

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria.

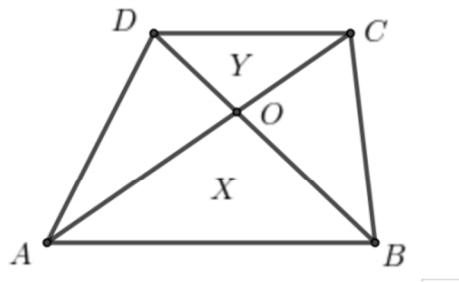
Flatlandia – Problema di novembre 2023 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 6 - 27 novembre 2023

In un trapezio $ABCD$, le diagonali AC e BD si incontrano nel punto O (vedi figura). Sia X l'area del triangolo ABO e Y l'area del triangolo CDO . Dimostrare che:

a) i triangoli AOD e BCO sono equivalenti e che la loro area è la media geometrica tra X e Y .



b) l'area del trapezio è data da $\mathcal{A} = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2$.

Motivare le risposte.

Commento

Il problema poneva due quesiti, tra loro dipendenti, riguardanti i quattro triangoli che si formano tracciando le diagonali di un trapezio qualsiasi.

Le risposte arrivate sono tutte corrette, senza particolari errori o imprecisioni. La scelta di una risoluzione analitica ci sembra però non ottimale.

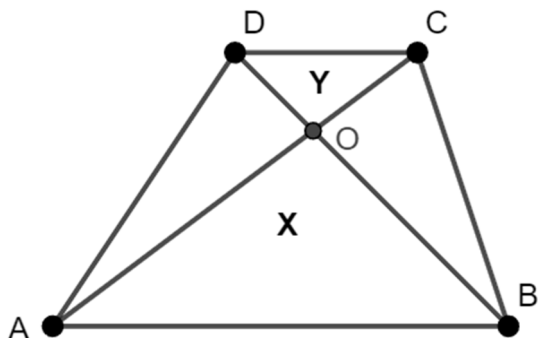
Sono arrivate quattro risposte. Abbiamo ricevuto risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):

- Liceo Cecioni, Livorno
- Liceo Scientifico Calini, Brescia
- ITST-Marconi, Campobasso
- Liceo Scientifico "Assteas", Buccino (SA).

Nota. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata dalla classe 2ALS-Liceo Cecioni-Livorno (tramite l'insegnante)



Dimostrazioni:

- a) I due triangoli **[AOD]** **[AOB]** e BCO sono equivalenti perché l'area del triangolo ABD è uguale all'area del triangolo ABC (stessa base AB e stessa altezza) quindi vale la seguente uguaglianza tra le aree:

$A(\text{AOD}) = A(\text{ABD}) - X = A(\text{ABC}) - X = A(\text{BCO})$ e si ha la tesi cioè i due triangoli AOD e BCO sono equivalenti.

I due triangoli AOB e COD sono simili, sia k il rapporto di similitudine quindi $\frac{AB}{CD} = k$ e

il rapporto tra le aree è $\frac{X}{Y} = k^2$. Anche il rapporto tra le aree dei due triangoli ABD e

CDB è uguale a $\frac{AB}{CD} = k$ poiché (indicando con h l'altezza del trapezio) si ha $\frac{AB \cdot h}{2} : \frac{CD \cdot h}{2} = \frac{AB \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{CD \cdot h} = \frac{AB}{CD} = k$

Indico con Z l'area di AOD che è uguale all'area di BCO e scrivo il rapporto tra le aree

dei due triangoli ABD e CDB $\frac{X+Z}{Y+Z} = k$ e da $\frac{X}{Y} = k^2$ si ricava $k = \sqrt{\frac{X}{Y}}$ quindi sostituendo

si ha

$$\frac{X+Z}{Y+Z} = \sqrt{\frac{X}{Y}} \text{ elevo i due membri al quadrato } \frac{(X+Z)^2}{(Y+Z)^2} = \frac{X}{Y}$$

$$(X^2 + 2ZX + Z^2) \cdot Y = X \cdot (Y^2 + 2YZ + Z^2)$$

$$X^2Y + 2ZXY + Z^2Y = XY^2 + 2XYZ + XZ^2$$

$$Z^2 \cdot (Y - X) = XY \cdot (Y - X)$$

Quindi dividendo i due membri per $Y - X$ si ha **[Y diverso da X]**

$$Z^2 = XY$$

Per cui $Z = \sqrt{XY}$ cioè l'area dei due triangoli è la media geometrica tra X e Y .

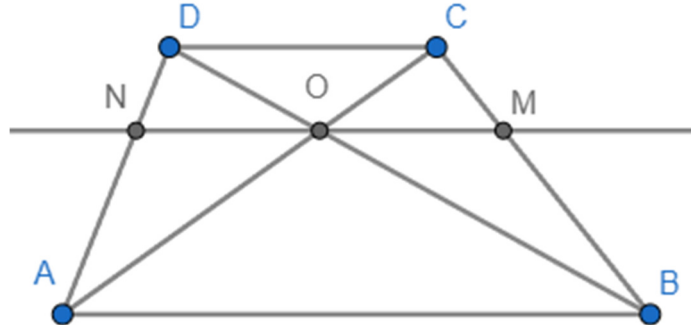
- b) L'area del trapezio è uguale alla somma $X + Y + 2Z = X + Y + 2\sqrt{XY} =$

$$(\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2$$

2) Soluzione proposta da Davide Averoldi, classe 5^N Liceo Scientifico Calini Brescia

a) Dimostro innanzitutto che i due triangoli AOD e BCO sono equivalenti.

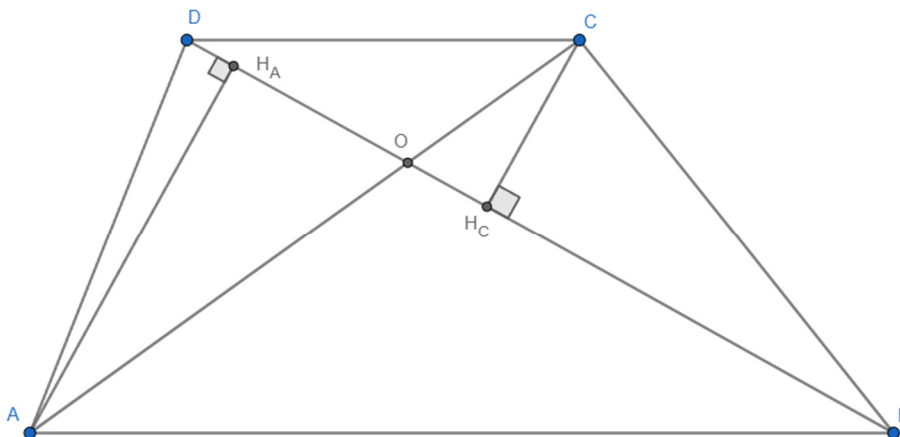
Traccio la retta parallela ad AB e CD passante per O, chiamo N l'intersezione con AD e M quella con BC.



Da questa costruzione risultano le similitudini: $DNO \approx DAB$ e $CMO \approx CBA$, che in particolare hanno lo stesso fattore di scala k in quanto $DN : DA = CM : CB$ per Talete. Di conseguenza $NO : AB = OM : AB$ quindi $NO = OM$.

(Da qui in poi, per rapidità, una dicitura del tipo ABC significa “l'area del triangolo ABC”)

Poiché D e C hanno la stessa distanza dalla retta NM e $NO = OM$, allora $DON = COM$. Lo stesso si può dire per la coppia di triangoli AON e BOM. Sommando le due uguaglianze si ottiene $DON + AON = COM + BOM$, quindi $AOD = BCO$.



Dimostro ora che $AOD \times BCO = ABO \times CDO$, (Queste ultime due sono X e Y)

Traccio le altezze da A, C relative alla retta DB. Il prodotto $AOD \times BCO$ può essere espresso come $(OD \times AH_a / 2) \times (OB \times CH_c / 2)$ mentre il prodotto $ABO \times CDO$ può essere espresso come $(OB \times AH_a / 2) \times (OD \times CH_c / 2)$. Svolgendo i calcoli si ottiene che le due espressioni sono

equivalenti, quindi $AOD \times BCO = ABO \times CDO$.

Concludo il punto dimostrando che le due aree AOD, BCO sono ciascuna la media geometrica delle aree X,Y.

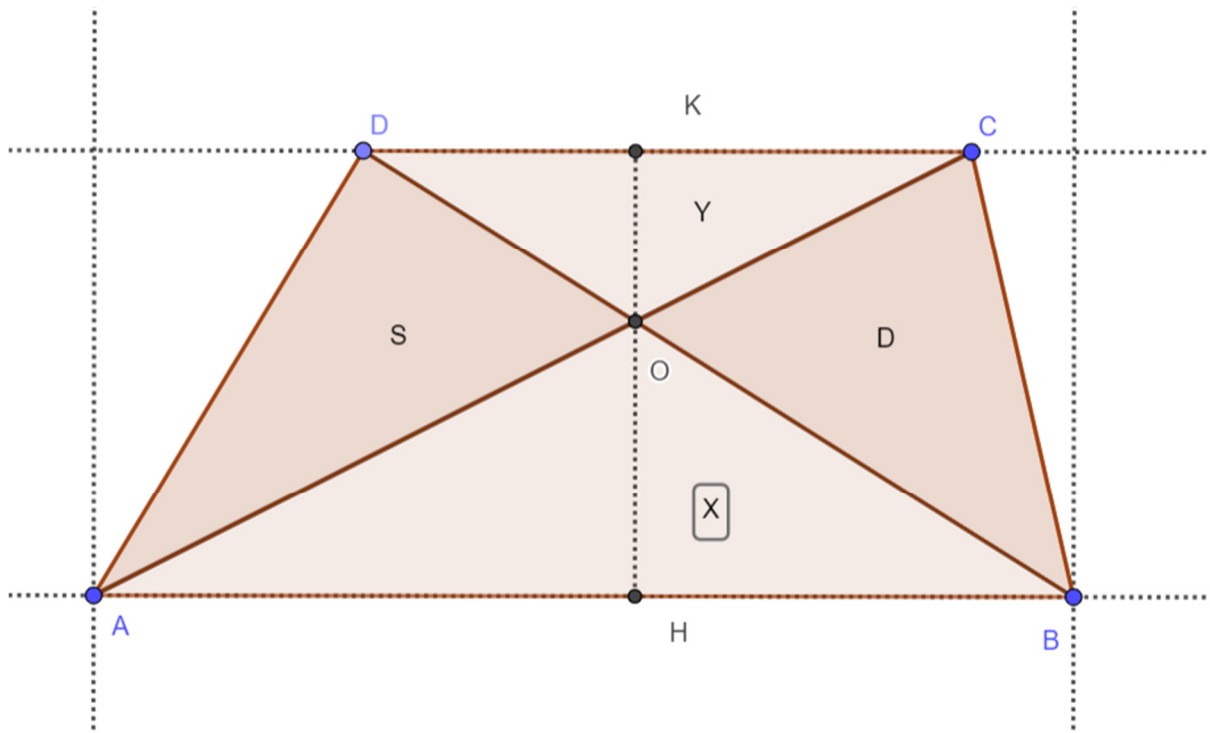
Poiché $AOD = BCO$, posso scrivere (recuperando anche X e Y per indicare rispettivamente ABO e CDO come nel testo originale) : $AOD^2 = BCO^2 = XY$. Essendo tutte le aree positive, da ciò deriva $AOD = BCO = \sqrt{XY}$, quindi sia AOD che BCO sono la media geometrica di X e Y.

b) L'area totale del trapezio equivale alla somma delle aree dei quattro triangoli. Utilizzando quanto dimostrato al punto precedente: $A_{totale} = X + Y + \sqrt{XY} + \sqrt{XY}$, da cui (sapendo che entrambe

$$A_{totale} = X + Y + 2\sqrt{XY} = \sqrt{X}^2 + 2\sqrt{XY} + \sqrt{Y}^2 = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2$$

le aree sono positive) si ottiene algebricamente quanto richiesto:

3)-Soluzione inviata dalla classe-4ABA-ITST-MARCONI-CAMPOBASSO
(tramite l'insegnante)



Ipotesi
ABCD trapezio

Tesi
 $S=D$
 $S=\sqrt{XY}$
 $A = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2$

Dimostrazione

Siano S e D rispettivamente [le aree dei] triangoli AOD e BOC:

$$S = \text{Area}(ABD) - X$$

$$D = \text{Area}(ABC) - X$$

Poiché i triangoli ABD e ABC hanno stessa area [perché ?] segue che $S=D$

Inoltre:

$$S = \text{Area}(ABD) - X = \frac{AB(KO+OH)}{2} - X = \frac{AB \cdot KO}{2} + \frac{AB \cdot HO}{2} - X = \frac{AB \cdot KO}{2}$$

$$D = \text{Area}(BCD) - Y = \frac{CD(KO+OH)}{2} - Y = \frac{CD*KO}{2} + \frac{CD*HO}{2} - Y = \frac{CD*HO}{2}$$

Dunque:

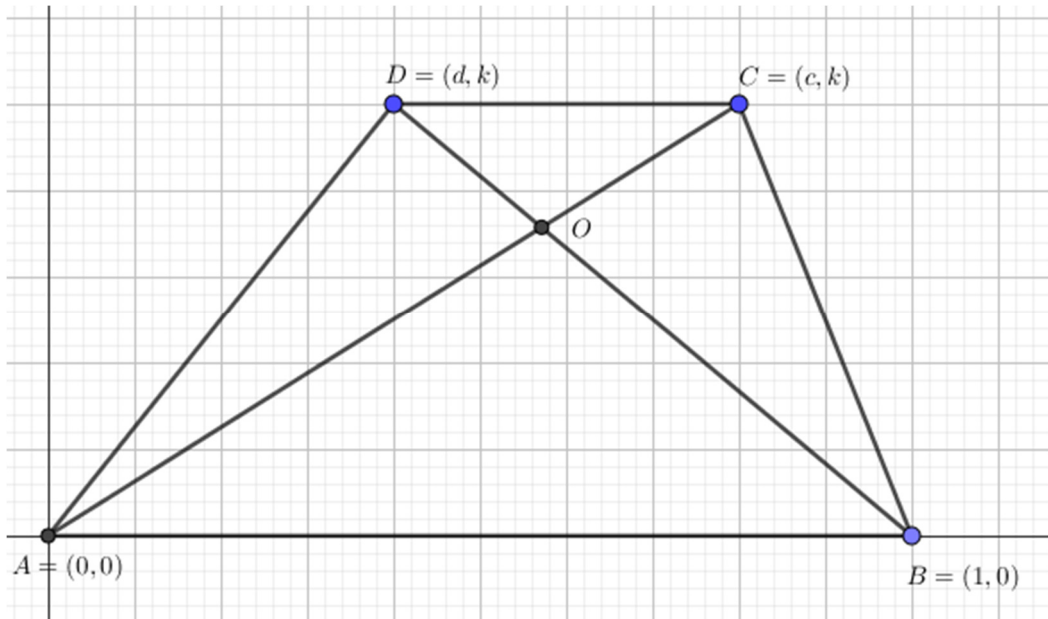
$$S*D = \frac{AB*KO}{2} * \frac{CD*HO}{2} = \frac{AB*HO}{2} * \frac{CD*KO}{2} = X*Y$$

Da cui $S*D = S*S = X*Y$ e $S = D = \sqrt{X*Y}$

In fine

$$A = X + Y + S + D = X + Y + 2S = X + Y + 2\sqrt{X*Y} = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2.$$

**4)-Soluzione proposta da Dell'Orto Filomena e Parisi Mariachiara, Classe 3A
Liceo Scientifico ASSTEAS Buccino (SA)**



Dimostrazione:

Fissiamo un sistema di riferimento come quello in alto con

$$A = (0,0), B = (1,0), C = (c, k) \text{ e } D = (d, k) \text{ con } 1 > c > d > 0 \text{ e } k > 0.$$

Iniziamo con il determinare le equazioni delle rette che passano per le seguenti coppie di punti:

- La retta per A e D: $kx - dy = 0$.
- La retta per B e C: $kx + (1 - c)y - k = 0$.
- La retta per A e C: $kx - cy = 0$.
- La retta per B e D: $kx + (1 - d)y - k = 0$.

Ora determiniamo le coordinate del punto O e quindi dobbiamo risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} kx - cy = 0 \\ kx + (1 - d)y - k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{k}{c}x \\ kx + \frac{k}{c}x - \frac{kd}{c}x - k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{k}{c}x \\ kx(c + 1 - d) - kc = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{k}{c}x \\ x = \frac{kc}{k(1+c-d)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{k}{1+c-d} \\ x = \frac{c}{1+c-d} \end{cases} \quad O \equiv \left(\frac{c}{1+c-d}; \frac{k}{1+c-d} \right)$$

Per comodità poniamo $\frac{1}{1+c-d} = \rho$ $O \equiv (\rho c; \rho k)$

Determiniamo la distanza di O dalla retta per B e C:

$$d(O,BC) = \frac{|\rho ck + \rho k - \rho ck - k|}{\sqrt{k^2 + (1-c)^2}} \quad d(O,BC) = \frac{|\rho k - k|}{\sqrt{k^2 + (1-c)^2}} = \frac{|k(\rho - 1)|}{\sqrt{k^2 + (1-c)^2}}, \text{ poiché } \rho - 1 < 0$$

$$\text{allora } d(O,BC) = \frac{k(1-\rho)}{\sqrt{k^2 + (1-c)^2}}.$$

Calcoliamo l'area del triangolo $\widehat{B\hat{O}C}$ e la indichiamo con D :

$$BC = \sqrt{k^2 + (1-c)^2}$$

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + (1-c)^2} \cdot \frac{k(1-\rho)}{\sqrt{k^2 + (1-c)^2}} = \frac{1}{2} k \cdot (1-\rho)$$

Determiniamo la distanza di O dalla retta per A e D :

$$d(O,AD) = \frac{|\rho ck - \rho dk|}{\sqrt{k^2 + d^2}} = \frac{\rho k(c-d)}{\sqrt{k^2 + d^2}}$$

Calcoliamo l'area del triangolo $\widehat{A\hat{O}D}$ e la indichiamo con S :

$$AD = \sqrt{k^2 + d^2}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + d^2} \cdot \frac{\rho k(c-d)}{\sqrt{k^2 + d^2}}, \text{ allora } S = \frac{1}{2} \rho k \cdot (c-d)$$

$$\text{Proviamo che } D=S \text{ ovvero che } \frac{1}{2} k \cdot (1-\rho) = \frac{1}{2} \rho k \cdot (c-d)$$

E' sufficiente notare che $1-\rho = 1 - \frac{1}{1+c-d} = \frac{c-d}{1+c-d} = \rho(c-d)$, ovvero $1-\rho = \rho(c-d)$ e quindi l'uguaglianza in alto è verificata.

Calcoliamo la media geometrica delle aree dei triangoli $\widehat{A\hat{B}O}$ e $\widehat{D\hat{O}C}$.

$$d(O,AB) = \rho k, \quad d(A,B) = 1 \quad X = \frac{1}{2} \rho k$$

$$d(O,DC) = k - \rho k = k(1-\rho) \text{ e poiché } 1-\rho = \rho(c-d), \text{ allora } d(O,DC) = k\rho(c-d).$$

$$d(C,D) = c - d$$

$$Y = \frac{1}{2} (c-d) k \rho(c-d) = \frac{1}{2} k \rho (c-d)^2$$

$$m_g = \sqrt{X \cdot Y} = \sqrt{\frac{1}{2} \rho k \cdot \frac{1}{2} \rho k (c-d)^2} = \frac{1}{2} \rho k (c-d) \text{ e quindi } m_g = \sqrt{X \cdot Y} = \frac{1}{2} \rho k \cdot (c-d) = S.$$

$$\text{In sintesi } m_g = \sqrt{X \cdot Y} = S.$$

Infine l'area del trapezio coincide con il quadrato della somma tra le radici quadrate delle aree dei triangoli \widehat{ABO} e \widehat{DOC} . In realtà avendo dimostrato che $m_g = S = \sqrt{X \cdot Y}$, l'ultima relazione si prova facilmente in quanto

$$A_T = (X + Y + 2S) = (X + Y + 2\sqrt{X \cdot Y}) = (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2$$

La relazione però la vogliamo verificare direttamente:

$$AB = 1 \qquad DC = c - d \qquad d(D, AB) = k$$

$$\text{Osserviamo che } \rho = \frac{1}{1+c-d} \Rightarrow 1 + c - d = \frac{1}{\rho}$$

$$A_T = \frac{1}{2} * (1 + c - d) \cdot k = \frac{k}{2\rho} \Rightarrow A_T = \frac{k}{2\rho}$$

$$(\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}\rho k} + \sqrt{\frac{1}{2}k\rho(c-d)^2} \right)^2 = \frac{1}{2}\rho k + \frac{1}{2}k\rho(c-d)^2 + k\rho(c-d) =$$

$$= \frac{1}{2}\rho k[1 + (c-d)^2 + 2(c-d)] = \frac{1}{2}\rho k[1 + (c-d)^2 + 2(c-d)] = \frac{1}{2}\rho k[1 + (c-d)]^2 =$$

[nella riga precedente i primi due termini sono uguali]

$$= \frac{1}{2}\rho k(1 + c - d)^2 = \frac{1}{2}\rho k \cdot \frac{1}{\rho^2} = \frac{k}{2\rho}. \text{ Abbiamo così provato che } (\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2 = A_T$$

[I passaggi sono corretti, ma il procedimento è molto prolisso. Inoltre non era opportuno usare la geometria analitica.]