoluzione dei problemi proposti o ad essi collegabili.

Anche il tema della continuità didattica fra i vari ordini di scuola, tema così spesso citato e così raramente conseguito nella realtà delle diverse situazioni scolastiche, può essere favorito da un'attività come quella di FLATlandia.

Si può infatti osservare nella mappa seguente che partecipano all'iniziativa diverse tipologie di scuole, con la conseguenza, ad esempio, che alle superiori possano essere viste e discusse anche le soluzioni delle scuole medie, che alle scuole elementari si riesce a risolvere, se pur in piccola parte, un problema posto per le superiori.

Come partecipare

I problemi sono inviati alla lista Cabrinews (cabrinews@arci01.bo.cnr.it) il primo lunedì di ogni mese, da Ottobre a Maggio, oppure sono consultabili in rete negli archivi del progetto all'indirizzo: <http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/>

Gli alunni possono partecipare singolarmente, per gruppi, o inviando un'unica soluzione a nome di tutta la classe.

Le soluzioni dovranno pervenire entro il terzo lunedì del mese al seguente indirizzo di posta elettronica: flat@arci01.bo.cnr.it, inserendo nel mail il nome, la classe e il nominativo dell'Istituto.

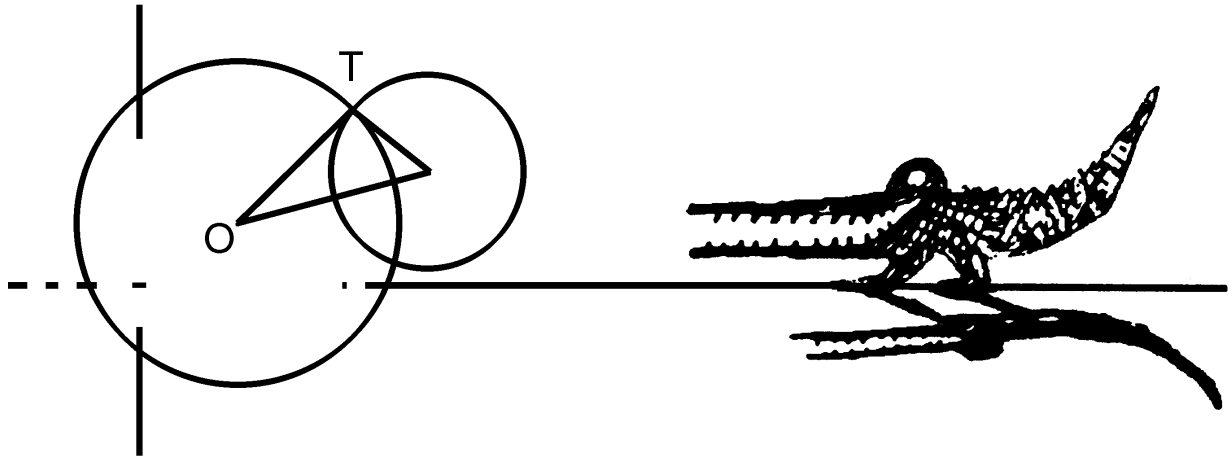
Se la scuola non è ancora iscritta a Cabrinews, per conoscere le procedure di iscrizione è sufficiente inviare un mail a: cabri@arci01.bo.cnr.it

Ulteriori informazioni

Le soluzioni possono essere scritte o direttamente nel messaggio di posta elettronica o in un file in formato Word inviato in attachment.

Se si vuole allegare un disegno deve essere inviato o in formato Cabri-géomètre per MS-DOS o per Windows, altrimenti in formato Word.

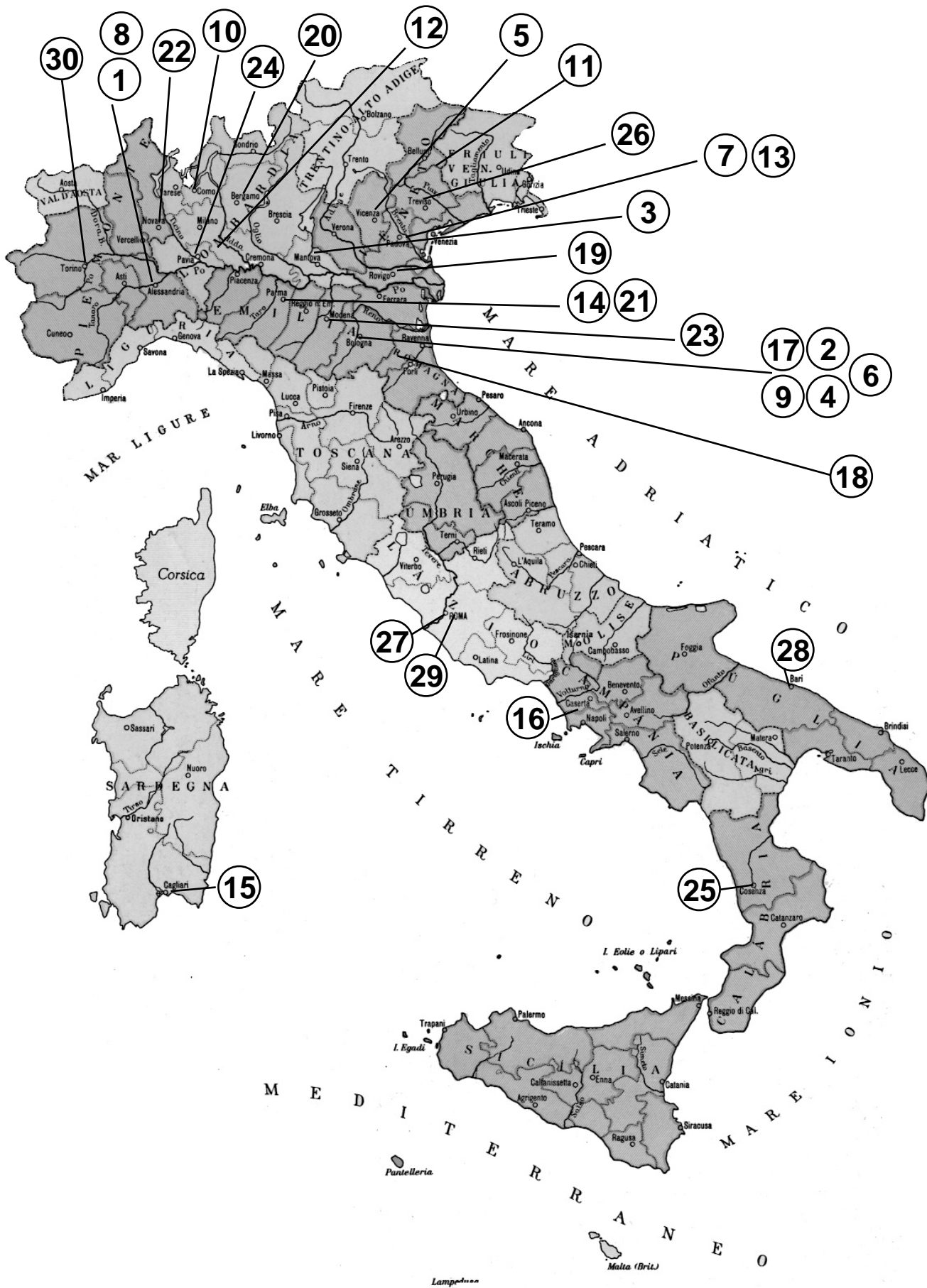
Per docenti ed alunni particolarmente interessati ed attenti a questo genere di attività, vogliamo segnalare che, a partire dal mese di Ottobre 1999 è stata attivata una iniziativa analoga a FLATlandia, che tratta più in generale di matematica (e non solo di geometria) e che è rivolta in modo particolare a ragazzi del triennio delle superiori. La nuova attività si chiama “**probleMATEMATICamente**”. Per maggiori informazioni consultare il sito: <http://arci01.bo.cnr.it/cabri/prob-mat/>



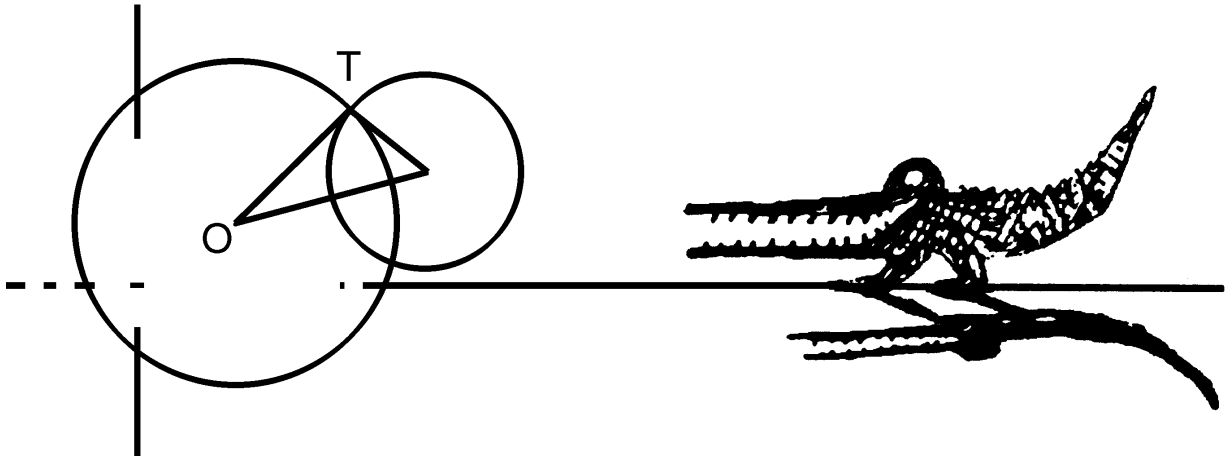
FLAT*landia*

Attività 1998-1999

Mappa delle scuole che hanno partecipato



		Scuola	Frequenza							
			O	N	D	G	F	M	A	M
MEDIE INFERIORI	ELEM 1	“Villaggio Europa” - Alessandria					◆	◆	◆	◆
	2	“Testoni-Fioravanti” - Bologna	◆		◆					◆
	3	“L. Benati” sez.st. di Marmirolo (MN)		◆						
	4	“Panzacchi” - Ozzano Emilia (BO)		◆						
	5	“Don E. Ferraris” Cigliano (VC)		◆						
	6	“Jussi” - S. Lazzaro di Savena (BO)		◆	◆					
	7	“Don Bosco” - Padova			◆					
	8	“Luca Valenziano” Tortona (AL)			◆		◆	◆		
	9	“Cerreta” - Bologna						◆	◆	
	10	“G. da Cermenate” - Cermenate (CO)						◆		
	11	S.M. - Roveredo di Piano (PN)						◆		
ISTITUTI TECNICI e PROFESSIONALI	12	ITI LT“A. Cesaris” Casal P. (LO)	◆	◆		◆	◆			◆
	13	ITC “Euganeo” - Este (PD)	◆		◆		◆	◆		◆
	14	ITG “G. Rondani” - Parma	◆					◆		
	15	IPIA “Meucci” - Cagliari		◆						
	16	ITG “Buonarroti” - Caserta			◆	◆				
	17	ITI “Einaudi-Galilei” - S.G. Persiceto (BO)				◆	◆			
	18	IPSAR “P. Artusi” - Forlimpopoli (FO)					◆			
	19	LS “Galilei” - Adria (RO)	◆		◆		◆			
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	20	LS “Mascheroni” - Bergamo	◆							
	21	LS “Ulivi” - Parma		◆						
	22	LS “Antonelli” - Novara		◆		◆				
	23	LS “Morandi” - Finale Emilia(MO)			◆					◆
	24	LS “Cairolì” - Pavia			◆					
	25	LS “G.B. Scorza” - Cosenza				◆				
	26	LG “Concetto Marchesi” - Oderzo (TV)					◆			
	27	LS “Francesco d’Assisi” - Roma					◆			◆
	28	LS “Galilei” - Bitonto (BA)						◆	◆	◆
	29	LG “Orazio” - Roma							◆	
	30	LS “Majorana” - Torino								◆



FLAT*landia*

Problemi e soluzioni

5 - 19 Ottobre 1998

Dati i segmenti

M +---+---+---+---+---+ N

P +---+---+---+---+---+ Q

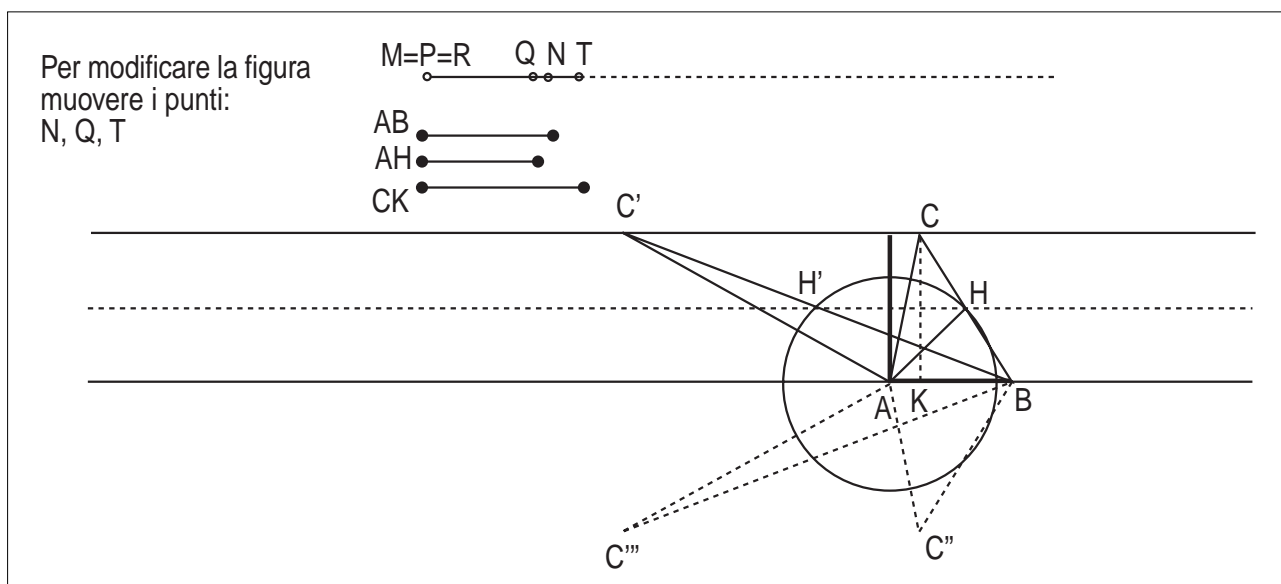
R +---+---+---+---+ T

costruire un triangolo ABC in modo che:

- $AB = MN$;
- l'altezza relativa al lato AB misuri come RT;
- la mediana relativa al lato BC misuri come PQ.

- a) Motivare la costruzione.
- b) Esiste un'unica soluzione?
- c) Esplorare le possibilità di soluzione per una qualunque scelta dei tre segmenti.

N.B.: L'unità di misura, $O +---+ U$, può essere fissata a piacere.



Commento

Sono giunte in tutto otto risposte provenienti da sei scuole, di cui una sola è una scuola media inferiore.

Il problema richiedeva una costruzione, la sua motivazione e l'analisi della sua generalizzazione. Una risposta contiene solo un cabri-disegno senza alcuna descrizione e quindi non è accettabile. Nessuna delle rimanenti risposte ha affrontato in modo esauriente tutti i quesiti posti: la più completa, e anche la più corretta come esposizione, è quella proveniente dal Liceo Scientifico "Galilei" di Adria.

Nessuno ha rilevato che la generalizzazione del problema è possibile solo quando i segmenti PQ ed RT assegnati sono tali che $PQ > 2RT$.

Oltre a varie pecche di linguaggio, abbiamo rilevato alcune imprecisioni concettuali che qui elenchiamo:

- non tutti hanno rispettato le lunghezze assegnate;
- una retta ed una circonferenza in genere hanno due punti di intersezione, quindi si dovevano individuare almeno due soluzioni nello stesso semipiano!
- se con le lettere minuscole si indicano le rette, non si può parlare del "punto medio di p"!
- il problema richiedeva una costruzione e non sempre è stato precisato come ottenere la distanza di un punto da una retta o fra due rette (eppure basta mandare una perpendicolare), o come riportare una distanza fra due punti (anziché usare il righello, che è uno strumento poco preciso, basta tracciare, come facevano già i Greci, una circonferenza);
- chi ha provato a dare una motivazione non lo ha fatto in modo esauriente o non ha citato il

teorema utilizzato (bastava menzionare il fascio di rette parallele tagliato da trasversali o il suo corollario).

Siamo convinti che farete tesoro di quanto qui rilevato e che prima di rispondere ai prossimi quesiti metterete un po' più attenzione nel leggere il testo del problema e nell'espone la soluzione. In ogni caso l'importante è partecipare: è un modo per accrescere e migliorare tutti insieme le nostre conoscenze.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

SM "Testoni-Fioravanti", Bologna

ITG "Rondani", Parma

ITI "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

ITI "Euganeo", Este (PD)

LS "Galilei", Adria (RO)

LS "Mascheroni", Bergamo

Riportiamo due risposte ai quesiti a) e b).

NOTA: Nelle soluzioni abbiamo messo tra parentesi quadre le correzioni o i commenti al testo.

Soluzioni

Pignoletti Alberto

ITIS "Euganeo" - ESTE (PD)

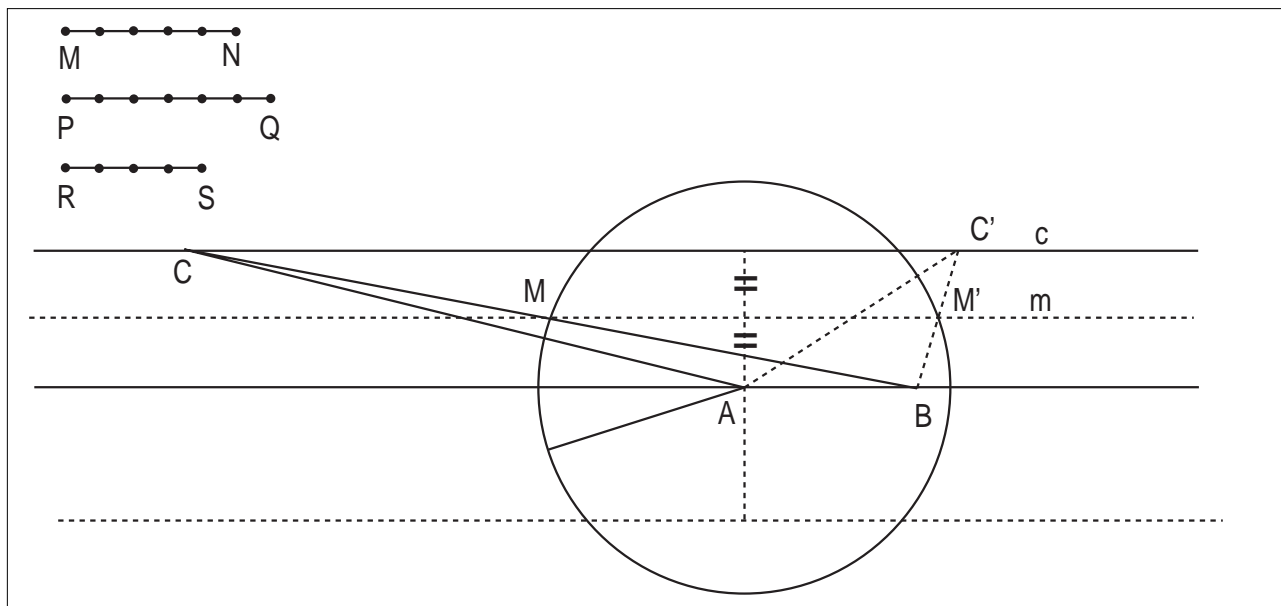
Classe 1Bst

Proposta di Soluzione del Problema del Mese:

Sapendo che il segmento di base AB corrisponde al segmento MN , che misura secondo le mie indicazioni 5 cm, lo traccio e agli estremi scrivo le lettere A e B .

Traccio la retta (c) parallela al segmento AB alla distanza di 4 cm [come si ottiene?] (che conterrà il punto C), che può essere sia sopra che sotto al segmento AB (quindi se trovo un triangolo esisterà anche il simmetrico rispetto alla retta AB).

Traccio la retta intermedia (m) [parallela a c , passante per il punto medio della distanza] tra il segmento AB e la retta tracciata in precedenza per trovare la retta che conterrà il punto M dove cadrà la mediana.



Punto il compasso nel punto A e traccio una circonferenza di raggio 6 cm che interseca la retta intermedia (m) nel punto M e nel punto M' .

Congiungo il punto B con il punto M e B con M' e prolungo ciascuno dei due segmenti fino alla retta (c) parallela al segmento AB .

Fatto ciò congiungo il punto A con il punto C [e C'].

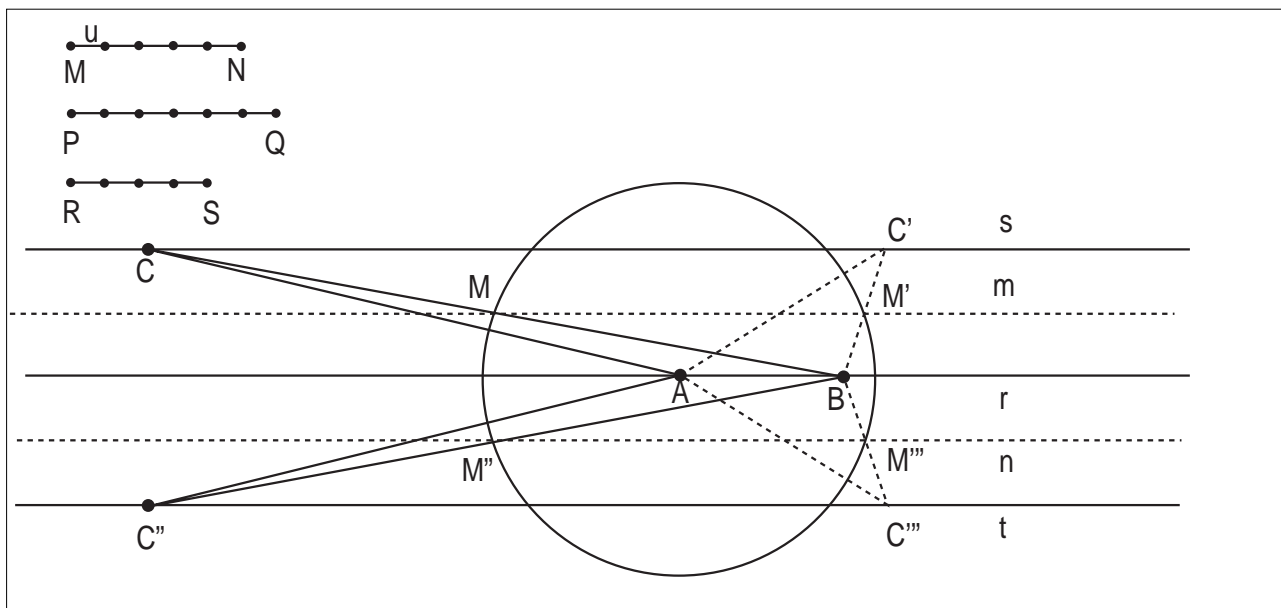
La soluzione non è unica, esiste anche il triangolo simmetrico di ciascuno di questi rispetto all'asse AB . I triangoli sono quindi 4.

Piazzon Mauro, Rocchi Matteo, Santarato Enrico e Sartori Paolo
 Liceo Scientifico Statale "Galileo Galilei"
 ADRIA (Rovigo)
 Classe 2° A-PNI

a) Stabilita un'unità di misura u .

Su una retta r si prende il segmento AB misurante $5u$. Si tracciano le rette s e t parallele ad AB , situate su semipiani opposti di bordo AB e distanti da AB $4u$ [come si tracciano?]; e le rette m e n sempre situate su semipiani opposti di bordo AB , distanti $2u$ da AB e parallele ad AB .

Tracciare la circonferenza di centro A e di raggio $6u$, che interseca le rette m e n nei punti M e M' , su m , e M'' , M''' , su n ; questi punti saranno i punti medi dei segmenti BC , BC' , BC'' e BC''' , passanti rispettivamente per M , M' , M'' e M''' , e aventi C e C' , appartenenti a s , e C'' e C''' , appartenenti a t . Infatti la retta m taglia a metà qualunque segmento che ha un estremo in B e un altro in un punto C di s , e $CM = MB$; quindi l'estremo M nella mediana AM , relativa a BC , deve cadere sulla retta m . Analogamente succederà per la retta n .



Pertanto congiungendo A con i punti M , M' , M'' e M''' , si troveranno le mediane dei quattro triangoli scaleni ABC , ABC' , ABC'' e ABC''' , ognuno di altezza $4u$.

b) Non esiste una sola soluzione, ma ben quattro, come visto nel punto a).

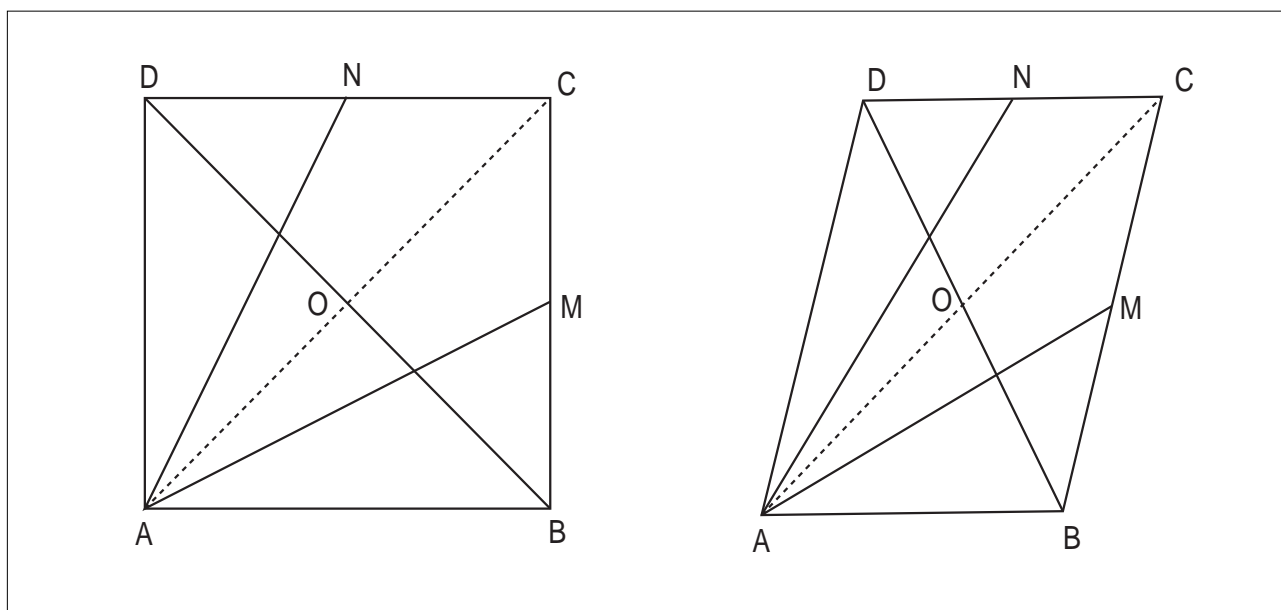
3 - 17 Novembre 1998

Dato un quadrato ABCD, dal vertice A escono due segmenti che lo congiungono con i punti medi M e N rispettivamente dei lati BC e CD.

Questi segmenti dividono una diagonale del quadrato in tre parti congruenti.

a) Riesci a motivare questa asserzione?

b) Questa proprietà vale anche in altri quadrilateri? Quali? Perché?

**Commento**

Abbiamo ricevuto in tutto nove risposte provenienti da otto scuole di cui quattro scuole medie inferiori.

Due risposte non sono accettabili:

una contiene una affermazione errata (la proprietà delle mediane è stata estesa alle altezze di “ogni triangolo”!) nella parte a) ed è incompleta nella parte b); nell’altra la dimostrazione della prima parte è errata in quanto contiene affermazioni non dimostrate (non sempre ciò che appare vero in una figura lo è “per costruzione” o “per ipotesi”) e non è stata risolta la seconda parte.

Il problema presentava una proprietà da dimostrare in una situazione particolare quale il quadrato, e richiedeva successivamente una sua generalizzazione.

Chi ha risposto alla domanda a) con una dimostrazione valida solo per il quadrato, non ha poi motivato sufficientemente la risposta b).

Tre sono le risposte complete e corrette (a parte alcune imprecisioni nella esposizione), nelle quali è stata individuata la proprietà generale che permette di rispondere sia alla domanda a), sia alla domanda b).

Le scuole che hanno partecipato sono:

SM “Carlo Jussi” San Lazzaro di Savena (BO)

SM “Panzacchi” Ozzano Emilia (BO)

SM “Benati” Roverbella, sede staccata di Marmirolo (MN)

SM “Don Evasio Ferraris” Cigliano (VC)

IPSIA “Meucci” Cagliari

ITIS “Cesaris” Casalpusterlengo (LO)

LS “Antonelli” Novara

LS “Ulivi” Parma

In questa occasione si sono distinti particolarmente i ragazzi della scuola media e per questo abbiamo scelto di presenta-

re due loro risposte: una completa, dell'altra solo la prima parte.

NOTA: Le correzioni al testo sono fra parentesi quadre. Le parti superflue sono fra doppie parentesi quadre.

Soluzioni

Classe 3ªA

Scuola media "Carlo Jussi"

San Lazzaro di Savena - Bologna

(Questa soluzione è simile a quelle inviate da Murgia Salvatore e Contu Ivan di Cagliari e da Curotti Alessandro di Casalpusterlengo (LO))

a) Nel quadrato le diagonali sono isometriche e si dimezzano.

Dalle 2 diagonali il quadrato viene diviso in 2 triangoli rettangoli isosceli congruenti in cui AM e AN sono una mediana [sono mediane]; $1/2$ [meta'] diagonale (BO) è la mediana relativa al lato AC (l'altra diagonale); quindi i punti L e S in cui la diagonale viene divisa dai segmenti condotti da A sono il baricentro del triangolo (ABC) [e del triangolo (ADC)].

Secondo una proprietà delle mediane, il baricentro divide la mediana stessa in 2 segmenti di cui quello verso il vertice è doppio dell'altro per cui $BL = 2 \cdot OL$; ma $OL = OS$ e si verifica allora che $BL = DS = SO + OL$. E quindi i tre segmenti risultano congruenti.

b) Vale per tutti i parallelogrammi perché in essi le diagonali si dimezzano e dividono [ciascuna divide] la figura in due triangoli congruenti.

Valentina Rosa, Pirrone Domenico

Sms Enrico Panzacchi

Ozzano Emilia (BO)

Se consideriamo i due triangoli rettangoli ABM e AND, possiamo affermare che sono congruenti perché AB corrisponde [è congruente] a DA e MB a DN e l'angolo tra essi è in tutti e due i casi di 90 gradi.

Quindi questi due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza e MA è congruente a NA.

Concentriamoci adesso sui triangoli EBM e DFN.

Di essi sappiamo che $MB = DN$ e che gli angoli B e D sono di 45 gradi perché la diagonale del quadrato taglia a metà l'angolo di 90 gradi.

Possiamo anche dire che [l'angolo] $M = N$ grazie alle figure prese in considerazione prima.

Se due angoli sono congruenti [[per forza]] anche il terzo è uguale.

I 2 triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli.

Quindi EB è congruente a DF.

Per dimostrare che anche FE è congruente a EB e DF guardiamo i triangoli DFN e FAB.

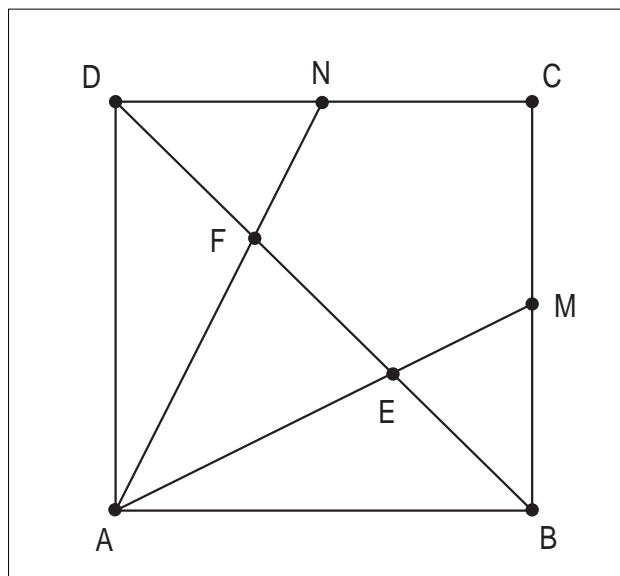
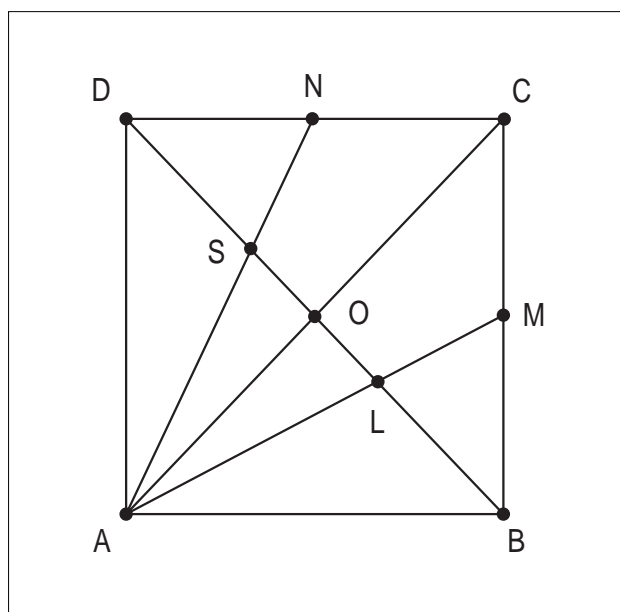
Essi hanno [l'angolo] $N = A$ perché alterni di rette parallele DC e AB tagliate dalla trasversale AN.

$B = D$ per lo stesso motivo, ma con trasversale BD e DFN e AFB sono

uguali perché opposti al vertice quindi i due triangoli sono simili con $R = 1/2$ perché $DN = 1/2 AB$ per costruzione.

Quindi $DF = 1/2 FB$.

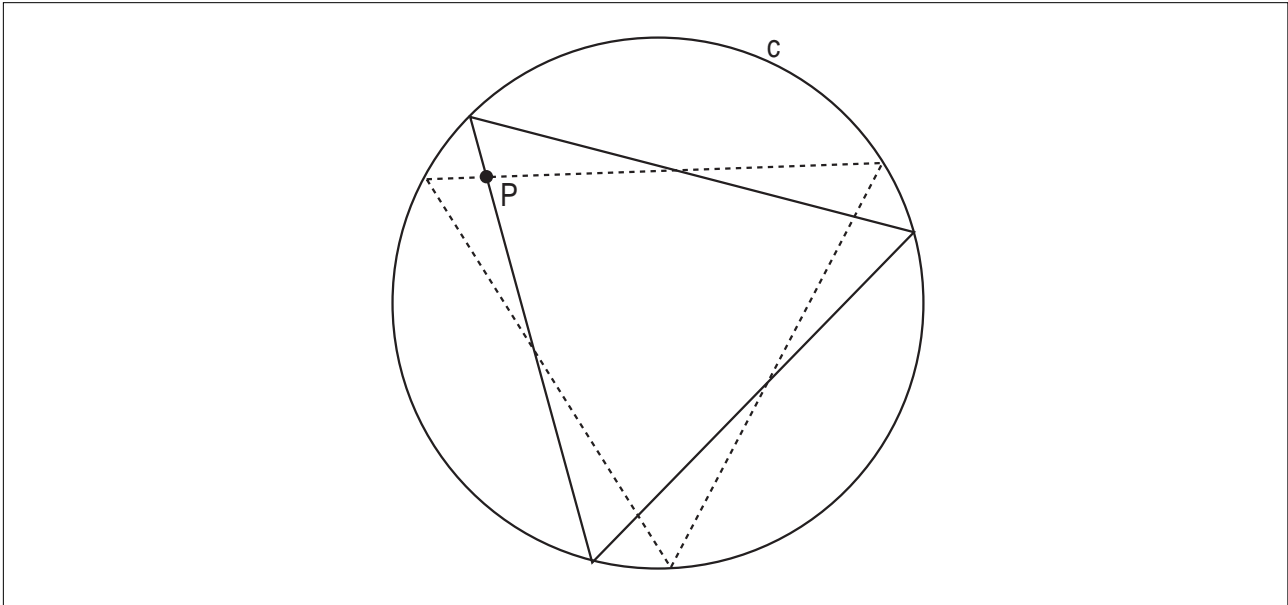
Ma $FB = FE + EB$ sostituisco [$FB =$] $FE + DF$ quindi $FE = EB = DF$.



7 - 21 Dicembre 1998

Data una circonferenza C ed un punto P interno ad essa, costruire (con riga non graduata e compasso) un triangolo equilatero inscritto in C con un lato passante per P .

Il problema ammette sempre soluzioni? Quante?

**Commento**

Abbiamo ricevuto undici risposte provenienti da nove scuole, di cui quattro sono scuole medie inferiori, ed una risposta che non è stata valutata in quanto "l'autore" non dichiara se è uno studente e, in tal caso, di quale scuola e località.

Fra le risposte prese in esame, tre non sono state accolte per motivi di vario ordine:

- l'esplorazione con il software Cabri è una premessa utile alla scoperta del risultato, ma non è né una costruzione né una dimostrazione;
- la costruzione di un qualunque triangolo equilatero inscritto in una circonferenza e la sua rotazione affinché un suo lato passi per un punto P , non è un metodo di risoluzione accettabile.
- la circonferenza interna a quella data non è una qualunque ma una ben precisa circonferenza con raggio metà di quello della data;

Il problema richiedeva una costruzione, con riga e compasso o con un software idoneo, ed una indagine sulle sue possibilità di realizzazione:

in tutte le risposte accolte i due quesiti posti sono stati risolti in modo più o meno esauriente ed è stata riscontrata una discreta correttezza nella esposizione; ci siamo quindi trovati nell'imbarazzo della scelta della risposta da presentare.

Abbiamo optato per due risposte da inviare via e-mail:

una perché proveniente da una scuola media inferiore, che propone la stessa costruzione di quasi tutte le altre; l'altra, inviata da una scuola media superiore, perché anche se necessita di una nota chiarificatrice, ricorre ad una costruzione diversa dalla precedente.

Una terza risposta, scelta per la completezza della sua costruzione, poiché necessita della figura, verrà presentata nel sito web dedicato a Flatlandia.

Le scuole che hanno partecipato sono:

- SM "Carlo Jussi" San Lazzaro di Savena (BO)
- SM "Testoni Fioravanti" Bologna
- SM "Don Bosco" Padova
- SM "Luca Valenziano" Tortona (AL)

ITI "Euganeo" Este (PD)
 ITG "Buonarroti" Caserta
 LSPP "A. Cairoli" Pavia
 LS "G. Galilei" Adria (RO)
 LS "Morandi" Finale Emilia (MO)

NOTA: Nelle soluzioni riportate le correzioni al testo sono fra parentesi quadre. Le parti superflue sono fra doppie parentesi quadre.

Soluzioni

Soluzione della classe 2^a D t.p.

Scuola Media St. "Luca Valenziano"

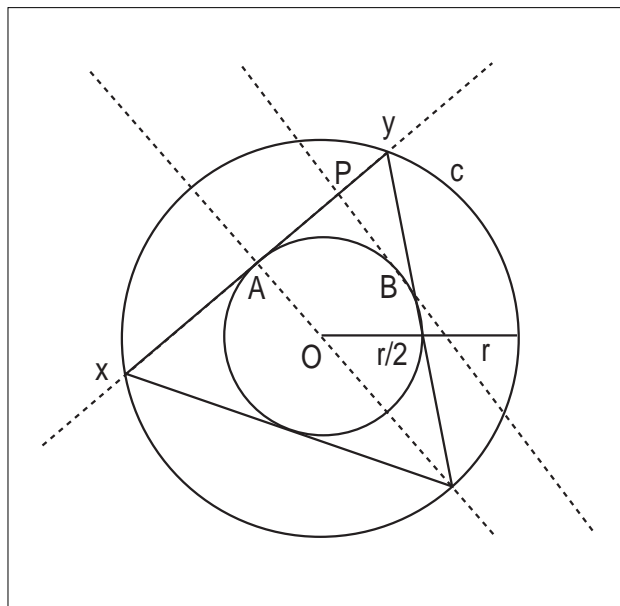
Tortona (AL)

Data una circonferenza C di centro O e raggio r , il lato del triangolo equilatero inscritto in C ha distanza dal centro uguale ad $r/2$. Il punto P allora dovrà essere tale che $r/2 \leq OP \leq r$ [$< r$].

Costruzione del triangolo equilatero richiesto:

- 1) costruire la circonferenza C' di centro O e raggio $r/2$;
- 2) mandare da P le tangenti a C' ed indicare con A e B i punti di tangenza;
- 3) prolungare il segmento AP ed indicare con X e Y le intersezioni con C . La corda XY è il lato del triangolo equilatero cercato. Il terzo vertice del triangolo è il punto di intersezione con C del diametro passante per A , situato da parte opposta ad A rispetto ad O ;
- 4) con analoga costruzione, prolungando il segmento PB , si ottiene un'altra soluzione del problema.

Il problema ammette dunque due soluzioni, simmetriche rispetto al diametro passante per P , distinte se $r/2 < OP < r$, coincidenti se $OP = r/2$ [$o OP = r$].

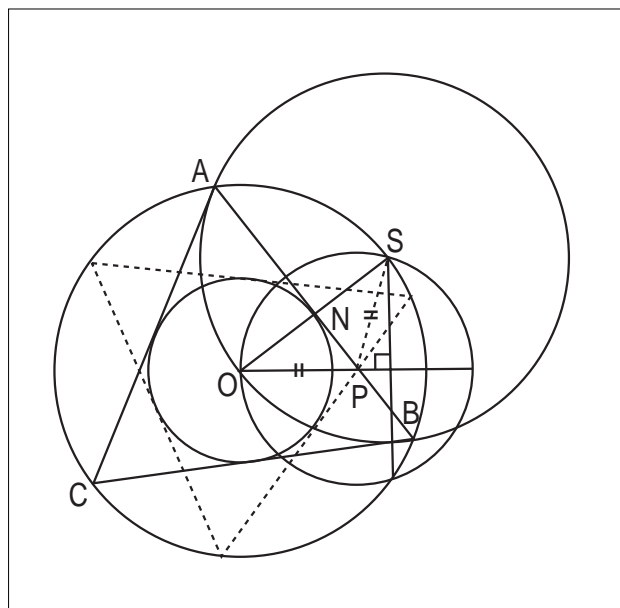


Federica Lunardi, Peruffo Anna

ITIS "Euganeo" Este (PD)

Costruisco una circonferenza c di centro O e raggio r . Trovo il punto medio del raggio r e traccio la circonferenza di raggio OM . Inserendo [Disegnando] il triangolo equilatero nella circonferenza c , si osserva che O è punto d'incontro delle altezze, delle mediane, quindi se il lato è $A'B'$ e l'altezza relativa $C'H$, questa passa per O e $C'O$ è il doppio di $C'H$ ($C'H = r/2$).

Se costruisco il cerchio di raggio $r/2$ e centro in O , ogni lato del triangolo inscritto in c risulta tangente (perpendicolare al raggio) alla circonferenza di raggio $r/2$. Quindi il punto P per appartenere al lato del triangolo equilatero deve essere all'interno della corona circolare (cioè alla parte di cerchio grande non comune al cerchio piccolo). Se prendo P all'interno del cerchio piccolo (di raggio $r/2$) non esisterà il triangolo equilatero.



Inserisco il punto P all'interno del settore circolare (ho disegnato un punto sulla circonferenza grande, ho disegnato il segmento che unisce questo punto con O , ho fatto l'intersezione con la circonferenza piccola, ho costruito il segmento che unisce i due punti sulle circonferenze e ho inserito P su questo segmento, così sono sicura che P è

interno alla corona circolare). Traccio la circonferenza di raggio PO e trovo i punti di intersezione con la circonferenza c . Da uno dei due punti (quindi i triangoli che posso costruire sono due), che ho chiamato S , traccio la circonferenza di raggio SO e trovo l'intersezione con la circonferenza c .

Chiamo i due punti A e B . Il segmento che unirà i due punti sarà un lato (passante per P) del triangolo. Trovo il punto medio di AB che chiamo N , traccio la perpendicolare ad AB passante per N , passa per il centro O e interseca la circonferenza nel punto C .

[Nota: la costruzione è valida perché in questo modo il punto P appartiene all'asse di OS , come evidenziato nella figura che apparirà sul sito web di Flatlandia]

Ho realizzato il lavoro con CABRI.

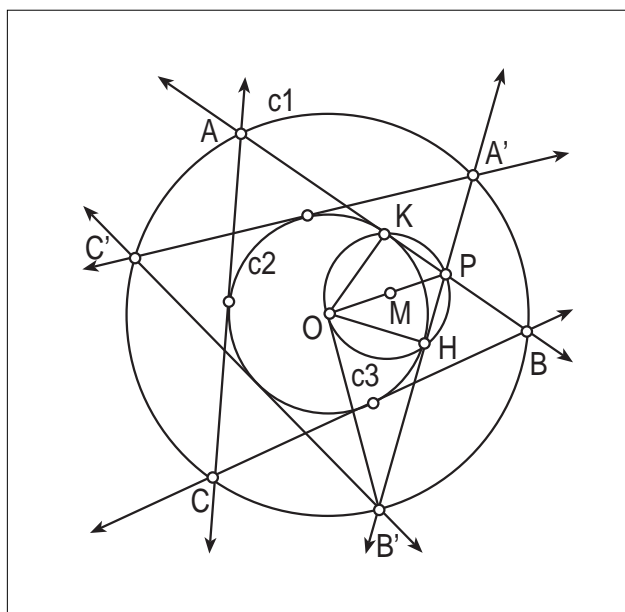
Verifica al VIDEO: Se clicchiamo sul punto P e lo spostiamo all'interno della corona circolare c è sempre la costruzione del triangolo equilatero;

appena sposto P all'interno della circonferenza di raggio MO , il triangolo sparisce perché non esiste.

Classe II sez. E (Corso sperimentale Progetto 5)

I. T. G. "Buonarroti" Caserta

Con riferimento alla figura, si vuole riportare la soluzione del quesito proposto in questo mese.



Dal punto P , interno al cerchio, si mandano le rette tangenti alla circonferenza $c2$, concentrica alla data circonferenza $c1$, ma di raggio $r2$, uguale alla metà del raggio (diciamolo $r1$) della circonferenza assegnata $c1$. Detti A, B e A', B' i punti di intersezione di dette tangenti con la $c1$, da essi si tracciano le tangenti alla $c2$ (tali tangenti hanno dal centro O una distanza pari ad $r1/2$, ovviamente). I due triangoli (ABC) e $(A'B'C')$ risultano equilateri per avere i tre lati uguali, ognuno pari a $r1/2 * \sqrt{3}$, come facilmente si può calcolare, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OHB' , retto in H . OB' (ipotenusa) è il raggio $r1$ della circonferenza $c1$, mentre OH è di misura $r1/2$.

Diciamo d la distanza del punto P dal centro O della circonferenza $c1$; se $d < r1/2$, non esistono triangoli equilateri soddisfacenti le condizioni poste dal quesito; se $d = r1/2$, allora la soluzione esiste ed è unica, perché è unica la retta tangente alla circonferenza $c2$, condotta da

P , che in questo caso appartiene alla $c2$; se $r1/2 < d < r1$ allora le soluzioni sono due (è il caso della figura sopra riportata).

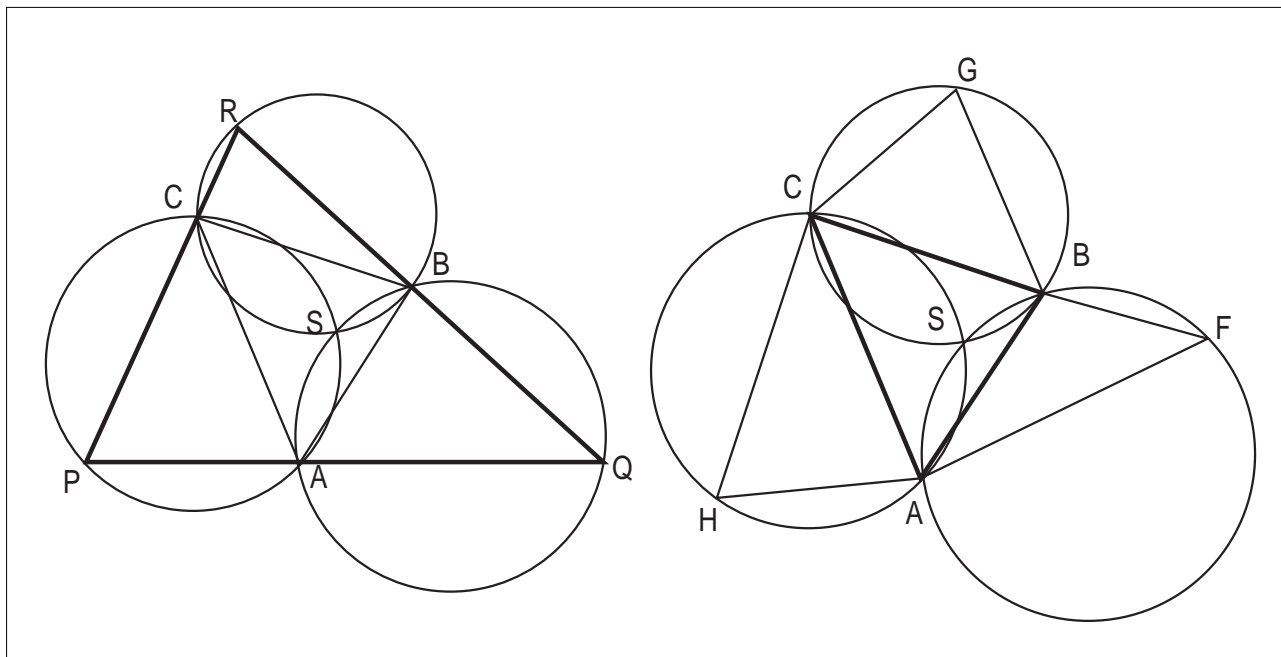
La circonferenza $c3$, rappresentata in figura, serve alla costruzione delle rette tangenti alla $c2$ condotte da P .

11 - 25 Gennaio 1999

a) Dato un triangolo PQR, se i vertici A, B, C di un triangolo giacciono rispettivamente sui lati PQ, QR, RP, allora le tre circonferenze circoscritte ai triangoli PAC, QAB, RBC passano per uno stesso punto.

Giustificare tale proprietà.

b) Dato un triangolo ABC costruire esternamente ad esso tre triangoli ABF, CBG, CAH e le circonferenze a questi circoscritte. A quale condizione debbono soddisfare gli angoli di vertici F, G, H, affinché le tre circonferenze passino per uno stesso punto?

**Commento**

Questa volta sono pervenute solo quattro risposte da altrettante Scuole Superiori. Era forse il quesito troppo impegnativo per i ragazzi della Scuola Media Inferiore?

Speriamo con il prossimo problema di riuscire a coinvolgere anche loro!

Le quattro risposte pervenute sono tutte accettabili anche se due presentano un uso improprio del termine “supplementare” il quale indica una relazione fra due (e non tre) angoli; inoltre, nella seconda parte del problema, una delle risposte considera solo il caso particolare già presentato nella prima parte.

Il problema richiedeva infatti la dimostrazione di una proprietà presentata in un caso particolare nella prima parte, per passare successivamente alla sua generalizzazione.

Le scuole che hanno partecipato sono:

LST “Cesaris” Casalpusterlengo (LO)

ITG “Buonarroti” Caserta

LS “G.B. Scorza” Cosenza

LS “Antonelli” Novara

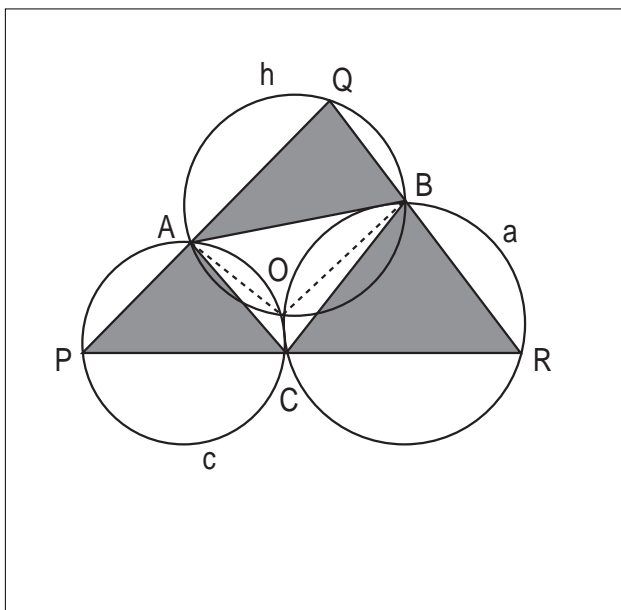
Abbiamo scelto di riportare interamente la risposta inviata dalla scuola “G. B. Scorza” e la prima parte di quella inviata dal LST “Cesaris”.

NOTA: Nelle soluzioni riportate le correzioni o i commenti al testo sono fra parentesi quadre.

Soluzioni

Francesca Scaramuzzo 3 H e Anna Rita Alitto II G
Liceo Scientifico "G.B.Scorza" Cosenza

a) Sia a la circonferenza circoscritta a CRB , b la circonferenza circoscritta a ABQ e c la circonferenza circoscritta a PCA .



Sia O il punto di intersezione di a e b . Uniamo O con A , B e C .

Il quadrilatero $OBQA$ è inscritto in b .

Per questo $OBQ + OAQ = 180^\circ$. [OBQ e OAQ rappresentano qui le misure dei rispettivi angoli; analogamente in seguito]

I punti P , A e Q sono allineati, dunque $PAQ = 180^\circ$.

$PAQ = OAP + OAQ$.

$OAP = OBQ$ perché supplementari dello stesso angolo.

Il quadrilatero $CRBO$ è inscritto in a .

Per questo $RCO + RBO = 180^\circ$.

I punti P , C e R sono allineati, dunque $PCR = 180^\circ$.

$PCR = PCO + OCR$.

$PCO = RBO$ perché supplementari dello stesso angolo.

R , B e Q sono allineati, dunque $RBQ = 180^\circ$.

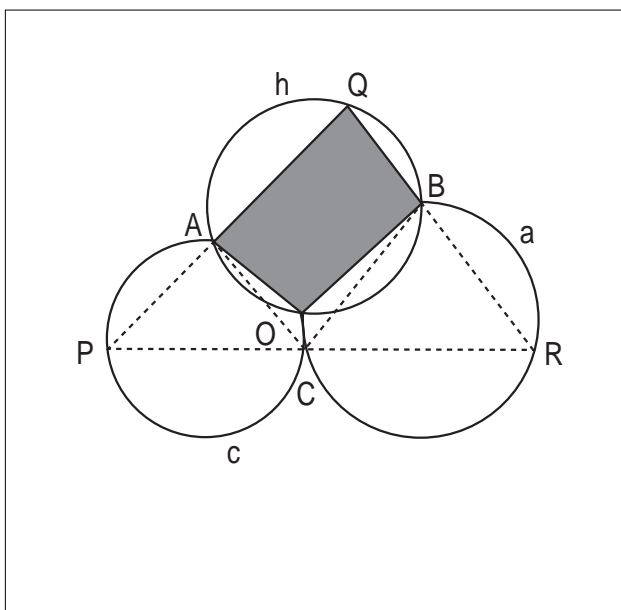
$RBQ = RBO + OBQ$.

Per la transitività della congruenza $RBQ = PCO + OAP$.

Poiché PCO e OAP sono supplementari e sono angoli opposti del quadrilatero $OCPA$, il quadrilatero stesso è

inscrivibile in una circonferenza. Tale circonferenza è c , poiché per tre punti (A, P, C) passa una sola circonferenza.

O appartiene quindi a c , ma poiché è anche il punto di intersezione a e b le tre circonferenze passano per uno stesso punto.



b) Sia O il punto di intersezione delle circonferenze circoscritte a AHC , CBG e ABF .

Congiungiamo O con A , B e C .

Poiché i quadrilateri $AHCO$, $OCGB$ e $AOBF$ sono inscritti in circonferenze, $COB + G = 180^\circ$, $COA + H = 180^\circ$, $AOB + F = 180^\circ$.

$AOC + COB + AOB = 360^\circ$.

Per differenza di angoli, $G + H + F = 3 \times 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ$.

Classe 2° liceo scientifico tecnologico ITI Cesaris Casalpusterlengo (LO)

1) Facendo riferimento alla figura [inviata in attachment] si considerano le circonferenze circoscritte ai triangoli

APB e BCR [le lettere B e C sono scambiate rispetto al testo assegnato]. Sia T il punto di intersezione di tali circonferenze distinto da B .

Per dimostrare che la circonferenza circoscritta a ACQ passa per T basta dimostrare che $ATQC$ è un quadrilatero inscrittibile. Siano a l'angolo in P , b l'angolo in R , g l'angolo in Q [i simboli a , b , g , sono usati in seguito per indicare le misure dei rispettivi angoli]. Poiché [il quadrilatero] $PATB$ è inscrittibile, l'angolo ATB misura $p - a$; poiché [il quadrilatero] $TBCR$ è inscrittibile l'angolo BTC misura $p - b$ [con p viene indicata la misura dell'angolo piatto]. Quindi ATC misura:

$$2p - (p - a) - (p - b) = 2p - p + a - p + b = a + b.$$

Perciò, ricordando che

$$a + b + g = p,$$

l'angolo ATC è supplementare di AQC e quindi il quadrilatero $ATQC$ è inscrittibile.

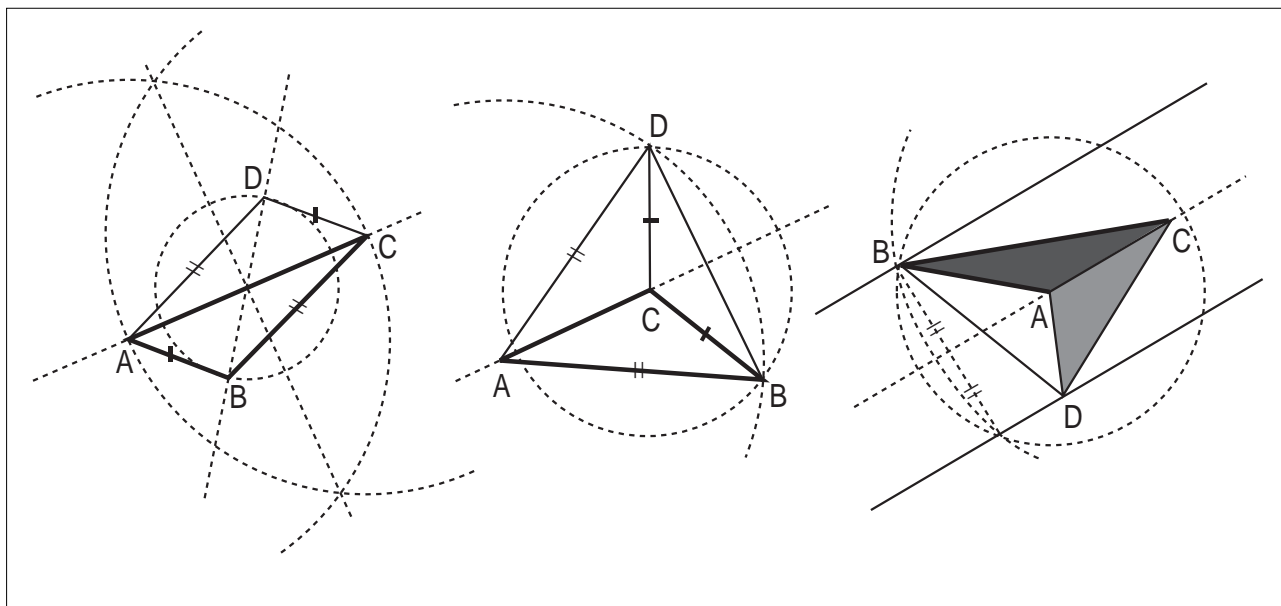
1 - 15 Febbraio 1999

a) Costruire un quadrilatero ABCD, diviso dalla diagonale AC in due triangoli congruenti.

- 1) Quali e quanti tipi di quadrilateri si possono ottenere? Motivare le risposte.
- 2) Dimostrare che in ognuno dei casi individuati la retta AC dimezza la diagonale BD.
- 3) Le figure ottenute presentano delle simmetrie?

b) Come possono variare i vertici B e D se vogliamo ora che il quadrilatero ABCD sia diviso dalla retta AC in due triangoli equivalenti? In tal caso che cosa succede alla diagonale BD?

Giustificare le risposte.

**Commento**

Abbiamo ricevuto undici risposte provenienti da otto scuole di cui una sola è una Scuola Media Inferiore ed inoltre ci è pervenuta una figura proveniente dalle classi quinte di una scuola elementare (benvenuti nel mondo di Flatlandia!).

Due risposte non sono accettabili: una perché non fornisce né costruzioni né motivazioni nella prima parte (che contiene anche affermazioni non pertinenti) e non ha recepito la richiesta del problema nella seconda parte; l'altra non fornisce alcun criterio di costruzione delle figure e non chiarisce quali siano le ipotesi delle dimostrazioni successive, confonde le caratteristiche di simmetria dei parallelogrammi e dei romboidi (deltoidi) e dà una motivazione completamente errata nella seconda parte.

Anche nella maggioranza delle risposte accolte la costruzione delle figure è solo accennata o descritta in modo incompleto.

Il problema chiedeva esplicitamente di costruire quadrilateri con una particolare caratteristica e di indagare poi su una loro proprietà e su eventuali simmetrie.

Chi ha utilizzato subito il concetto di simmetria per fare le figure doveva ugualmente descrivere le costruzioni e non rimandare alle figure già fatte.

Ricordate che nelle comunicazioni via mail non possiamo riportare le figure!!

Abbiamo riscontrato in generale un buon livello nella esposizione, speriamo anche in una più precisa attenzione ai contenuti.

Le scuole che hanno partecipato sono:

Sc.El. "Villaggio Europa" (Dir.Did.II Circolo) Alessandria

SM "Luca Valenziano" Tortona AL

LG "Concetto Marchesi" Oderzo TV

IPSAR "Pellegrino Artusi" Forlimpopoli FO

LS "Francesco d'Assisi" Roma

ITI "Euganeo" Este

LS "Galileo Galilei" Adria RO

LST "Cesaris" Casalpusterlengo LO

ITI "Einaudi-Galilei" San Giovanni in Persiceto BO

Abbiamo scelto di riportare via e-mail la risposta dell'Iti "Euganeo" per la completezza dei casi osservati; la risposta dell'Ipsar "Artusi", anche se incompleta nella seconda parte, perché descrive in modo esauriente le costruzioni; infine la prima parte della risposta inviata dalla Scuola Media (la seconda parte non è accettabile) per testimoniare l'apprezzabile livello di preparazione della classe che l'ha inviata.

Una ulteriore risposta, scelta per la completezza della sua esposizione, poiché necessita delle figure, verrà presentata nel sito web dedicato a Flatlandia. [Non è stato possibile in quanto non ci sono pervenute le figure]

NOTA: Nelle soluzioni riportate le correzioni o i commenti al testo sono fra parentesi quadre.

Soluzioni

Federica Lunardi e Anna Peruffo

ITIS "Euganeo" - Este (PD)

Classe 1° B, indirizzo Scientifico-Tecnologico

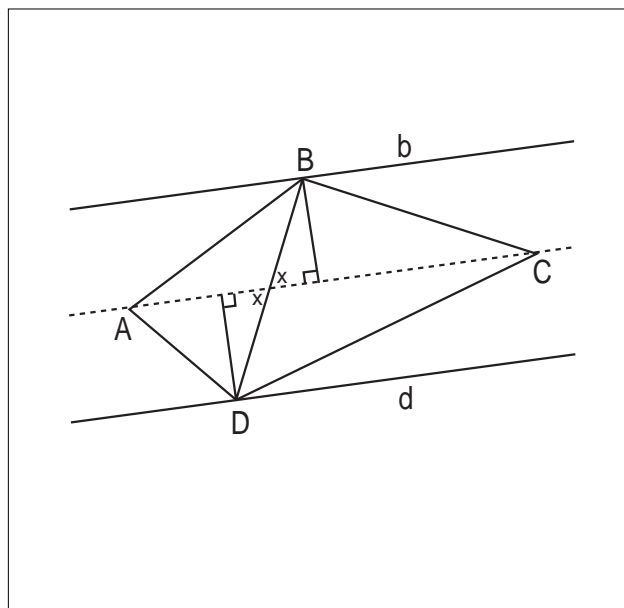
1) Si può ottenere un parallelogramma ottenuto dal triangolo ABC, il cui lato AB viene traslato nella retta parallela ad AB passante per C.

Congiungendo D con A otteniamo un parallelogramma che può essere rettangolo, se gli angoli sono retti; quadrato se gli angoli sono retti e i lati uguali, rombo se i lati sono uguali. Questa figura presenta la simmetria centrale con centro il punto di intersezione delle diagonali (quindi la diagonale maggiore AC dimezza quella minore DB).

2) Partendo dal triangolo ABC con una simmetria di asse AC costruisco il quadrilatero (romboide [deltoide]). Questo romboide [deltoide] può essere formato da due triangoli isosceli ABD e BDC da cui si possono ottenere due situazioni:

- Se il punto d'intersezione O delle diagonali AC e BD coincide con A si forma un triangolo isoscele, che rappresenta il massimo limite (si ha quando il triangolo ABC è retto in A, AC e AB sono i cateti, e CB è l'ipotenusa).

- Se il punto d'intersezione O delle diagonali AC e BD è esterno al segmento AC si forma un quadrilatero non convesso.



- Se il punto d'intersezione O delle diagonali AC e BD è interno al segmento AC si forma un quadrilatero convesso (romboide[deltoide]).

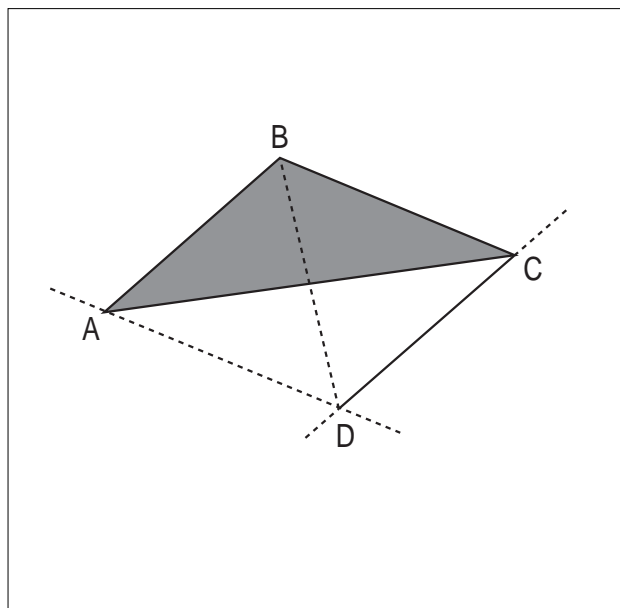
- La figura presenta sempre la simmetria assiale e il segmento AC dimezza sempre il segmento BD (è asse del segmento BD).

b) Per avere triangoli equivalenti, con base coincidente AC, dobbiamo avere i vertici sulle rette (b e d) parallele ad AC ed equidistanti da AC (così i triangoli hanno anche uguale altezza).

In questo caso fissato il vertice B sulla retta b e preso D sulla retta d, posso muovere D sulla retta d e osservo che il segmento DB è formato dai due segmenti che sono le ipotenuse di due triangoli rettangoli che hanno un cateto uguale (la distanza tra le due rette parallele) e gli angoli acuti uguali (i due opposti al vertice, i due retti e gli altri acuti uguali).

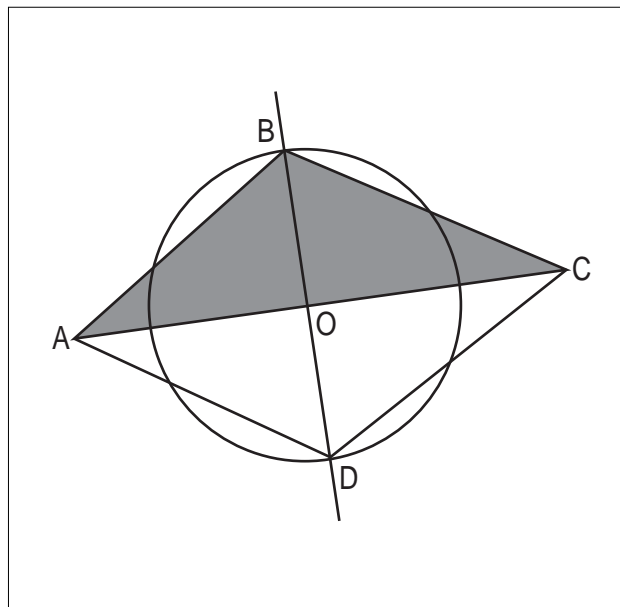
Soluzione delle classi 2A e 2B
IPSSAR "Pellegrino Artusi"
Forlimpopoli (FO)

a) Partendo da un triangolo (qualunque) ABC esistono due metodi per ottenere un quadrilatero con le caratteristiche richieste. Il primo metodo (fig. 2) consiste nel tracciare la parallela ad AB passante per C e la parallela a BC passante per A e dopo aver chiamato D il punto di intersezione di tali rette si costruiscono i segmenti AD e CD. Il secondo metodo (fig. 3) è il seguente: si traccia la perpendicolare alla retta AC passante per B e si chiama O il punto di intersezione delle due rette. Si traccia poi la circonferenza di centro O e raggio OB e si chiama D il punto di intersezione di questa circonferenza con la retta OB. Successivamente si costruiscono i segmenti AD e CD.



1) Col primo metodo si ottiene un parallelogramma che, in casi particolari, può essere un rombo, un rettangolo o un quadrato. Nel secondo caso si ottiene un quadrilatero con le diagonali perpendicolari che può essere convesso se entrambi gli angoli in A e in C sono acuti oppure concavo se uno dei due angoli è ottuso. Nel caso in cui uno dei due angoli sia retto la figura non è un quadrilatero ma un triangolo. In totale, quindi, sei tipi di quadrilateri.

2) Nel caso in cui il quadrilatero sia un parallelogramma, la diagonale BD è divisa a metà dalla retta AC per una proprietà delle diagonali di un parallelogramma. Nel secondo caso, invece, OB e OD hanno la stessa lunghezza in quanto raggi della stessa circonferenza.



3) Il parallelogramma presenta una simmetria centrale con centro il punto di intersezione delle diagonali. Il quadrilatero con le diagonali perpendicolari (sia esso concavo o convesso) presenta una simmetria assiale con asse la retta AC.

b) Si consideri il quadrilatero ABCD e si costruiscano le

rette parallele ad AC passanti per B e per D. I punti B e D possono muoversi liberamente su tali parallele in quanto i triangoli ACB e ACD hanno la base AC in comune e le altezze di uguale lunghezza per cui hanno la stessa area (fig. 1). Nel caso in cui uno degli angoli interni BAD o BCD abbia un'ampiezza maggiore di 180 gradi; il quadrilatero ABCD risulta concavo e la diagonale BD non interseca l'altra diagonale AC [ma interseca la retta AC].
 [Manca la dimostrazione che AC dimezza BD]

Soluzione della classe II D t.p.
Scuola Media Statale "L. Valenziano"
Tortona (AL).

Alleghiamo, se ci riesce la procedura di attachment, la costruzione, ottenuta utilizzando CABRI-GEOMETRE 1.7 per MS-DOS.

a) Abbiamo preso in considerazione 2 ipotesi:

1° ipotesi: lati consecutivi congruenti: $AD=AB$ e $DC=BC$. Il quadrilatero ABCD è un deltoide. AC è asse di simmetria. Detto H il punto di intersezione delle diagonali, $DH=HB$ perché i punti D e B si corrispondono in tale simmetria.

2° ipotesi: lati opposti congruenti: $AD=BC$ e $DC=AB$. Il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo. In un parallelogrammo le diagonali si dimezzano e il loro punto di intersezione è centro di simmetria.

1 - 15 Marzo 1999

a) Dimostrare che la bisettrice di un angolo è l'asse di una simmetria che trasforma ciascun punto di un lato dell'angolo in uno dell'altro lato.

b) Dati:

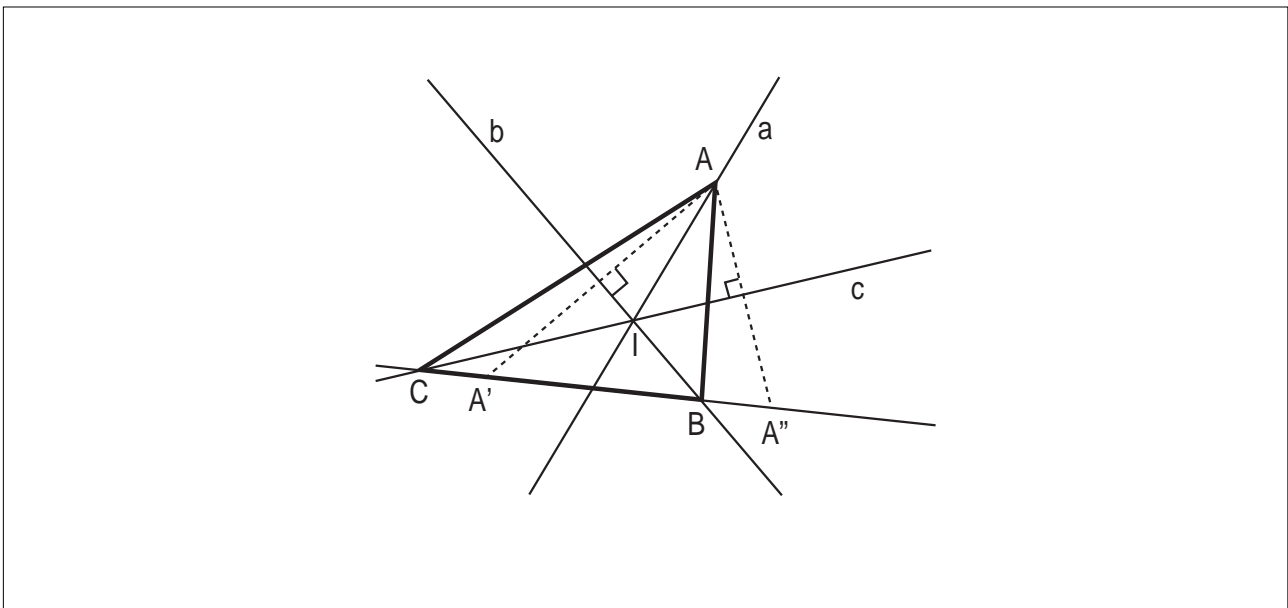
- tre rette che concorrono in un punto I;

- un punto A su una di esse;

costruire un triangolo che ha tali rette come bisettrici e uno de suoi vertici in A.

Esiste sempre una soluzione? E' unica?

Motivare la costruzione e giustificare le risposte.

**Commento**

Abbiamo ricevuto sette risposte provenienti da sette scuole di cui quattro sono Scuole Medie Inferiori.

Sono inoltre pervenute tre figure realizzate da una classe quinta di una scuola elementare (la stessa che ha partecipato il mese scorso).

Il problema di questo mese chiedeva di dimostrare una proprietà della bisettrice di un angolo e poi di costruire un triangolo soddisfacente certe condizioni. L'utilizzo della suddetta proprietà facilita la realizzazione della costruzione richiesta.

In nessuna delle risposte sono stati risolti in modo esauriente tutti i quesiti posti dal problema.

A tutti i ragazzi, ed in particolare a quelli che usano Cabri, ricordiamo che:

- una o più verifiche di un teorema o di una congettura, non è una dimostrazione e quindi la prova di “trascinamento” non è sufficiente per confermare e giustificare la bontà di una costruzione realizzata con Cabri;
- le figure ottenute con un “aggiustamento” non sono vere e proprie costruzioni (nella geometria razionale sono bandite le costruzioni “ad occhio”, che oltretutto non resistono alla prova “trascinamento”);
- il testo della risposta non deve essere scritto nel file della figura, ma va inviato o come file Word o meglio (per facilitarne la diffusione) su un semplice messaggio e-mail.

Le scuole che hanno partecipato sono:

Sc.El. “Villaggio Europa” (Dir.Did.II Circolo), Alessandria;

SM "Luca Valenziano", Tortona (AL);
 SM "Cerreta", Bologna;
 SM "G. da Cermenate", Cermenate (CO);
 SM di Roveredo in Piano (PN);
 ITG "Rondani" Parma;
 ITI "Euganeo", Este (PD);
 LS "G. Galilei", Bitonto (BA).

Abbiamo composto una soluzione completa del problema scegliendo le parti migliori fra le risposte provenienti da:
 SM "Valenziano" (prima parte), ITG "Rondani" (seconda parte), SM "Cerreta" (ultima parte).

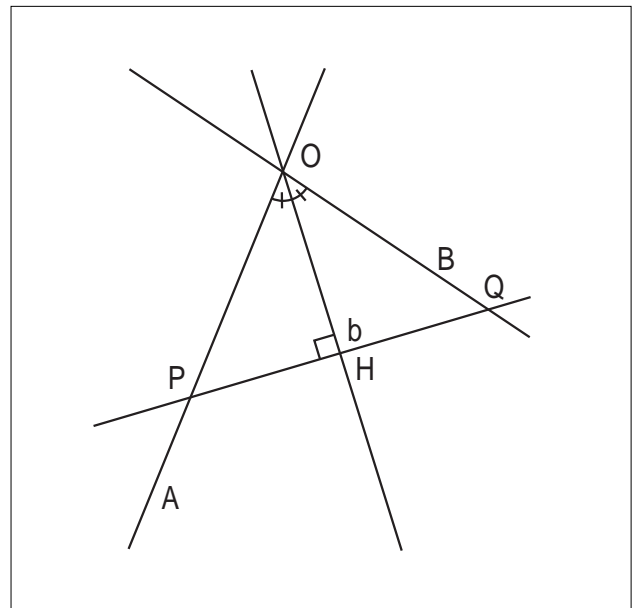
NOTA: Nelle soluzioni riportate le correzioni o i commenti al testo sono fra parentesi quadre.

Soluzioni

De Icco Roberto, Dossola Stefano e Merli Marco
Scuola Media Statale "Luca Valenziano" di Tortona.
 Classe 2°D t.p

(prima parte)

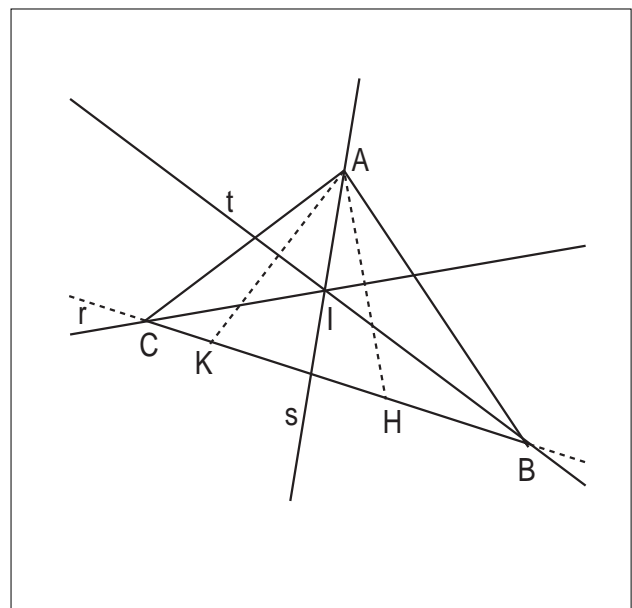
Consideriamo l'angolo AOB e la sua bisettrice b. Prendiamo un punto qualsiasi P su OA e mandiamo la perpendicolare da P alla bisettrice. Indichiamo con H il punto di intersezione della perpendicolare con b e con Q quello della perpendicolare con l'altro lato OB. Dimostriamo che $PH=QH$. Infatti i triangoli OHP e OHQ sono congruenti perché hanno OH in comune, l'angolo $POH=HOQ$ perché metà dell'angolo AOB ed hanno un angolo retto. Quindi P e Q si corrispondono in una simmetria di asse b.



Marco Moia
ITGS "Rondani", Parma
 Classe 2°I

(seconda parte)

Per poter effettuare la costruzione sopra riportata [si fa riferimento ad una figura in cui r, s, t sono le tre rette che concorrono in I, A appartiene alla retta s], ci dobbiamo aiutare con la dimostrazione fatta in precedenza, e quindi, grazie agli strumenti di Cabri 2, determiniamo il simmetrico del punto dato A, usando come asse di simmetria la retta r, e ripetiamo successivamente l'operazione ma usando questa volta, la retta t. Questi due procedimenti ci permetteranno di determinare i punti H e K che a loro volta determinano la retta sulla quale si trova la base del triangolo che dovremo andare a costruire. Determiniamo ora i punti B e C, intersezioni tra la retta appena individuata e le rette t ed r. I punti A, B e C costituiscono ora i vertici del nostro triangolo, ora non ci resta che unire i tre vertici ed otterremo un triangolo che ha come lati i segmenti AB, AC e BC e come bisettrici le tre rette date.



Tuttavia, non esiste sempre una soluzione a questo problema. Infatti, se la retta passante per H e K si trova al di sopra dell'incontro delle tre rette (incentro del triangolo), la costruzione non rispetterà i criteri preposti.

Infatti in un qualsiasi triangolo, l'incentro è sempre interno al triangolo stesso. La posizione della retta passante per H e K, è inoltre determinata dalla misura degli angoli che le due rette (r e t) vengono a formare incontrandosi. Se infatti, questi angoli [quelli che non contengono la retta s] misurano più di 90° [o sono uguali a 90°], la nostra soluzione non potrà esistere.

Possiamo inoltre affermare che date tre rette che si incontrano in un punto, e dato un punto A su una di esse, la soluzione al nostro problema [se esiste] sarà unica.

Laura Campogrande, Elisabetta Cocco, Irene Gualandi, Laura Incorpora, Elena Manenti

Scuola media Cerreta, Bologna

Classe 3[•]

(ultima parte)

[Si fa riferimento al triangolo già costruito in cui si indica con a l'angolo acuto formato dalle bisettrici degli angoli di vertici C e B; con b quello delle bisettrici di A e C e con c quello delle bisettrici di A e B]. Indicando con x metà dell'angolo BAC, y metà dell'angolo ACB e con z metà dell'angolo CBA (per definizione di bisettrice) troviamo il loro valore in funzione degli angoli a, b, c tra le tre bisettrici in I.

Sapendo che la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180° , consideriamo il triangolo AIC: $y=180-x-(a+c)$.

Consideriamo il triangolo BIC:

$$z=180-(b+c)-[180-x-(a+c)]=x+a-b$$

Consideriamo il triangolo BIA:

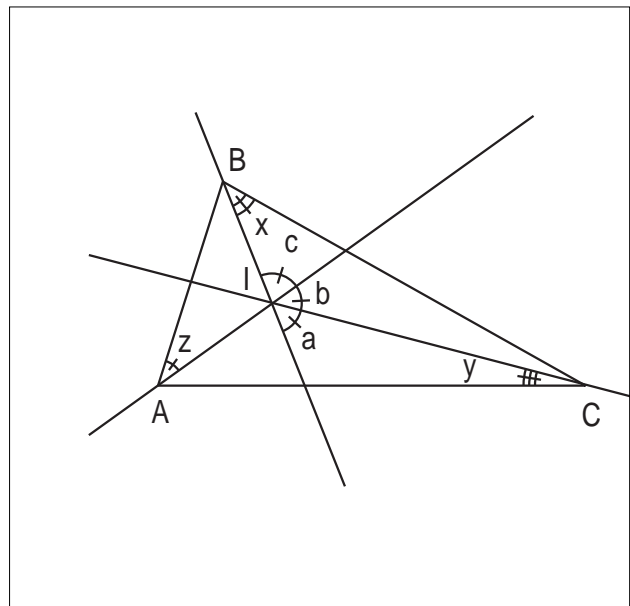
$$x+a-b+x+a+b=180, \text{ cioè } x=90-a.$$

Sostituendo nelle equazioni precedenti, troviamo

$$y=90-c, z=90-b; \text{ con}$$

$$a+b+c=180^\circ.$$

Ne deduciamo che il triangolo si può costruire solo se $a, b, c < 90^\circ$.



7 - 19 Aprile 1999

a) Disegna su un foglio un triangolo equilatero ed esternamente ad esso, con ipotenusa su ciascun lato, un triangolo rettangolo isoscele.

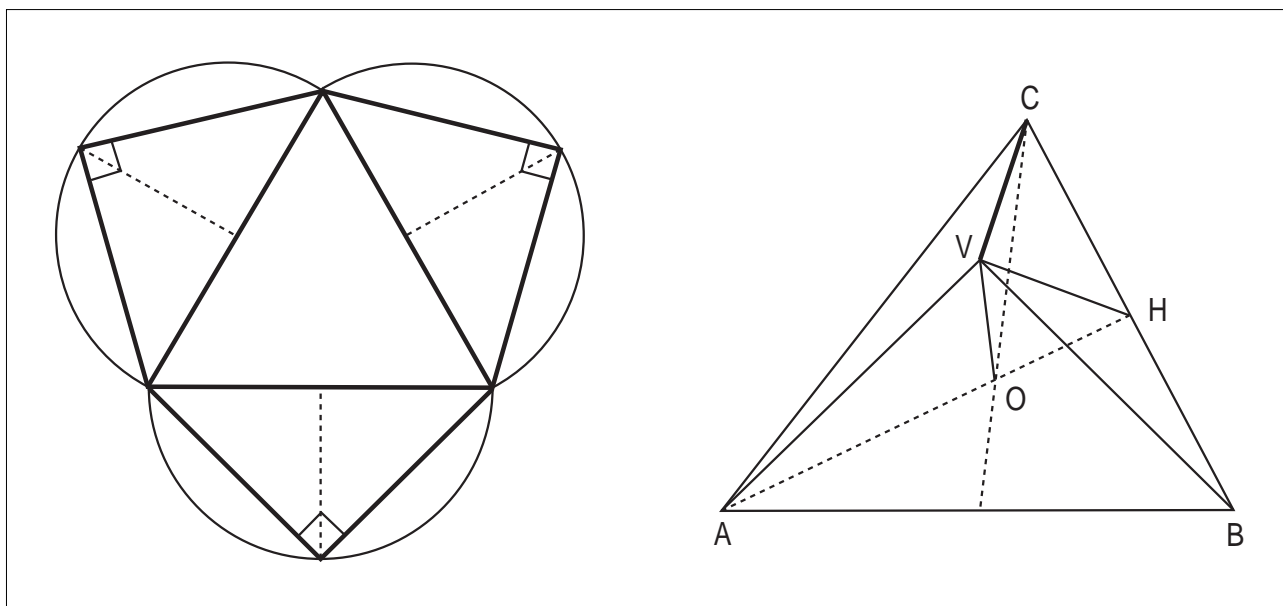
Ritaglia ora lungo il bordo la figura ottenuta e, piegando lungo i lati del triangolo equilatero i tre triangoli isosceles, costruisci una piramide.

Sai indicare qualche proprietà di questa piramide?

b) Considera come base della piramide il triangolo equilatero e calcola in funzione del lato "l" di detta base la lunghezza di ciascuno spigolo laterale e dell'altezza della piramide.

c) Se i tre triangoli isosceles, congruenti tra loro, costruiti sui lati del triangolo equilatero sono acutangoli si ottiene ancora una piramide? E se sono ottusangoli?

Giustificare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto nove risposte provenienti da sette scuole di cui due sono Scuole Medie Inferiori.

Anche questa volta ci sono pervenute, con ritardo, le figure inviate da allievi di una Scuola Elementare.

Il problema di questo mese chiedeva di costruire effettivamente il solido che si otteneva ritagliando una certa figura disegnata a partire da un triangolo equilatero fissato a piacere.

Le condizioni poste portavano in effetti ad una piramide retta regolare rispetto al triangolo equilatero assunto come base.

Il problema poi chiedeva di calcolare alcuni elementi caratteristici della piramide ottenuta e di stabilire cosa accadeva quando si modificava in certi modi la figura da disegnare.

In nessuna delle risposte sono stati risolti in modo esauriente tutti i quesiti posti dal problema.

A tutti i ragazzi ricordiamo che:

- tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate e quando si utilizza un teorema necessario specificare a quali elementi del problema lo si applica;
- occorre fare attenzione a non confondere le relazioni indicate dal testo del problema con quelle che ne derivano (molti hanno iniziato affermando che la piramide era retta e poi hanno dedotto le caratteristiche già assegnate dal problema stesso: procedere così è come scambiare le ipotesi con la tesi di un teorema);
- l'apotema di un poligono non è il raggio della circonferenza circoscritta, ma quello della circonferenza inscritta;

- non possiamo inviare via mail le soluzioni contenenti formule scritte con Equation-editor;
- Flatlandia non è una "Gara di Matematica", anche se un po' di competizione non guasta.

Le scuole che hanno partecipato sono:

- SE "Villaggio Europa" (Dir. Did. II Circolo), Alessandria;
- LG "Orazio", Roma;
- LST "Cesaris", Casalpusterlengo (Lodi);
- SM "Cerreta", Bologna;
- SM "Testoni Fioravanti", Bologna;
- LS "Morandi", Finale E. (Mo);
- ITI "Euganeo", Este (PD);
- LS "G. Galilei", Bitonto (BA).

Abbiamo composto una soluzione completa del problema scegliendo le parti migliori fra le risposte provenienti da:

- SM "Cerreta" e L.C. "Orazio" (prima parte),
- LS "G. Galilei" (seconda parte),
- LT "Cesaris" (ultima parte).

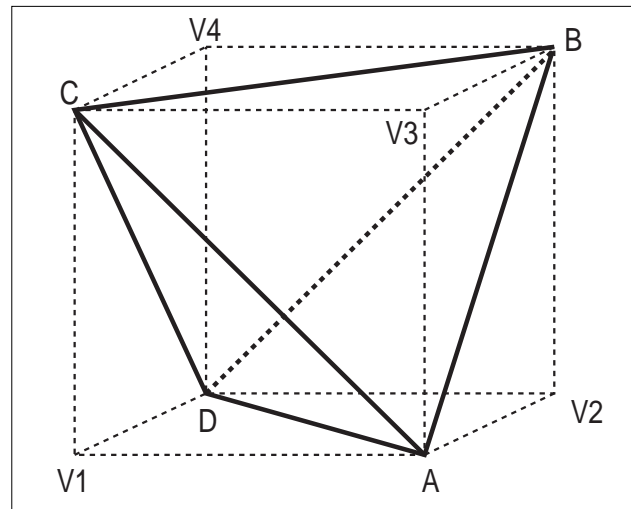
NOTA: Nelle soluzioni riportate le correzioni o i commenti al testo sono fra parentesi quadre.

Soluzioni

*Eugenia Cammarota,
Liceo Classico "Orazio", Roma
classe IV Ginnasio sez.D,*

(prima parte)

Il cubo che ha come spigolo lo spigolo laterale della piramide contiene 4 delle piramidi considerate e un tetraedro che ha come spigolo lo spigolo di base della piramide. Il volume della piramide è un sesto del volume del cubo mentre il volume del tetraedro è un terzo.



$$V.P. = A_b \times h \times \frac{1}{3} \quad A_b = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \quad A_b = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$V.P. = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12\sqrt{2}}$$

$$V.C. = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$V.C. / V.P. = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times 12\sqrt{2} = 6$$

$$V.T. = A_b \times h \times \frac{1}{3} \quad A_b = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{9-3}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$V.T. = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$V.C. / V.T. = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{12}{\sqrt{2}} = 3$$

La superficie laterale della piramide è un quarto della superficie laterale [totale] del cubo.

Laura Campogrande, Elisabetta Cocco, Irene Gualandi, Laura Incorpora, Elena Manenti,
Scuola media "Cerreta"
Classe 3^o

(prima parte)

a) La piramide risulta regolare, in quanto la base è un poligono regolare e il piede dell'altezza coincide col centro della circonferenza inscritta nel poligono di base ([infatti] le facce laterali sono congruenti e pertanto le altezze [anche le loro altezze sono] congruenti).

Vermeulen Bart Mastrodonato Vito, Silvestri Elio Luigi, Infante Remo
Liceo Scientifico "Galileo Galilei" Bitonto (BA)
Classe 2E

(seconda parte)

Come in ogni piramide regolare il triangolo VOP è retto in O, dove VO è l'altezza della piramide, VP l'apotema laterale, OP il raggio di base.

Se l è la misura del lato del triangolo equilatero ABC, lo spigolo laterale della piramide, che sarà CV', misura $l \cdot \sqrt{2}/2$, in quanto lato del quadrato di diagonale l .

L'apotema della piramide PV' misura $l/2$ e l'apotema di base OP, essendo $1/3$ dell'altezza di base CM, misura $l \cdot \sqrt{3}/6$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo VOP si ottiene che l'altezza VO della piramide misura $l \cdot \sqrt{6}/6$.

Marco Zavatarelli, Valentina Garioni;
ITI "Cesaris" Casalpusterlengo (LO)
Classe 1^o Liceo Scientifico Tecnologico

(ultima parte)

c) se i tre triangoli isosceli, costruiti sui lati del triangolo equilatero, sono acutangoli è sempre possibile ottenere una piramide.

Se i tre triangoli isosceli, costruiti sui lati del triangolo equilatero sono ottusangoli non sempre si ottiene una piramide.

La piramide non si forma se l'angolo al vertice dei tre triangoli ha ampiezza maggiore a 120° .

Invece se l'angolo al vertice è 120° i tre triangoli si schiacciano sulla base.

Nel caso dove i triangoli abbiano l'angolo al vertice minore di 120° la costruzione è possibile. Questo perché la somma degli angoli al vertice delle facce laterali deve essere minore di 360° .

La piramide è costruibile quando l'apotema è maggiore di un terzo dell'altezza del triangolo equilatero di base.

Come si può vedere dal disegno nel file Cesaris.fig nel caso di angolo di 120° (piramide di altezza nulla) l'apotema sarebbe $KH = (1/3)AK$.

Se $KH > (1/3)AH$ la piramide è costruibile.

3 - 17 Maggio 1999

a) Disegna un trapezio rettangolo ABCD, retto in A e D, e traccia la circonferenza g che ha come diametro il lato BC.

Dimostra che se P è un punto comune alla circonferenza g ed al lato AD allora P divide AD in due parti che sono i medi di una proporzione avente come estremi le basi del trapezio.

b) Dato un qualunque trapezio rettangolo ABCD, retto in A e D, fornisci ora una costruzione per individuare sul lato AD un punto che lo divida in due parti proporzionali alle basi del trapezio.

Esiste sempre tale punto? E' unico?

Giustifica la costruzione e motiva le risposte.

Chi vuole può cimentarsi anche nel seguente quesito:

c) Se il trapezio non è rettangolo sono ancora valide le proposizioni a) e b)? Perché?

Commento

Abbiamo ricevuto quattro risposte provenienti da quattro scuole di cui una è una scuola elementare. Da quest'ultima scuola avevamo già ricevuto nei mesi scorsi soluzioni per lo più descritte in modo intuitivo.

Abbiamo convenuto di riportare nel sito web di FLATlandia anche la soluzione inviata dagli allievi della suddetta scuola elementare perché, questa volta, suggeriscono interessanti spunti di indagine.

Il problema di Maggio proponeva di operare, sullo stesso tipo di figura, due diverse costruzioni per ottenere due distinte proprietà, chiedendo poi se era possibile in entrambi i casi una generalizzazione.

Questo è stato recepito dai ragazzi della scuola elementare e in una sola delle risposte giunte dalle altre scuole.

Le scuole che hanno partecipato sono:

SE "Villaggio Europa" (Dir. Did. II Circolo), Alessandria;

LS "G. Galilei", Bitonto (BA),

LS "F. d'Assisi", Roma

LS "E. Majorana", Torino

Riportiamo interamente la risposta proveniente dal Liceo Majorana di Torino e solo la prima parte delle altre che riteniamo interessanti per il diverso approccio con cui è stato risolto il quesito

Soluzioni

SE "Villaggio Europa"

(Dir. Did. II Circolo), Alessandria

COSTRUZIONE: "a")

- 1) segmento BC
- 2) retta per B
- 3) retta per C parallela alla retta per B
- 4) punto medio BC
- 5) circonferenza raggio EB
- 6) punto P sulla circonferenza
- 7) perpendicolare per P alle rette parallele
- 8) segmento PB
- 9) trapezio ABCD
- 10) segmento PC
- 11) rotazione 90° triangolo ABP \Rightarrow A1B1P
- 12) traslazione triangolo A1B1P \Rightarrow A2B2C

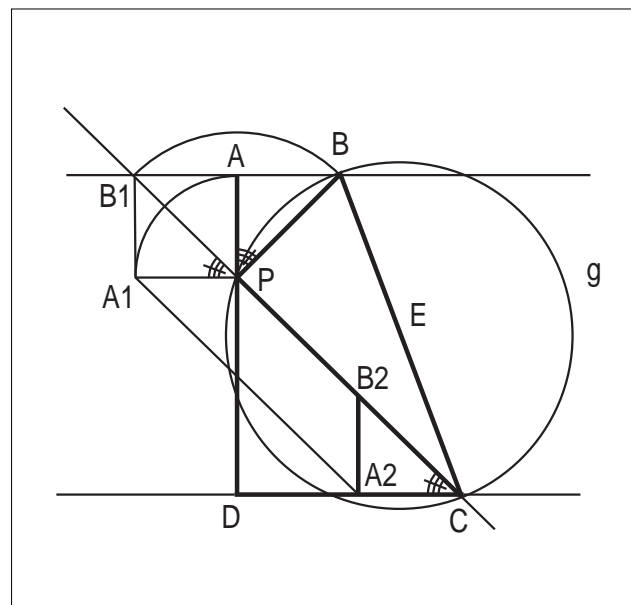
I triangoli PDC e A2B2C sono simili.

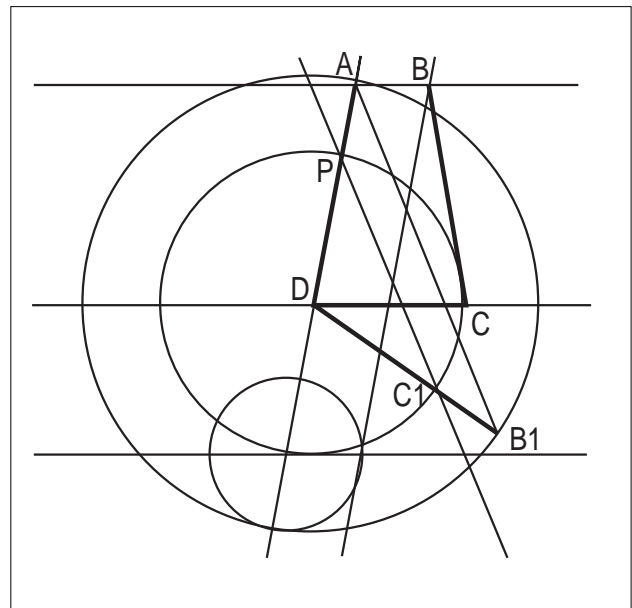
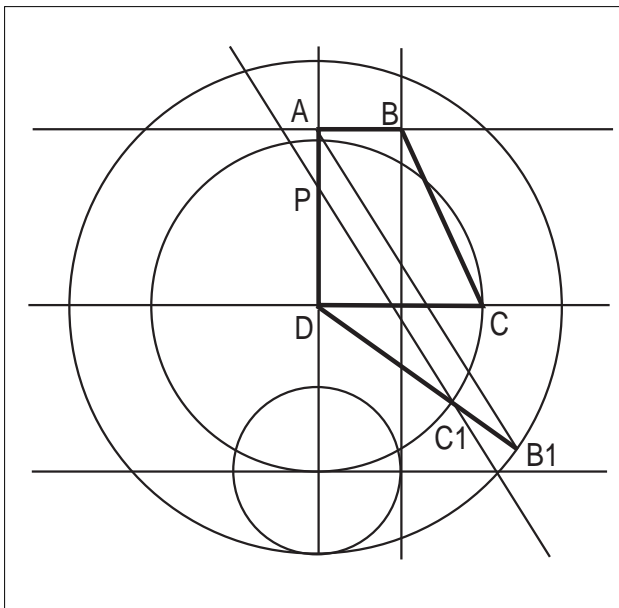
$A2B2=AB$ per costruzione - $A2C=AP$ per costruzione

Quindi:

$B2A2:PD=A2C:DC$, da cui si ottiene

$AB:PD=AP:DC$





COSTRUZIONE: "b")

$DC_1=DC$

$C_1B_1=AB$

Il punto P divide il lato AD in 2 parti proporzionali alle basi del trapezio

Il punto P divide il lato AD in due parti proporzionali ai lati del trapezio. Quindi le proposizioni "a)" e "b)" sono valide anche se il trapezio non è rettangolo.

[Deduzione in parte errata: la costruzione conferma solo la validità della proposizione "b)"]

Daniele Maldera, Diego Piccinelli

Liceo scientifico "E. Majorana" di Torino.

Classe 2E

a) Consideriamo i due triangoli APB e PCD e mostriamo che sono simili:

indichiamo con x l'angolo ABP, l'angolo in A è retto e l'angolo $APB=90^\circ-x$ perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° .

L'angolo BPC è retto perché il triangolo BPC è inscritto nella semicirconferenza di diametro CB, allora

$DPC=180^\circ-APB-BPC=180^\circ-(90^\circ-x)-90^\circ=x$, l'angolo in D è retto e quindi i due triangoli, avendo gli angoli interni congruenti, sono simili.

I lati opposti ad angoli congruenti sono allora proporzionali, in particolare $AB:AP=PD:DC$.

b) Consideriamo la diagonale BD, la parallela a BD passante per C interseca la retta per A e B in un punto E. Tracciamo la retta per E e D e la parallela ad essa passante per B, quest'ultima retta interseca AD in un punto Q che è quello cercato.

Motivazione: $BE=DC$ perché lati opposti di un parallelogramma, applicando il teorema di Talete con AD e AE come trasversali, DE e la sua parallela per B come parallele si ha la proporzione cercata. $[AB:BE=AQ:QD]$

Tale punto esiste sempre, ma non è unico perché anche il suo simmetrico rispetto al punto medio di AD soddisfa la stessa condizione. [Detto Q' tale punto si ha $Q'M=MQ$, M punto medio di AD, per cui $Q'D=QA$ e $Q'A=QD$]

c) Se il trapezio non è rettangolo la proposizione "a)" non è più valida, infatti gli angoli in A e in D del trapezio non sarebbero più uguali (ma supplementari) e quindi i due triangoli non sarebbero più simili.

La costruzione b) sarebbe ancora valida, perché sfrutta solo il teorema di Talete, ma non la perpendicolarità.

Considerazioni

Anche nel secondo anno di attività il bilancio è stato soddisfacente, non tanto per la quantità delle scuole coinvolte, quanto per la loro varietà e dislocazione. Come si può osservare nella mappa allegata all'inizio del fascicolo, le scuole che hanno partecipato sono trenta, distribuite su tutto il territorio nazionale, anche se la maggiore concentrazione è nelle regioni del Centro/Nord.

Si può immediatamente notare, dalla tabella che affianca la mappa, che la partecipazione è stata complessivamente più elevata nella scuola superiore, però desideriamo segnalare la classe quinta della scuola elementare "Villaggio Europa" del 2° circolo di Alessandria per aver partecipato quattro volte inviando le costruzioni richieste dal problema realizzate col software Cabri II.

Per motivare la partecipazione sia dei "piccoli" che dei "grandi" abbiamo alternato problemi semplici ad altri più impegnativi, o differenziato la difficoltà delle domande nello stesso problema.

L'attività di FLATlandia non è una gara, il suo scopo non è quello di premiare i "più bravi", ma di suscitare l'interesse dei ragazzi, offrendo loro un momento di confronto e di ripensamento sulle loro conoscenze nell'ambito della geometria. Quindi, nella stesura delle soluzioni da proporre all'attenzione dei partecipanti, sono state scelte, fra le risposte pervenute, le parti ritenute migliori e quelle che si differenziano, concedendo così spazio ad un maggior numero di solutori.

Ringraziamenti

Le curatrici del presente resoconto sull'attività di Flatlandia desiderano ringraziare:

Anna Maria Arpinati e Valerio Mezzogori, per avere progettato e promosso questa attività;

Consolato Pellegrino per il prezioso apporto delle sue competenze disciplinari nella scelta dei problemi e nella correzione degli elaborati;

Alberto Mingardi per la sua collaborazione nella gestione delle pagine web;

il Consiglio Direttivo dell'IRSAE Emilia Romagna per avere approvato l'attività e messo a disposizione i mezzi dell'Istituto per la sua riuscita;

la Casa Editrice Loescher di Torino, distributrice del software Cabri-géomètre, per supportare l'iniziativa sostenendo le spese della presente pubblicazione.

“...L’intelligenza artificiale, l’informatizzazione, la cibernetica, i sistemi esperti, sono grandi parole; quello che ci sta sotto è che l’uomo faceva certe cose e adesso non le fa più, quindi non gode nel farle. Se l’uomo impara ad usare la macchina con intelligenza, allora essa può aiutarlo a risolvere gran parte dei suoi problemi. Quindi occorre un uomo che pensa. Un uomo che conservi una capacità innovativa e inventiva, un uomo che sa cosa vuole e che comanda la macchina senza lasciarsi sopraffare...”

SILVIO CECCATO (*)

(*) Da “Mondo bit” Maggio ‘87 “Uomini e Macchine”.

FLATlandia, geometria on-line

L'IRRSAE dell'Emilia Romagna si è trovata già in linea con le direttive presenti nella circolare n.196 (Prot. N.1234) del 24 Aprile '98 avente come oggetto:

“Programma di sviluppo delle tecnologie didattiche. Indicazioni operative e finanziamenti per il 1998”.

In tali direttive il MPI parla di attivare “...servizi ed iniziative specificatamente rivolte al mondo della scuola”.

L'IRRSAE, valendosi dell'apporto di operatori interni e di collaboratori esterni all'Istituto, ha proposto questo servizio in rete, rivolto a docenti ed alunni che si interessano di matematica.

Il servizio, promosso nell'anno scolastico '97/'98, ha visto l'adesione di Istituzioni Scolastiche di vario tipo.

Nel presente volumetto il resoconto del secondo anno di attività.



I.R.R.S.A.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 5 settembre - ottobre 1999, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento Educativi dell'Emilia Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Giancarlo Cerini, proprietà IRRSAE - Emilia-Romagna.