

Flatlandia – Problema di ottobre 2023 - Commento alle soluzioni ricevute

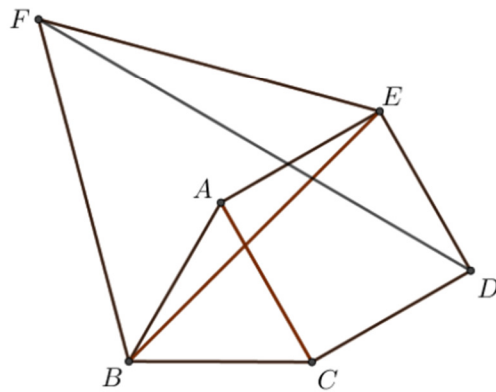
Il testo del problema

Flatlandia - Problema 2 - 23 ottobre 2023

Sia ABC un triangolo equilatero ed esternamente a esso si costruisca il quadrato $ACDE$ di lato AC . Si costruisca poi anche il triangolo equilatero di lato BE , dalla parte opposta al punto C (vedi figura).

Determinare l'ampiezza dell'angolo \widehat{CDF} .

Motivare la risposta.



Commento

Il problema poneva un quesito relativo alla figura ottenuta a partire da un triangolo equilatero in cui si doveva costruire un quadrato su uno dei lati e successivamente un altro triangolo equilatero su un particolare segmento. Si chiedeva di determinare l'ampiezza di un angolo.

Sono arrivate nove risposte, cinque delle quali dalla stessa scuola.

Le risposte arrivate sono tutte corrette e utilizzano in gran parte proprietà elementari di geometria euclidea, anche se una delle soluzioni fa uso della geometria analitica.

C'è ancora da rilevare che una attenta rilettura dell'elaborato avrebbe evitato molti errori di scrittura (soprattutto scambi di lettere per indicare i punti).

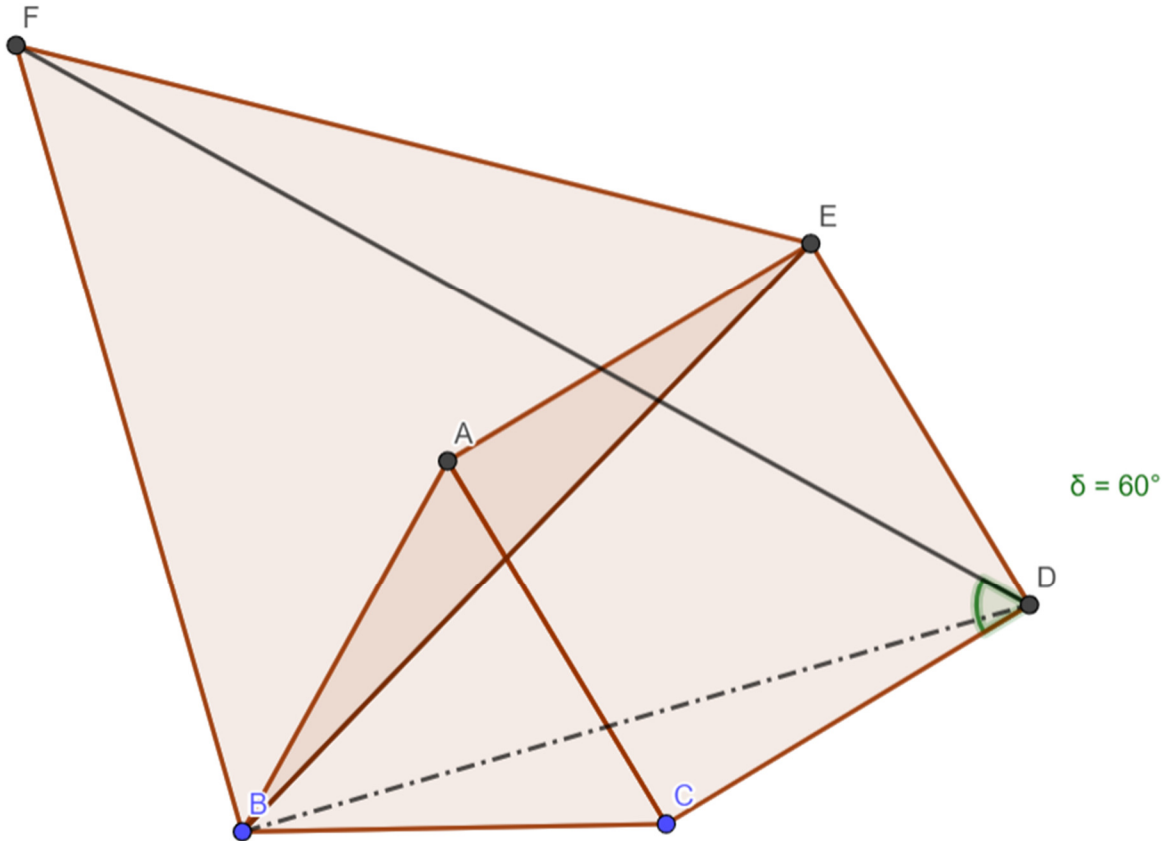
Abbiamo ricevuto risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):

- ITST-Marconi, Campobasso
- Liceo Statale "Giuseppe Berto", Mogliano Veneto (TV)
- Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA) – 5 soluzioni
- Liceo Classico-Scientifico Euclide, Cagliari
- Liceo Scientifico Enrico Fermi, Bologna (BO)

Nota. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata dalla classe-4ABA-ITST-MARCONI-CAMPOBASSO (tramite l'insegnante)



DATI
 ABC equilatero
 BEF equilatero
 ACDE quadrato

INCOGNITA
 \widehat{CDF}

Soluzione:

Il triangolo ABE è isoscele sulla base BE essendo $AB=AE$

segue
 e

$$\widehat{BAE} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

$$\widehat{BEA} = \widehat{ABE} = 30^\circ/2 = 15^\circ$$

Anche il triangolo BCD è isoscele sulla base BD essendo $BC=CD$, dunque $\widehat{CDB} = 15^\circ$

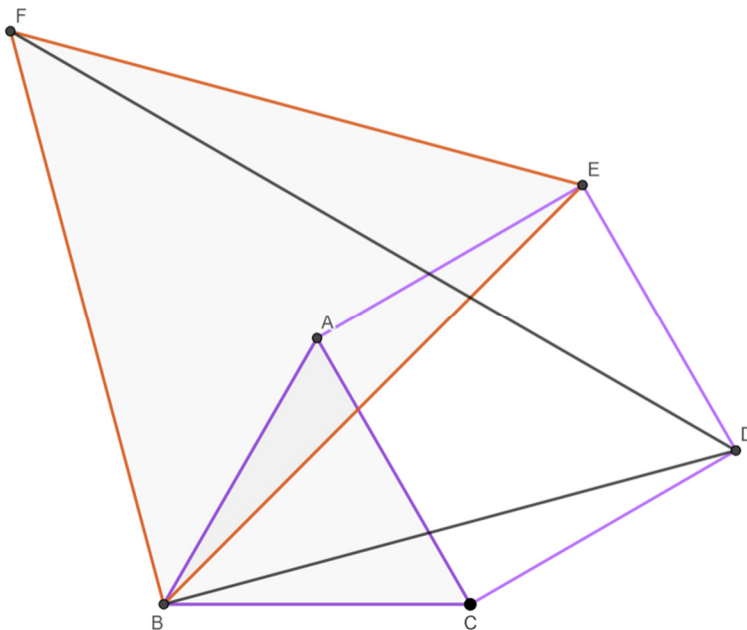
Il triangolo BDF è isoscele sulla base DF e rettangolo in B perché:

- ❖ $BD=BE=BF$
- ❖ $\widehat{DBF} = \widehat{DBE} + \widehat{EBF} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

Dunque, per differenza di angoli e per le proprietà dei triangoli equilateri [e] isosceli si ha

$$\widehat{CDF} = \widehat{CDB} + \widehat{BDF} = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$$

2) Soluzione inviata da Rachele-Pali, classe 2^A - Liceo Statale "Giuseppe Berto"-Mogliano Veneto (TV)



1. ABC è un triangolo equilatero
2. ACDE è un quadrato
3. BEF è un triangolo equilatero

Domanda:

$$\widehat{CDF} = ?$$

Dimostrazione:

$AB \cong BC \cong AC$ per ipotesi 1

$AC \cong CD \cong DE \cong EA$ per ipotesi 2

$AB \cong BC \cong AC \cong CD \cong DE \cong EA$ per proprietà transitiva

→ in particolare: $BC \cong CD$ ⁽¹⁾

Si costruisce il segmento BD

BCD è isoscele perché $BC \cong CD$ per quanto dimostrato prima ⁽¹⁾

→ $\widehat{DBC} \cong \widehat{BDC}$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele

$\widehat{BCD} \cong \widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 60^\circ + 90^\circ$ perché rispettivamente un angolo di un triangolo **[[isoscele]]** **[[equilatero]]** (ipotesi 1) e un angolo di un quadrato (ipotesi 2)

$\widehat{BAE} \cong \widehat{BCD}$ perché somme di angoli congruenti $\widehat{BCA} \cong \widehat{BAC}$ (per ipotesi 1) e **[[ACD ≅ CAE]]** (per

ipotesi 2) ⁽²⁾

$$\widehat{BCD} = 150^\circ$$

$$\widehat{BDC} = \frac{180^\circ - \widehat{BCD}}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

[[per la proprietà degli angoli interni di un triangolo]]

Considero i triangoli BCD e BAE:

- $AB \cong BC$ per ipotesi 1
- $AE \cong CD$ per ipotesi 2
- $\widehat{BCD} \cong \widehat{BAE}$ per quanto dimostrato prima ⁽²⁾

→ $\widehat{BCD} \cong \widehat{BAE}$ per 1° criterio di congruenza dei triangoli

In particolare $BD \cong BE$ (3)

DBE è isoscele per quanto appena dimostrato

→ $\widehat{BDE} \cong \widehat{BED} \cong \widehat{CDE} - \widehat{BDC} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ (\widehat{BDE} e \widehat{BED} sono congruenti perché

angoli alla base di un triangolo isoscele)

$$\widehat{DBE} = 180^\circ - 2\widehat{BDE} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$$

[per la proprietà degli angoli interni di un triangolo]

$BE \cong BF$ per ipotesi 3 (4)

$BF \cong BD$ per proprietà transitiva (3) + (4)

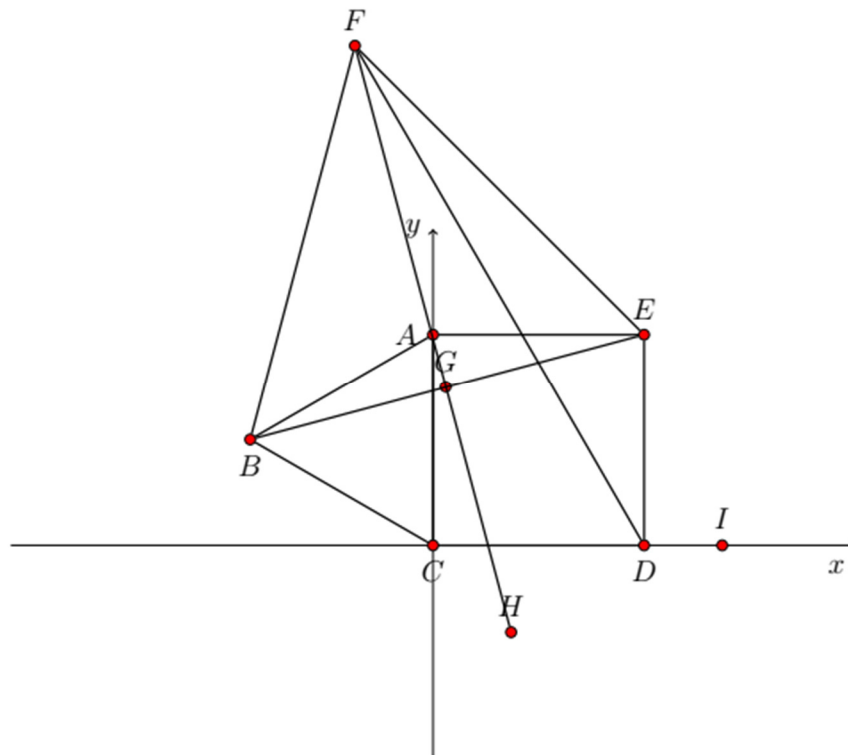
→ DBF è isoscele

$$\widehat{BDF} = \frac{180^\circ - \widehat{DBF}}{2} = \frac{180^\circ - (\widehat{EBF} + \widehat{DBE})}{2} = \frac{180^\circ - (60^\circ + 30^\circ)}{2} = 45^\circ \quad (\widehat{EBF} = 60^\circ \text{ per ipotesi 3})$$

In conclusione: $\widehat{CDF} \cong \widehat{BDF} + \widehat{BDC} = 45^\circ + 15^\circ = \mathbf{60^\circ}$.

[Nota: si usa un simbolo strano per gli angoli invece di usare l'Equation Editor.]

3) Soluzione svolta da: Filomena Dell'Orto, Mariachiara Parisi e Francesca Luordo, Classe 3A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



Hp: \widehat{ABC} e \widehat{BEF} sono triangoli equilateri e $CDEA$ è un quadrato
 Th: $\widehat{CDF} = 60^\circ$

Dimostrazione:

Per comodità prendiamo il lato del quadrato ACDE pari $\overline{AE}=1$

$$B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right); C = (0,0); D = (1,0); E = (1,1); A = (0,1).$$

Il triangolo \widehat{BAE} è isoscele perché $AE \cong AB$ per costruzione ed essendo $\widehat{A} = 150^\circ$, allora $[\widehat{AEB} = 15^\circ.]$ $[[\widehat{E} = 15^\circ.]]$ Osserviamo che l'asse del segmento BE passa per A e per il vertice F (l'asse "contiene" la mediana, la bisettrice e l'altezza del triangolo equilatero)

$$m_{BE} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3},$$

L'asse del segmento BE passa per $A = (0,1)$ e ha coefficiente angolare antireciproco di $m_{BE} = 2 - \sqrt{3}$. ovvero $\bar{m} = -\frac{1}{2-\sqrt{3}} = -(2 + \sqrt{3})$ in forma compatta $\bar{m} = -(2 + \sqrt{3})$.

L'angolo $[\widehat{FEA} = 45$ e quindi $m_{EF} = -1]$

$$EF: y - 1 = -1(x - 1) ; \text{ [[...]] } y = -x + 2$$

$$[FG] \text{ [[BE]]}: y - 1 = -(2 + \sqrt{3})x; \quad y = -(2 + \sqrt{3})x + 1$$

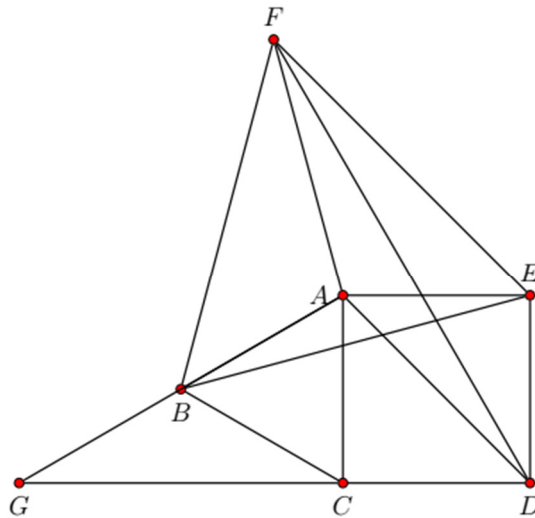
Per trovare le coordinate del punto $F = (x,y)$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -(2 + \sqrt{3})x + 1 \end{cases} &= \begin{cases} y = -x + 2 \\ -x + 2 = -(2 + \sqrt{3})x + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x + 2 \\ -x + 2x + \sqrt{3}x = -1 \end{cases} &= \begin{cases} y = -x + 2 \\ x = \frac{-1}{1 + \sqrt{3}} \end{cases} \\ = \begin{cases} y = -x + 2 \\ x = +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} &= \begin{cases} y = -(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2 \\ x = +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} = \begin{cases} y = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ x = +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ F &\equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{FD} &= \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3} + 1}{2}} = -\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = -\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= -\frac{3\sqrt{3} - 3 + 3 - \sqrt{3}}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

[quindi] [[che]] l'angolo $\widehat{IDF} = \hat{\alpha}$ è tale che $\tan(\alpha) = -\sqrt{3}$, allora $\alpha = 120^\circ$, deduciamo che l'angolo ad esso adiacente $\widehat{CDF} = 60^\circ$.

4) Soluzione svolta da: Concetta Fornataro, 2A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



Ipotesi: ACDE quadrato, $\triangle ABC$ e $\triangle BEF$ triangoli equilateri.

Ipotesi: ACDE quadrato, $\triangle ABC$ e $\triangle BEF$ triangoli equilateri.

Tesi: $\widehat{CDF} = 60^\circ$

Dimostrazione

Consideriamo il triangolo $\triangle ABE$, questo è isoscele perché $AB = AC \wedge AC = AE \Rightarrow AB = AE$. L'angolo $\widehat{EAB} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, l'angolo $\widehat{AEB} = \widehat{ABE} = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$. Consideriamo i triangoli $\triangle BAF$ e $\triangle EAF$, essi sono congruenti per il 3° criterio di congruenza dei triangoli, infatti:

- $BF \cong FE$
- FA in comune
- $BA \cong AE$

Nel triangolo $\triangle EAF$ l'angolo $\widehat{AFE} = 30^\circ$, l'angolo $\widehat{FEA} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$, quindi l'angolo $\widehat{FAE} = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$.

Ora soffermiamoci sul triangolo \widehat{CBG} ottenuto prolungando i lati AB e CD. L'angolo $\widehat{BCG}=30^\circ$ e l'angolo $\widehat{CBG}=120^\circ$, allora l'angolo $\widehat{BGC}=30^\circ$ e quindi $BG \cong BC$

Consideriamo \widehat{AGD} , l'angolo in G (già noto) è di 30° , l'angolo in D (anch'esso noto) è di 45° e l'angolo in A= $60^\circ+45^\circ=105^\circ$.

I triangoli \widehat{GAD} e \widehat{EAF} sono simili perché hanno gli stessi angoli.

$$AE:AD=AF:AG$$

Da $AB=BC=AE=BG$ sappiamo che $AG=2AE$

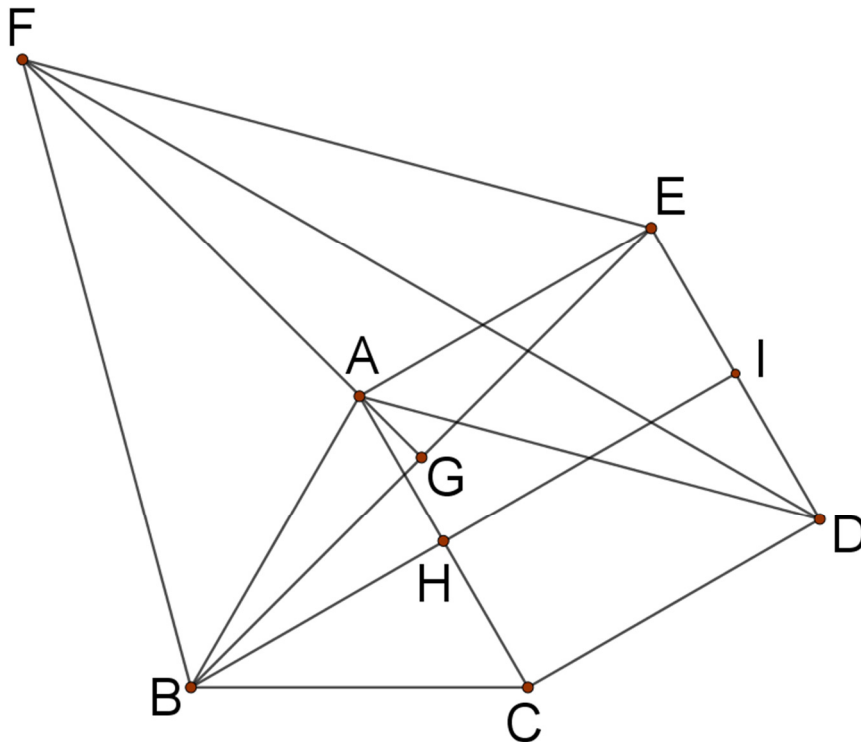
$$1:\sqrt{2}=AF:2$$

Deve essere $AF=\sqrt{2}$ e anche $AD=\sqrt{2}$

Allora il triangolo \widehat{DAF} , è isoscele e quindi, [poiché] l'angolo in A è di $105^\circ+45^\circ=150^\circ$, l'angolo in D è di $(180^\circ-150^\circ):2 = 15^\circ$.

Allora considerato l'angolo $\widehat{CDF}=45^\circ+15^\circ=60^\circ$

5) Soluzione svolta da: Giovanni Forlenza, 2A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



[Si doveva spiegare chi sono H, I, G]

Considerando il lato del quadrato $L=1$

$$\overline{HI} = 1$$

$$\overline{BI} = \overline{HI} + \overline{BH} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{BE} = \sqrt{\overline{EI}^2 + \overline{BI}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\overline{FG} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{BE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{GE}^2} = \sqrt{1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\overline{FA} = \overline{FG} - \overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Ricordando le formule dei radicali doppi: $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\overline{FA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{FA} = \overline{AD} = \sqrt{2}$$

[In un triangolo, due lati sono uguali se e solo se gli angoli opposti sono uguali], **questo implica**

che $\widehat{AFD} = \widehat{ADF}$

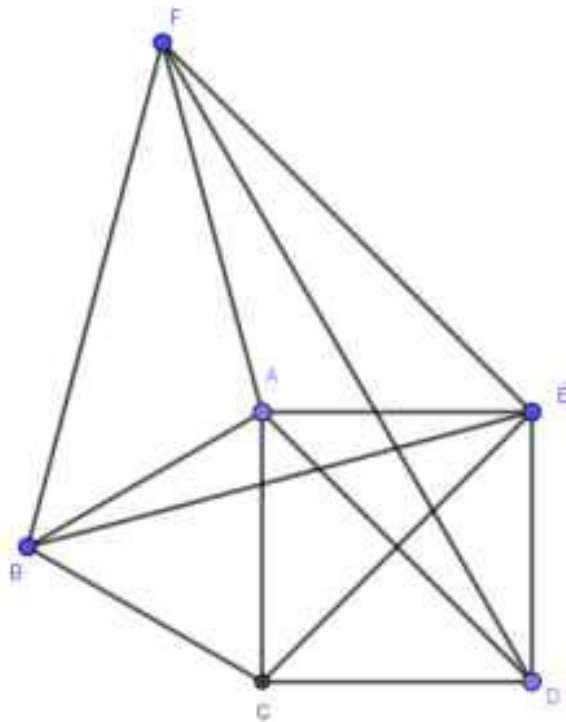
$\widehat{FAD} = 150^\circ$ [perché ?]

$\widehat{AFD} = \widehat{ADF} = 15^\circ$

$\widehat{CDA} = 45^\circ$ [[(angolo complementare)]] [AD diagonale di un quadrato]

$\widehat{CDF} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$

6) Soluzione proposta da Marianna Manna 3B Liceo Scienze Applicate ASSTEAS_Buccino (SA)



IPOTESI:

ACDE quadrato
 ABC equilatero di lato AC
 BEF equilatero

Tesi:
 $\widehat{FDC} = 60^\circ$

Dimostrazione:

ABE isoscele poiché $\overline{AB} \cong \overline{AE}$, allora $\widehat{ABE} \cong \widehat{AEB}$

$$\hat{A} = 90 + 60 = 150^\circ$$

$$\widehat{ABE} \cong \widehat{AEB} = \frac{180 - 150}{2} = 15^\circ$$

Congiungiamo A con F

Congiungiamo E con C

Consideriamo i triangoli BEC e AFE

$BEC \cong AFE$ poiché:

$\overline{BC} \cong \overline{AE}$ per costruzione

$\overline{BE} \cong \overline{FE}$ per costruzione

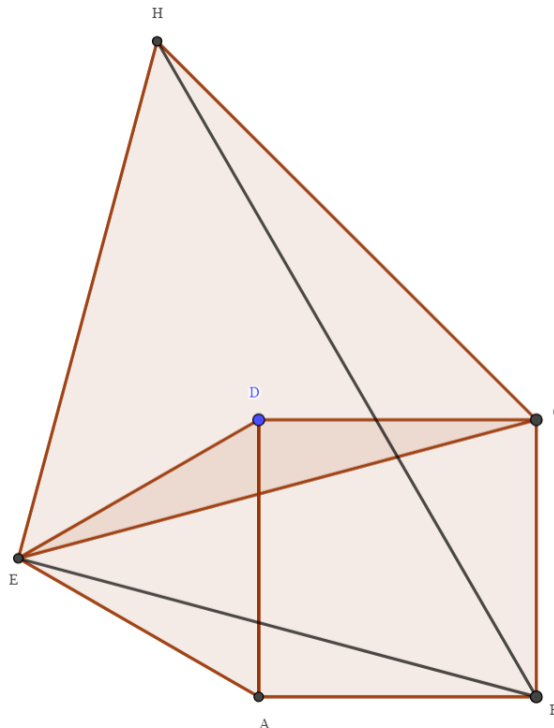
$\widehat{EBC} \cong \widehat{FEA} = 45^\circ$ [perché ?]

\Rightarrow Per il primo criterio di congruenza dei triangoli, essi sono congruenti ed in particolare avranno $\overline{CE} \cong \overline{FA}$.

Possiamo dire che ADF è isoscele perché da $\overline{AD} \cong \overline{CE}$ poiché diagonali del quadrato, da $\overline{CE} \cong \overline{FA}$ segue che $\overline{AF} \cong \overline{AD} \Rightarrow$ Gli angoli alla base sono congruenti. Ora $\widehat{FAD} = 45 + 105 = 150^\circ$, $\widehat{AFD} \cong \widehat{ADF} = \frac{180-150}{2} = 15^\circ$. Quindi possiamo affermare che $\widehat{FDC} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$

c.v.d.

7) Soluzione proposta da Myriam Lullo 2A Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)



[Si potevano usare le lettere del testo !!]

DATI

ABCD è un quadrato

ADE è un triangolo equilatero

CEH è un triangolo equilatero

[[HBE]]=? [HBA]

PROCEDIMENTO

Noi sappiamo che ADE è un triangolo equilatero quindi i suoi angoli saranno tutti e tre di 60°

ciascuno. ABCD è un quadrato, quindi i suoi angoli sono di 90° . Il triangolo \widehat{EDC} ha l'angolo $\widehat{EDC} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ ed è isoscele perché i lati

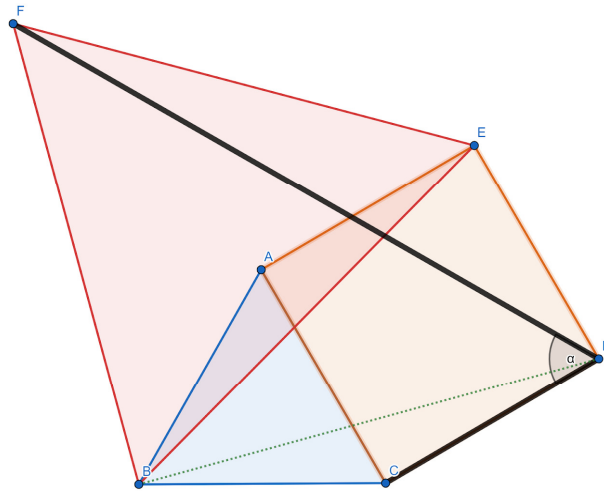
$DC \cong DE$, quindi $\widehat{CED} = \widehat{DCE} = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$ Ora congiungiamo E con B

e dimostriamo che $\widehat{EDC} \cong \widehat{EAB}$; i lati adiacenti all'angolo in \widehat{B} [D] sono rispettivamente congruenti ai lati adiacenti all'angolo in \widehat{A} , gli angoli stessi sono congruenti e quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza, segue che $EB \cong EC$

L'angolo $\widehat{CEB} = 30^\circ$, dunque l'angolo $\widehat{HEB} = 90^\circ$.

Da $EB \cong EC$ segue per transitività che $EB \cong EH$ e di conseguenza il triangolo \widehat{HEB} è rettangolo isoscele. L'angolo $\widehat{EBA} = 15^\circ$ e l'angolo $\widehat{HBE} = 45^\circ$, quindi $\widehat{HBA} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$. **QUINDI $\widehat{HBA} = 60^\circ$**

8) Soluzione proposta da Lorenzo Onnis – Sebastiano Murgia – Luca Sanna – 3 Bs Liceo Euclide Cagliari



Ipotesi

ABC è equilatero
ACDE è un quadrato
BEF è equilatero

Incognita

$\widehat{FDC}=?$

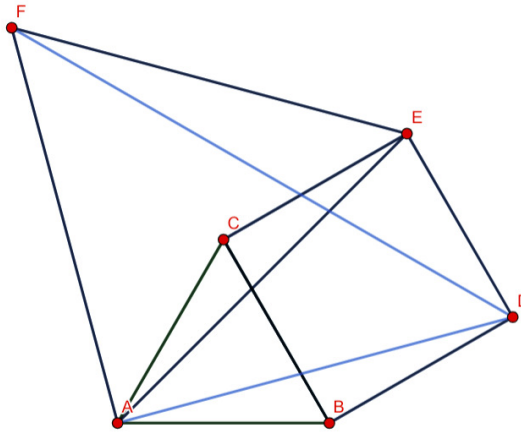
Soluzione

Possiamo notare che il triangolo BCD è isoscele sulla base BD, poiché BC è congruente a AC in quanto lati di un poligono regolare e per il medesimo motivo anche CD è congruente a AC, e che il segmento BD è congruente a BE [perché ?] e quindi al lato del triangolo BEF.

Notiamo perciò che il triangolo BDF è isoscele, e l'angolo in B ha ampiezza pari a 90° dato che è uguale alla somma degli angoli \widehat{ABC} e \widehat{FBE} entrambi di 60° , perché angoli di triangoli equilateri, meno la somma degli angoli \widehat{ABE} e \widehat{CBD} , entrambi di 15° ; pertanto l'angolo \widehat{BDF} sarà di 45° .

Gli angoli \widehat{BDC} e \widehat{CBD} hanno ampiezza 15° perché nel triangolo isoscele BCD l'angolo in C è un angolo di 150° ottenuto sommando l'angolo di 60° del triangolo equilatero ABC a quello di 90° del quadrato [andavo detto prima]; sommando gli angoli \widehat{BDF} e \widehat{BDC} , otteniamo l'angolo \widehat{FDC} di 60° .

9) Soluzione proposta da Eleonora Quattrini 2F, Liceo Scientifico Enrico Fermi, Bologna (BO)



[Le lettere indicate in figura non rispettano quelle del testo del problema. Fortunatamente poi nella risoluzione si usano quelle del testo del problema. Attenzione !!]

Ipotesi:

- ABC triangolo equilatero
 - $AB \cong BC \cong CA$
 - angoli $ABC \cong BCA \cong CAB \cong 60^\circ$

- ACDE quadrato
 - $AC \cong CD \cong DE \cong EA$
 - $AC \perp AE$
 - $ED \perp CD$

- BEF triangolo equilatero
 - $BE \cong EF \cong FB$
 - angoli $BEF \cong EFB \cong FBE \cong 60^\circ$

Tesi:

- angolo CDF?

Dimostrazione:

$AC \cong AB \cong BC$ per ipotesi
 $AC \cong CD \cong DE \cong AE$ per ipotesi

$AB \cong AE$ per proprietà transitiva
angoli $ABE \cong AEB$ per il teorema del triangolo isoscele

$BC \cong CD$ per proprietà transitiva
angoli $CBD \cong BDC$ per il teorema del triangolo isoscele

$$\text{angoli } \angle BAE \cong \angle BAC + \angle CAE \cong 60^\circ + 90^\circ \cong 150^\circ$$

$$\text{angoli } \angle BCD \cong \angle BCA + \angle ACD \cong 60^\circ + 90^\circ \cong 150^\circ$$

↓

$$\text{angoli } \angle BAE \cong \angle BCD$$

$$\text{angoli } \angle ABE \cong (\pi - \angle BAE) / 2$$

$$\text{angoli } \angle CBD \cong (\pi - \angle BCD) / 2$$

$$\text{angoli } \angle ABE \cong \angle CBD \cong (180^\circ - 150^\circ) / 2 \cong 15^\circ$$

Considero i triangoli

$$\triangle ABE \quad \text{e} \quad \triangle BCD$$

$$\text{angoli } \angle BAE \cong \angle BCD \quad \text{per dimostrazione precedente}$$

$$BA \cong BC \quad \text{per ipotesi}$$

$$AE \cong CD \quad \text{per ipotesi}$$

↓

triangoli $\triangle ABE \cong \triangle BCD$ per I c.d.c. dei triangoli **[primo criterio]**

↓

$$BE \cong BD$$

$$BE \cong BF \quad \text{per ipotesi}$$

$$BF \cong BD \quad \text{per proprietà transitiva}$$

$$\text{angoli } \angle BFD \cong \angle BDF \quad \text{per il teorema triangolo isoscele}$$

$$\text{angoli } \angle FBA \cong \angle FBE - \angle ABE \cong 60^\circ - 15^\circ \cong 45^\circ$$

$$\text{angoli } \angle FBD \cong \angle ABC + \angle FBA - \angle CBD \cong 60^\circ + 45^\circ - 15^\circ \cong 90^\circ$$

$$\text{angoli } \angle BDF \cong (\pi - \angle FBD) / 2 \cong (180^\circ - 90^\circ) / 2 \cong 45^\circ$$

$$\text{angoli } \angle CDF \cong \angle CDB + \angle BDF \cong 15^\circ + 45^\circ \cong 60^\circ \quad \text{c.v.d.}$$