FLATlandia

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema di gennaio 2023 - Commento alle soluzioni ricevute

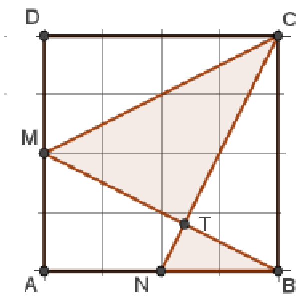
Il testo del problema

Flatlandia - Problema 9 - 30 gennaio 2023

Il quadrato $ABCD$ è suddiviso in 16 quadrati uguali (vedi figura). M è il punto medio di AD ed N il punto medio di AB. Il punto T è l'intersezione dei segmenti MB ed NC.

Determinare il rapporto tra la somma delle aree dei triangoli BTN ed MTC e l'area del quadrato $ABCD$.

Motivare la risposta.



Commento

Il problema poneva un quesito relativo all'area di due triangoli rettangoli, ottenuti disegnando un quadrilatero intrecciato all'interno di un quadrato. Si chiedeva la frazione di superficie del quadrato delimitata dal quadrilatero intrecciato.

Le risposte arrivate sono tutte sostanzialmente corrette (anche se una giunge ad un risultato errato per un errore di calcolo). Ancora una volta rileviamo una certa imprecisione nell'indicazione di punti e rette (sempre meglio fare una rilettura attenta di quanto scritto).

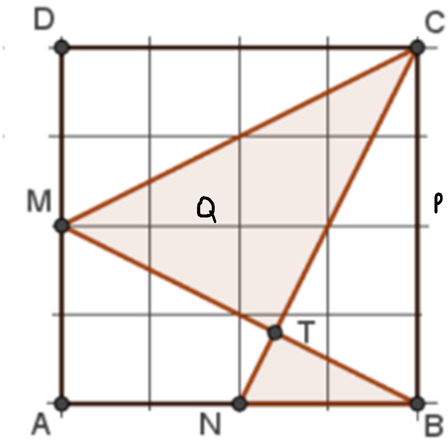
Abbiamo ricevuto 13 risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo; una è stata scartata, perché è arrivata la scansione di un foglio scritto a mano, che non permette di introdurre annotazioni):

- I.T.I.S. E. Fermi, Modena
- Liceo Scientifico "Pacinotti", Cagliari
- Liceo Torricelli Ballardini, Faenza (RA)
- Liceo B. Russell, indirizzo scientifico Scienze applicate, Cles (TN) – 5 soluzioni da una stessa classe
- Liceo Scientifico "Giacomo Leopardi", Lecco
- Liceo Classico e Scientifico "Euclide" Cagliari.
- Liceo Scientifico "Vasco Beccaria Govone", Mondovì (CN) – 2 soluzioni
- ITST "Marconi", Campobasso

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata da Ester Vecchio 5° L, I.T.I.S. E. Fermi, Modena



Unità = 1 quadretto
Area ABCD = 4*4 = 16
MDC = AMB = BCN = 4*2/2 = 4 (cioè ¼ Area ABCD)

- Osservando BTN si nota che è simile a BCT [manca la giustificazione], ma in riferimento al quadrato piccolo NBPQ
- NBPQ = ¼ * ABCD

Quindi => BTN = ¼ * BCT => BTC = 4*BTN

- BCN = BTN + BCT = 5BTN
- BCN = ¼ * Area ABCD

=> BTN = (¼ : 5) * Area ABCD = 1/20 * Area ABCD
BTC = 4*BTN = 4 * 1/20 * Area ABCD = 1/5 * Area ABCD
MTC = (1 – AMB – MDC – BTC) * Area ABCD = 3/10 * Area ABCD

SOLUZIONE :
(MTC + BTN) / Area ABCD = (6/20 + 1/20) * Area ABCD/Area ABCD = 7/20

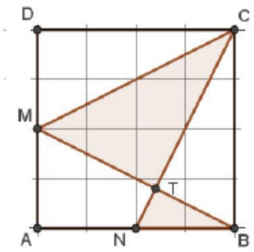
2) Soluzione inviata da Alessandro Didu, 3F Liceo “Pacinotti”, Cagliari

Flatlandia - Problema 9 - 30 gennaio 2023

Il quadrato $ABCD$ è suddiviso in 16 quadrati uguali (vedi figura). M è il punto medio di AD ed N il punto medio di AB. Il punto T è l'intersezione dei segmenti MB ed NC.

Determinare il rapporto tra la somma delle aree dei triangoli BTN ed MTC e l'area del quadrato $ABCD$.

Motivare la risposta.



Prendiamo come unità u la lunghezza del lato di uno dei 16 quadrati uguali. Allora il [lato del] quadrato ABCD sarà lungo 4u.

Si fa notare che i triangoli AMB e CBN sono congruenti per LAL:
AB=BC=4u perché lati di uno stesso quadrato
MA=NB=2u perché metà di lati di uno stesso quadrato
MÂB e NBC(angolo) entrambi retti perché entrambi angoli di un quadrato

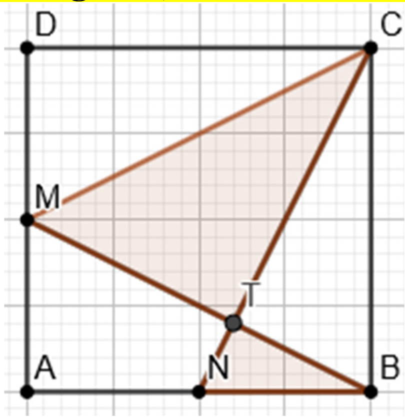
Si fa notare che l'uno è ruotato di un angolo retto rispetto all'altro perché il cateto minore di uno poggia sullo stesso segmento di retta AB del cateto maggiore dell'altro triangolo e nel dettaglio quindi i segmenti BM e CN sono perpendicolari e quindi BT è altezza del triangolo NBC. Allora NBC, NBT e BTC sono tutti simili.

Si evidenzia come l'area di CTM sia l'area di BCM meno l'area di BTC
Si calcola la lunghezza di CN con il teorema di Pitagora:
Sqrt[(2u)^2+(4u)^2] =sqrt(20)u=2sqrt(5)u
Il rapporto di similitudine lineare tra CTB e CBN è 4/[2sqrt(5)]
Il rapporto di similitudine lineare tra BTN e CTB è 1/2
Il rapporto di similitudine quadratico tra CTB e CBN è 16/20=4/5 [tra le aree]
Il rapporto di similitudine quadratico tra BTN e CTB è ¼ [tra le aree]

L'area del quadrato ABCD è (4u*4u)=16u^2
L'area di CBM è (4u*4u)/2=8u^2
L'area di CBN è (2u*4u)/2=4u^2
L'area di CTB è 4u^2*(4/5)=(16/5)u^2
L'area di CTM è 8u^2-(16/5)u^2=[(40-16)/5]u^2=(24/5)u^2
L'area di BTN è (16/5)u^2*(1/4)=(4/5)u^2
La somma delle aree di BTN e CTM è [[(16/5)u^2+(4/5)u^2=(20/5)u^2]] [4/5+24/5= 28/5]

Il rapporto tra la somma delle aree dei triangoli BTN e CTM e l'area del quadrato ABCD è:
[[[(20/5)u^2]/16u^2=(20/5)/16=20/5*16=20/80=1/4]][28/5/16=7/20].

3) Soluzione inviata da Ilaria Righetti, 3°BS liceo Torricelli Ballardini, Faenza.



Considero i triangoli BCN e BAM. Essi hanno:

- BA≅BC perché lati dello stesso quadrato;
- MA≅BN perché metà di segmenti ≅ (DA≅BA perché lati dello stesso quadrato);
- Angolo MAB≅angolo CBN perché entrambi retti.

Quindi essi sono ≅ per il primo criterio di congruenza dei triangoli e l'angolo MBA è congruente all'angolo NCB e l'angolo BMA è congruente all'angolo CNB.
Analogamente i triangoli DMC e MAB sono congruenti.
Considero i triangoli BTN e BCN. Essi hanno:

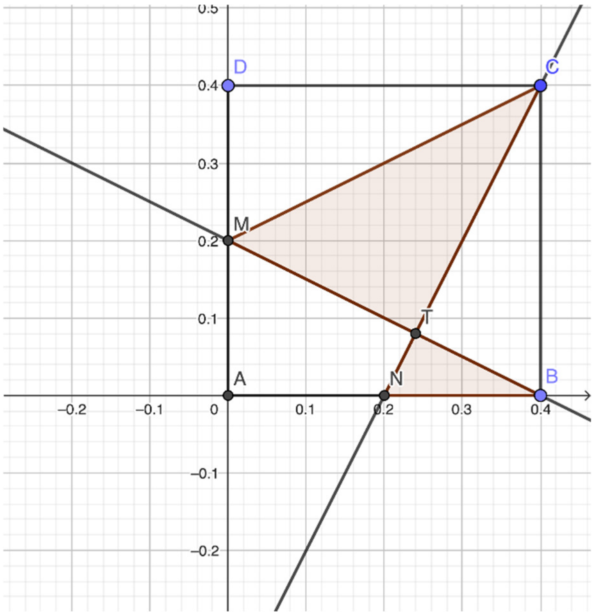
- L'angolo BNT in comune;
- Angolo NCB≅angolo TBN per dimostrazione precedente.

Quindi essi sono simili per il primo criterio di similitudine dei triangoli.
Si può quindi scrivere la proporzione:

1. NT:NB=NB:NC

Considero AB=4u e di conseguenza NB=2u.
Per teorema di Pitagora applicato al triangolo BCN, NC = $\sqrt{(16+4)u^2} = 2\sqrt{5}u$
Sostituendo i valori numerici corrispondenti nell'espressione 1 ottengo: NT = $2u \times 2u : (2\sqrt{5})u = (2\sqrt{5})/5\ u$
Per teorema di Pitagora applicato al triangolo BTN [bisognava provare che il triangolo è rettangolo], TB = $\sqrt{(NB^2-NT^2)u^2} = (4\sqrt{5})/5\ u$
Area NTB = $(2\sqrt{5})/5\ u \times (4\sqrt{5})/5\ u \times 1/2 = 4/5\ u^2$
Area ABCD = $4u \times 4u = 16\ u^2$
Area CDM=MAB=BCN= $4u \times 2u : 2 = 4\ u^2$
Area MTC= Area ABCD – 3 × Area MBA + Area NTB = $16\ u^2 - 3 \times 4\ u^2 + 4/5\ u^2 = 24/5\ u^2$
Area MTC + Area TNB = $24/5\ u^2 + 4/5\ u^2 = 28/5\ u^2$
AREA (MTC+BNT)/Area ABCD = $28/5\ u^2 : 16\ u^2 = 7/20$

4) Soluzione inviata da Asia Mariotti, classe: 2D, Liceo B. Russell, indirizzo scientifico scienze applicate, Cles (TN)



[Magari qualche parola di spiegazione non ci stava male…]

Trovo l'equazione [[dei segmenti]] [delle rette] $\underline{MB}$ e $\underline{CN}$:

$\underline{MB}$: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

$\underline{CN}$: $y = 2x - 4$

Trovo le coordinate del punto T mettendo le due equazioni appena trovate a sistema.

Trovo prima la x:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \\ y = +2x - 4 \end{cases}$$

$2x - 4 = -\frac{1}{2}x + 2$

$2x + \frac{1}{2}x = 4 + 2$

$$\frac{5}{2}x = 6 \Rightarrow moltiplico\ per\ 2\ a\ destra\ e\ a\ sinistra$$

$$5x = 12 \Rightarrow divido\ per\ 5\ a\ destra\ e\ a\ sinistra$$

$x = \frac{12}{5}$

Ora sostituisco la x nella seconda equazione ($y = +2x - 4$):

$$y = 2 \cdot \frac{12}{5} - 4$$

$$y = \frac{24}{5} - 4$$

$$y = \frac{4}{5}$$

Dopo questi [[procedimenti trovi]] [calcoli ho] le coordinate del punto T e sono: $x = \frac{12}{5}$ e $y = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow T\left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Con i dati trovati possiamo calcolare l'area del triangolo BTN:

$$A = \frac{\frac{4}{5} \cdot 2}{2} = \frac{4}{5}$$

$\underline{MB}$ *e* $\underline{CN}$ sono perpendicolari [[per antireciproco]] [perché i loro coefficienti angolari sono l'uno l'antireciproco dell'altro], quindi formano un angolo di 90°.

Applico il teorema di Pitagora sulle distanze tra punti:

$$M(0,2) \quad T\left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$MT = \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - 2\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ [radice chiusa prima dell'uguale]

$$C(4,4) \quad T\left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$CT = \sqrt{\left(4 - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(4 - \frac{4}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ [radice chiusa prima dell'uguale]

Trovati i lati $\underline{MT}$ e $\underline{CT}$, posso calcolare l'area del triangolo MTC applicando la formula dell'area del triangolo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{\frac{6\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{24}{5}$$

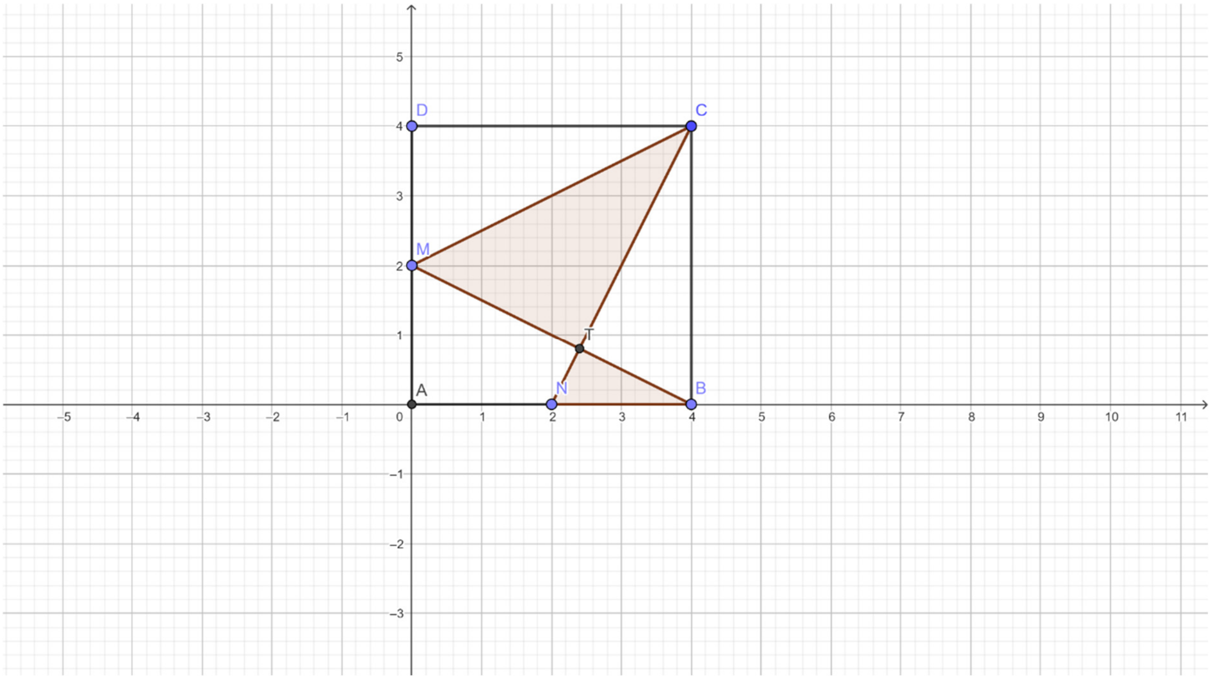
Trovo l'area del quadrato:

$$A = 4 \cdot 4 = 16$$

Ora che ho tutti i dati posso calcolare il rapporto tra la somma delle aree dei triangoli BTN e MTC e l'area del quadrato:

$$\frac{\frac{24}{5} + \frac{4}{5}}{16} = \frac{7}{20}$$

5) Soluzione inviata da Zuech Alessandro, 2D, Liceo B. Russell, indirizzo scientifico scienze applicate, Cles (TN)



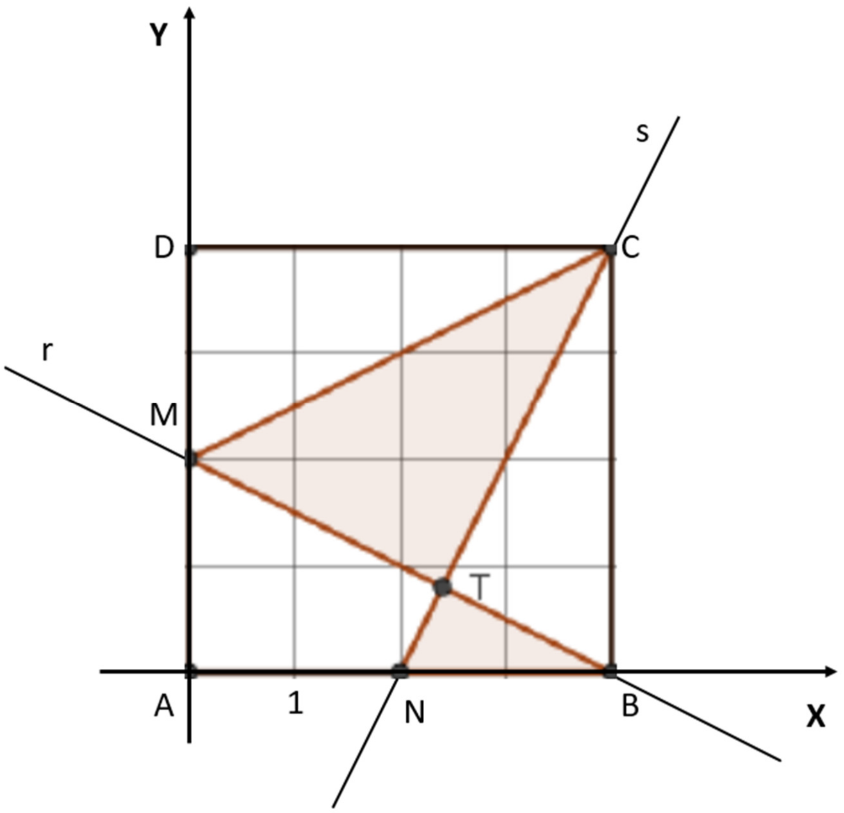
Consideriamo i lati del triangolo come assi del piano cartesiano, DA sarà l'asse y e AB l'asse x.
Trovo l'area del quadrato:
4 x 4= 16 = quadratini che compongono il quadrato.
Trovo l'area del triangolo CDM:
si trova facendo (base × altezza) ÷ 2 quindi $\frac{4 \times 2}{2}$ = 4 quadratini.
I triangoli CDM, BMA e CND sono congruenti perché hanno tutti e tre i lati congruenti e quindi hanno anche la stessa area.
Trovo le equazioni di CN e MB per trovare il loro punto d'intersezione:
si trova facendo il $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e quindi viene per CN $\frac{4}{2}$ che si semplifica in $\frac{2}{1}$ e dopo si trova la quota prolungando DA dalla parte di A di un segmento congruente a DA e così facendo si noterà che CN incontra l'asse y a - 4 che è la quota.
Dopo si trova l'equazione di MB con la stessa procedura e quindi viene che la pendenza è $-\frac{2}{4}$ che semplificato è $-\frac{1}{2}$ e la quota si può vedere dal grafico che è 2.
Quindi l'equazione di CN è y= $\frac{2}{1}x - 4$ e invece quella di MB è y= $-\frac{1}{2}x + 2$
Trovo il punto di intersezione facendo il sistema tra le due equazioni.
Posso trovare l'intersezione eguagliando le due equazioni cioè:
$\frac{2}{1}x - 4 = -\frac{1}{2}x + 2$ e da questa risulta che x = $\frac{12}{5}$.
Per trovare la y, sostituisco la x trovata nel passaggio prima a una delle due equazioni.
Sostituiamo x all'equazione di MB:
y = $-\frac{1}{2} \times \frac{12}{5} + 2$ e quindi y = $\frac{4}{5}$
Il punto di intersezione (T) avrà coordinate $(\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$.

Adesso suddivido il triangolo BTN in due triangoli rettangoli e dunque ne calcolo la loro area:
Trovo i lati dei triangoli:

$\frac{12}{5}$ - $\frac{10}{5}$ = $\frac{2}{5}$
Faccio $\frac{2}{5}\times$ la y di T che è uguale a $\frac{4}{5}$ e divido il tutto per 2. Il risultato è $\frac{4}{25}$.
Faccio lo stesso con l'altro triangolo
[[
$\frac{15}{5}$ (che sono tre quadratini) - $\frac{12}{5}$ = $\frac{3}{5}$
$\frac{3}{5}$ + $\frac{5}{5}$ (un quadratino) = $\frac{8}{5}$.]] [????]
Utilizzo sempre $\frac{4}{5}$ per l'altezza e quindi viene ($\frac{8}{5}\times\frac{4}{5}$) ÷ 2 = $\frac{16}{25}$ = area del triangolo.
Sommo le due aree per trovare l'area del triangolo BTN che sarà dunque $\frac{16}{25}+\frac{4}{25}=\frac{20}{25}$.
Siccome nella somma dei triangoli CNB e BMA, BTN è presente 2 volte, lo sottraiamo due volte alla loro somma, quindi diventa
4+4=8,
8 - 2 $\times\frac{20}{25}=\frac{32}{5}$
$\frac{32}{5}+\frac{4}{1}$ (area triangolo CDM) = $\frac{52}{5}$ = area quadrato - area triangoli MTC e BTN.
Quindi se l'area del quadrato intero è 16, se si sottrae a 16, $\frac{52}{5}$ che è l'area non coperta dai triangoli, si trova l'area totale di questi ultimi che sarà $\frac{80}{5}-\frac{52}{5}=\frac{28}{5}$.
Adesso si fa la proporzione:
$\frac{28}{5}$ ÷ x = $\frac{80}{5}$ ÷ 1, quindi x = $\frac{7}{20}$ = rapporto tra area triangoli e area quadrato grande.
Quindi si ha che la somma tra le area dei triangoli è $\frac{7}{20}$ di tutta l'area del quadrato.

[Il procedimento è un po' farraginoso.]

6) Soluzione inviata dalla Classe 2°, Liceo Scientifico Giacomo Leopardi di Lecco



Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano con origine degli assi nel punto A e come unità un quarto del lato del quadrato.
Troviamo l'equazione della retta r contenente il segmento MB:
coefficiente angolare: $m_{MB} = \frac{0-2}{4-0} = -\frac{1}{2}$
[[fascio di rette]] [retta] per B con coefficiente [angolare] m_{MB} : $y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 4)$
equazione di r:$y = -\frac{1}{2}x + 2$

Troviamo l'equazione della retta s contenente il segmento CN:
coefficiente angolare : $m_{CN} = \frac{4-0}{4-2} = 2$
[[fascio di rette]] [retta] per [N] con coefficiente [angolare] m_{CN}: $y - 0 = 2(x - 2)$
equazione di s: $y = 2x - 4$

Osservando le equazioni di r ed s notiamo che esse sono perpendicolari, in quanto tra i loro coefficienti angolari vale la relazione $m_{CN} = -\frac{1}{m_{MB}}$.
Questo ci permette di stabilire che il triangolo MTC è rettangolo in T, pertanto per calcolarne l'area sarà sufficiente trovare la misura dei due cateti, utilizzando la formula della distanza tra due punti:
Calcoliamo le coordinate del punto T con un sistema tra le rette r ed s e successivamente le misure dei cateti MT e TC:
$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$ da cui segue, per confronto: $-\frac{1}{2}x + 2 = 2x - 4 \rightarrow x_T = \frac{12}{5}\ e\ y_T = \frac{4}{5}$

$$MT = \sqrt{(x_M - x_T)^2 + (y_M - y_T)^2} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$
$$CT = \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Nell'ultimo passaggio di entrambe le espressioni abbiamo razionalizzato il risultato.

L'area del triangolo MTC misura quindi : $A_{MTC} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{24}{5}$

L'area del triangolo NTB la calcoliamo prendendo come base NB e come misura dell'altezza quella dell'ordinata del punto T:

$$A_{NTB} = \frac{NB \ \cdot y_T}{2} = \frac{4}{5}$$

La somma delle aree dei due triangoli MTC e TNB vale $A_{NTB+MTC} = \frac{28}{5}$.

Infine calcoliamo il rapporto tra la somma delle aree dei triangoli MTC e TNB e l'area del quadrato:

$$\frac{A_{NTB+MTC}}{A_{ABCD}} = \frac{28}{5} \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{20}$$

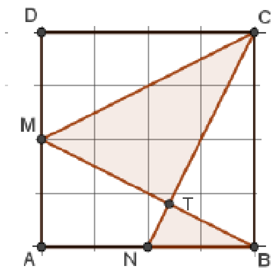
7) Soluzione inviata da GABRIELLA BELLOCCHIO, CLASSE 3^R LICEO SCIENTIFICO VASCO BECCARIA GOVONE, MONDOVI' (CN)

Flatlandia - Problema 9 - 30 gennaio 2023

Il quadrato $ABCD$ è suddiviso in 16 quadrati uguali (vedi figura). M è il punto medio di AD ed N il punto medio di AB. Il punto T è l'intersezione dei segmenti MB ed NC.

Determinare il rapporto tra la somma delle aree dei triangoli BTN ed MTC e l'area del quadrato $ABCD$.

Motivare la risposta.



DATI:

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

$\widehat{DAB} \cong \widehat{ABC} \cong \widehat{BCD} \cong \widehat{CDA} = 90°$

A(ABCD)= 16 quadretti

$\overline{AN} \cong \overline{NB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

$\overline{DM} \cong \overline{MA} = \frac{1}{2}\overline{DA}$

RICHIESTA:

$\frac{A(BTN)+A(MTC)}{A(ABCD)} = ?$

SVOLGIMENTO:

- Innanzitutto, ponendo un quadretto = un'unità, ottengo che l'area del quadrato ABCD corrisponde a 16 unità, pertanto, essendo che l'area del quadrato segue tale formula: A= l^2 , posso trovare le misure dei lati $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$:

A(ABCD)= AB^2 → AB=$\sqrt{A(ABCD)}$

AB=$\sqrt{16} = 4$

- Ora, conoscendo la misura dei quattro lati, posso trovare $\overline{AN}$, $\overline{NB}$, $\overline{DM}$, $\overline{MA}$:
Essendo che:

$\overline{AN} \cong \overline{NB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ e $\overline{DM} \cong \overline{MA} = \frac{1}{2}\overline{DA}$

e, sapendo ora che $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA} = 4$, ottengo:

$\overline{AN} \cong \overline{NB} \cong \overline{DM} \cong \overline{MA} = \frac{4}{2} = 2$

- Ora posso dunque dimostrare che i triangoli MAB ed NBC sono congruenti in quanto due triangoli rettangoli sono congruenti quando hanno due cateti congruenti, [[infatti]] [inoltre] :

$\widehat{AMB} \cong \widehat{BNC}$

$\widehat{MBA} \cong \widehat{NCB}$
- Pendendo ora il triangolo NTB, posso dire che:
$\widehat{BNT} \cong \widehat{BNC}$
$\widehat{TBN} \cong \widehat{MBA}$
Quindi, per sottrazione ottengo che, se:
$180 - \widehat{AMB} - \widehat{MBA} = \widehat{DAB} = 90°$
allora, anche
$180 - \widehat{TNB} - \widehat{BNT} = \widehat{NTB} = 90°$ [TBN e non BNT]
Pertanto, se i triangoli MAB e NTB hanno tutti gli angoli congruenti, posso affermare che sono triangoli simili e , dunque, hanno i lati in proporzione.

- A questo punto, trovo l'ipotenusa di MAB usando il teorema di Pitagora:
i= $\sqrt{C^2+c^2}$
Perciò:
$$\overline{MB} = \sqrt{\overline{MA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

- Applicando adesso i rapporti di proporzionalità tra i triangoli simili, posso trovare $\overline{TN}$ e $\overline{BT}$:
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{TN}} \rightarrow \overline{TN} = \frac{\overline{MA}*\overline{NB}}{\overline{MB}} = \frac{2*2}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{BT}} \rightarrow \overline{BT} = \frac{\overline{AB}*\overline{NB}}{\overline{MB}} = \frac{4*2}{2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

- Ora, posso quindi calcolare l'area di NBT:
$$A(NBT) = \overline{TN} * \overline{BT}\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} * \frac{4\sqrt{5}}{5} * \frac{1}{2} = \frac{8}{10}$$

-A questo punto, prendo in considerazione il triangolo MTC:
$$\overline{MT} = \overline{MB} - \overline{BT} = 2\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$
$$\overline{TC} = \overline{NC} - \overline{TN} = 2\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

- Posso dunque calcolare l'area di MTC:
$$A(MTC) = \overline{TC} * \overline{MT}\frac{1}{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} * \frac{8\sqrt{5}}{5} * \frac{1}{2} = \frac{48}{10}$$

- Posseggo ora tutti i dati necessari per risolvere il problema: il rapporto tra la somma delle aree dei triangoli BTN ed MTC e l'area del quadrato ABCD è:
$$\frac{A(BTN)+A(MTC)}{A(ABCD)} = ? \rightarrow \frac{\frac{8}{10}+\frac{48}{10}}{16} = \frac{56}{160} = \frac{7}{20}.$$

8) Soluzione inviata da Margherita Grossi, 2D, Liceo B. Russell, indirizzo scientifico scienze applicate, Cles (TN)

- **COME PRIMO PASSAGGIO MI COSTRUISCO UN SISTEMA DI ASSI CARTESIANI E ATTRIBUISCO AD OGNI QUADRATO IL VALORE DI 1 UNITA' .**

[Manca la figura !!!]

M (0; 2)
B (4; 0)

equazione della retta che passa per $\underline{M, B} \Rightarrow \frac{Y-YB}{YM-YB} = \frac{X-XB}{XM-XB}$

$\Rightarrow \frac{Y-2}{0-2} = \frac{X-0}{4-0} \Rightarrow \frac{Y-2}{-2} = \frac{X}{4} \Rightarrow 2Y\text{-}4 = -X \Rightarrow 2Y = -X+4 \Rightarrow Y = -\frac{1}{2}X+2$

equazione della retta che passa per $\underline{N, C} \Rightarrow \frac{Y-YC}{YN-YC} = \frac{X-XC}{XN-XC}$

$\Rightarrow \frac{Y-4}{0-4} = \frac{X-4}{2-4} \Rightarrow \frac{Y-4}{-4} = \frac{X-4}{-2} \Rightarrow Y\text{-}4 = 2X\text{-}8 \Rightarrow Y=2X\text{-}4$

TROVARE LE COORDINATE (x,y) DEL PUNTO "T" TRAMITE IL SISTEMA TRA LE [equazioni delle] RETTE "$\underline{MB}$" ED "$\underline{NC}$"

$Y = -\frac{1}{2}X + 2$

$Y = 2(\frac{12}{5})\text{-}4$

$Y = \frac{24}{4}\text{-}4 \Rightarrow \frac{24-20}{5} = \frac{4}{5}$

$Y = 2X\text{-}4$

$Y = 2(\frac{12}{5})\text{-}4$

$Y = \frac{24}{4}\text{-}4 \Rightarrow \frac{24-20}{5} = \frac{4}{5}$

$Y = \frac{4}{5}$

$2X\text{-}4 = -\frac{1}{2}X + 2$

$2X + \frac{1}{2}X = 2+4$

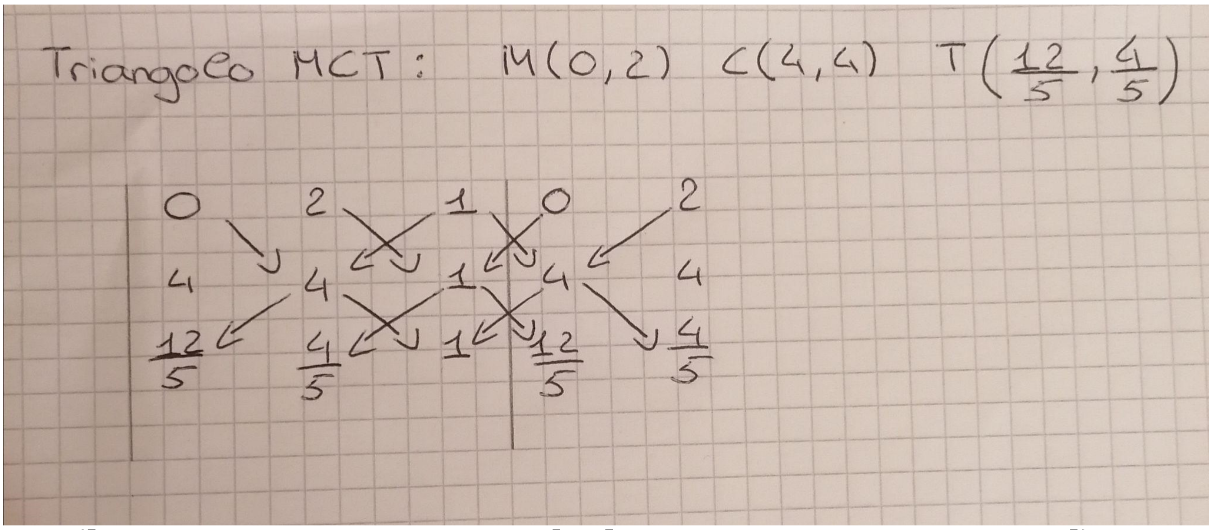
$\frac{4X+X}{2} = 6 \Rightarrow 5X = 12$

$X = \frac{12}{5}$

T $(\frac{12}{5}; \frac{4}{5})$

- **CONOSCENDO ORA LE COORDINATE DEI VERTICI DEI TRIANGOLI MCT ED NTB USO IL METODO DI SARRUS PER CALCOLARE L'AREA DEI DUE TRIANGOLI:**

Area triangolo MCT: **M(0,2) C(4,4) T**$(\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$

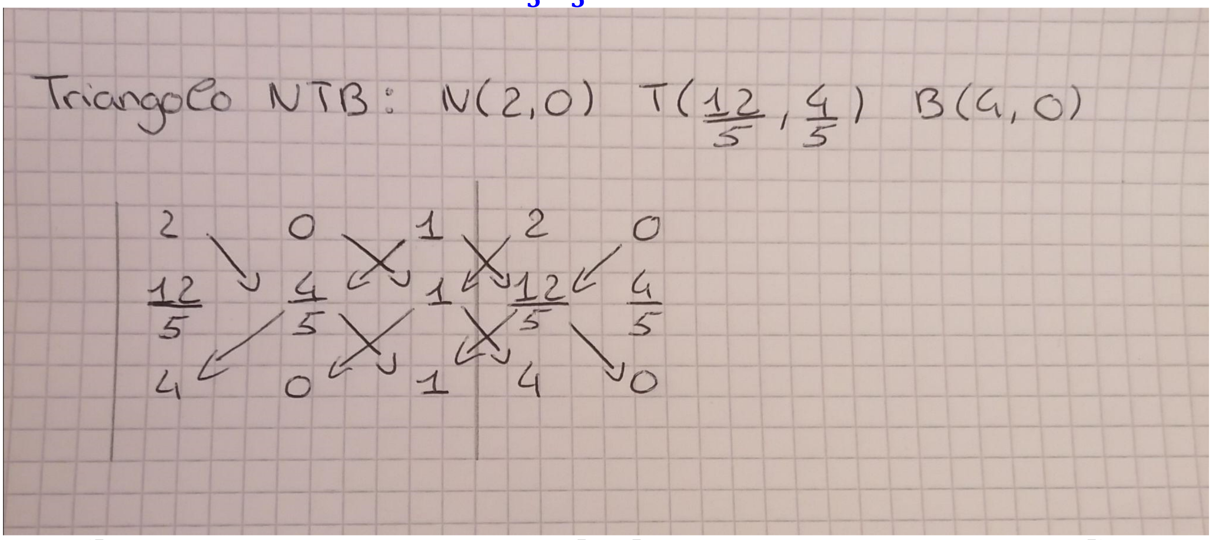


A= $\frac{1}{2}\left\{\left[(0X4X1)+(2X1X\frac{12}{5})+(1X4X\frac{4}{5})\right]-\left[(1X4X\frac{12}{5})+(0X1X\frac{4}{5})+(2X4X1)\right]\right\}$

N.B: se il valore dell'area dovesse uscire negativo si prende il suo valore assoluto.

A= $\left|-\frac{24}{5}\right|=\frac{24}{5}$

Area triangolo NTB: **N(2,0) T($\frac{12}{5},\frac{4}{5}$) B(4,0)**



A= $\frac{1}{2}\left\{\left[(2x4/5x1)+(0x1x4)+(1x\frac{12}{5}x0)\right]-\left[(1x\frac{4}{5}x4)+(2x1x0)+(0x\frac{12}{5}x1)\right]\right\}$

N.B: se il valore dell'area dovesse uscire negativo si prende il suo valore assoluto.

A= $\left|-\frac{4}{5}\right|=\frac{4}{5}$

Calcoliamo l'area del quadrato ABCD:

AB= 4
BC= 4

A= $l^2 = 4^2 =$ **16**

- **Infine calcoliamo il rapporto tra la somma delle aree del triangolo NTB ed MCT e l'area del quadrato ABCD (indichiamo con "R" il risultato):**

R= $(A_{NTB} + A_{MCT}) / A_{ABCD} = (\frac{24}{5} + \frac{4}{5})/16 = \frac{28}{5} \text{x} \frac{1}{16} = \frac{7}{20}$

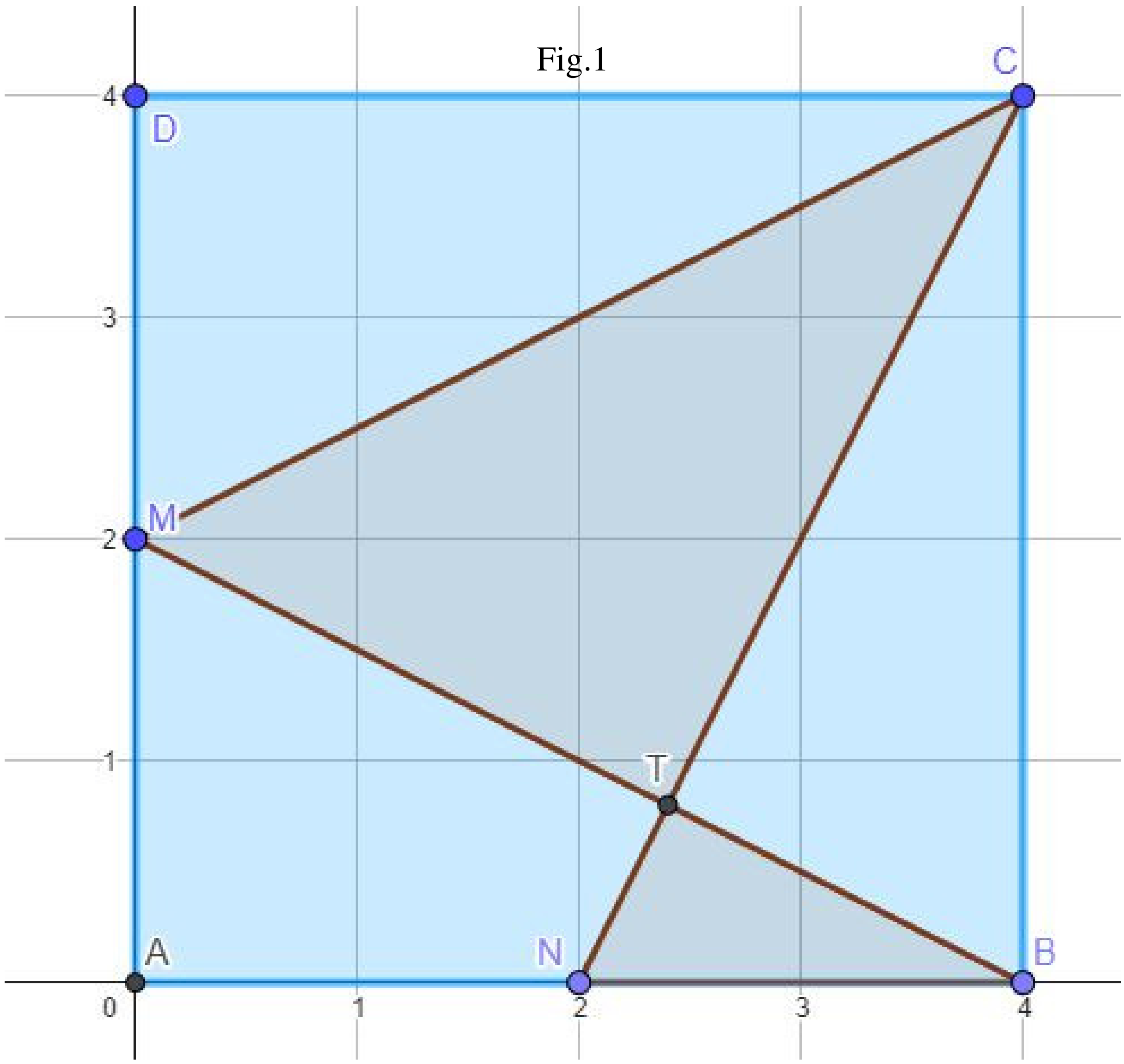
[Il procedimento è piuttosto confuso !!]

9) Soluzione inviata da Lorenzo Dalla Serrra, 2D, Liceo B. Russell, indirizzo scientifico scienze applicate, Cles (TN)

IPOTESI:

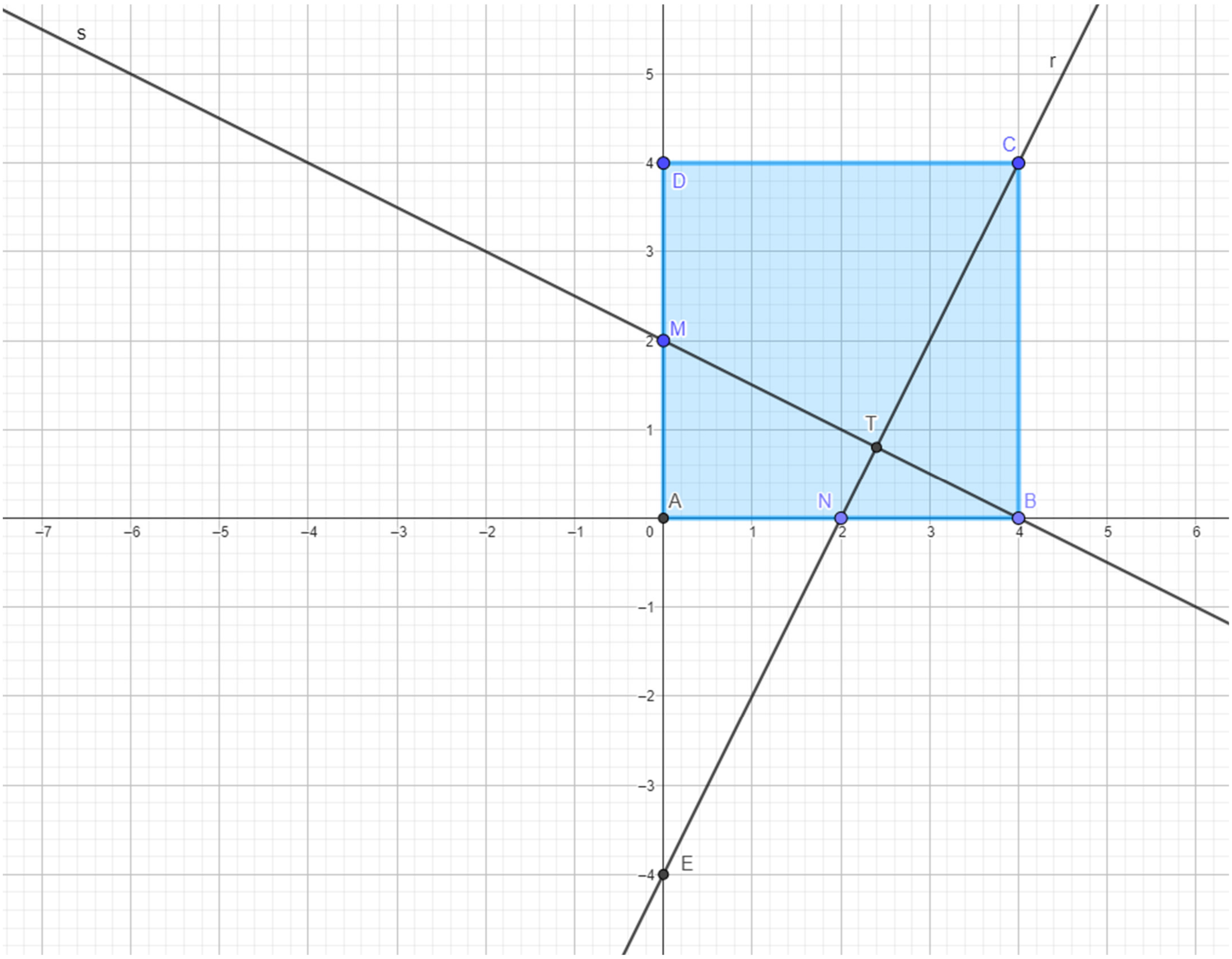
Si parte dalla situazione rappresentata in Fig.1:
M ed N sono punti medi, rispettivamente di AD ed AB;
T è il punto di intersezione tra i segmenti MB ed NC;
Determinare il rapporto tra la somma delle aree dei 2 triangoli MTC ed NBT e l'area del quadrato ABCD.

Fig.1



RISOLUZIONE:

Fig.2
Fig.2



Si ponga la figura data in un sistema di riferimento cartesiano come quello in fig.2 e si traccino le rette r ed s, che passano rispettivamente per i [[segmenti]] [punti N,C ed M,B].

Si possono quindi individuare le equazioni delle 2 rette (la cui pendenza è stata calcolata come $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$):

Retta r: $y = 2x + q$. Dato che la retta passa per N(2,0), si può trovare la quota sostituendo ad x e y, le coordinate di N (punto noto della retta):

$y = 2x + q \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 * 2 + q \quad \Rightarrow -q = 4 \quad \Rightarrow \quad q = -4$

La retta r avrà quindi equazione: $y = 2x - 4 \; (Equazione\, retta\, r)$.

Retta s: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (la quota è 2 perché è il punto M(0,2))

Si possono quindi trovare le coordinate del punto T, intersezione delle due rette, eseguendo il sistema tra le 2 equazioni delle stesse:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \\ y = \ 2x - 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + y = 2 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è: $x = \frac{12}{5}$ e $y = \frac{4}{5}$.

Quindi il punto T ha coordinate $(\frac{12}{5}; \frac{4}{5})$.

Le 2 rette (r ed s) sono anche perpendicolari tra di loro, perché le pendenze sono una l'anti-reciproca dell'altra (teorema).

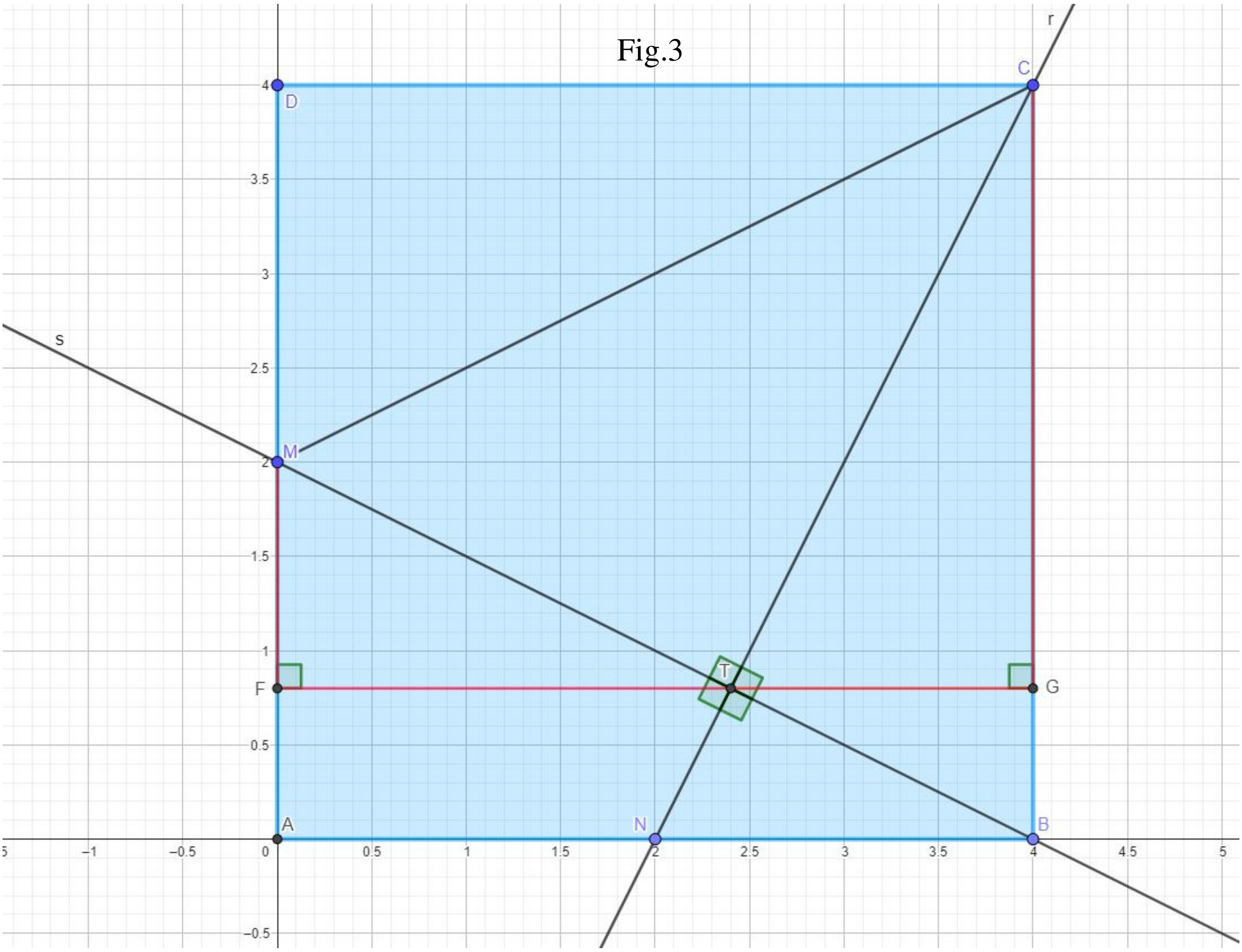


Fig.3

Si può quindi calcolare la lunghezza di MT e TC (cateti di MTC) col teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli FTM e TGC (vedi fig.3), per poi trovare l'area del triangolo MTC, il quale è rettangolo perché formato dalle 2 rette (r ed s) perpendicolari tra loro.

$$MT = \sqrt{(MF)^2+(FT)^2} \;\Rightarrow\; MT = \sqrt{(2-\frac{4}{5})^2+(\frac{12}{5})^2} \;\Rightarrow\; MT = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$TC = \sqrt{(TG)^2+(GC)^2} \;\Rightarrow\; TC = \sqrt{(4-\frac{12}{5})^2+(4-\frac{4}{5})^2} \;\Rightarrow TC = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

Il triangolo MTC avrà area:

$$A = \frac{MT*TC}{2} \Rightarrow A = \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}*\frac{8}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{\frac{48}{5}}{2} = \frac{48}{5}*\frac{1}{2} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}\ (Area\ di\ MTC)$$

L'area di NBT si può ottenere con la formula $A = \frac{b*h}{2}$, in cui la base è l'ipotenusa del triangolo NBT, mentre l'altezza è la distanza di T dall'asse delle x, che sarebbe la coordinata y del punto T.

$$A = \frac{b*h}{2} = \frac{NB\ *\ y(di\ T)}{2} = \frac{2\ *\frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{5}\ (Area\ di\ NBT)$$

L'area del quadrato ABCD si può calcolare come:

$A_Q = AB*AB \;\Rightarrow\; A_Q = 4*4\ = 16\ (Area\ quadrato\ ABCD)$

È richiesto di calcolare il rapporto tra la somma delle aree di MTC e NBT e l'area del quadrato ABCD:

$$Rapporto = \frac{A_{MTC}+A_{NTB}}{A_{ABCD}} = \frac{\frac{24}{5}+\frac{4}{5}}{16} = \frac{\frac{28}{5}}{16} = \frac{28}{5}*\frac{1}{16} = \frac{7}{20}\ (Rapporto\ richiesto)$$

10) Soluzione inviata da Lorenzo Onnis, 2 Bs Liceo Classico e Scientifico "Euclide" Cagliari.

Dati:
M è punto medio di AD
N è punto medio di AB
T è l'intersezione tra la retta MB e la retta CN
ABCD è un quadrato
Obbiettivo:
Trovare il rapporto tra le aree di TCM+NBT e di ABCD.
NOTA: abbiamo usato il simbolo ≡ per indicare l'equivalenza tra superfici.

Risoluzione:
Consideriamo 3 punti:

- "E" il punto medio di BC
- "F" l'intersezione tra CN e la parallela ad AB passante per E
- "H" la proiezione di E su CN

ABM e NBC sono congruenti perché sono rettangoli e hanno due lati ordinatamente congruenti.
L'angolo CNB e l'angolo ABM sono complementari poiché l'angolo C$\hat{N}$B è un angolo congruente a A$\hat{M}$B
Le rette CN e BM sono perpendicolari poiché N$\hat{T}$B è supplementare di C$\hat{N}$B+A$\hat{B}$M e C$\hat{N}$B e A$\hat{B}$M sono complementari
NB è ½ di AB poiché N è punto medio di AB
EC è congruente a NB poiché anch'esso è metà di un lato del quadrato
F è punto medio di CN poiché è l'intersezione tra CN e la parallela a AB passante per E, punto medio di BC.
FE è congruente a ¼ di AB perché unisce i punti medi dei lati CN e BC del triangolo NBC.
FEC è equivalente a $^1/_{16}$ di ABCD perché: FE=1/4 AB e CE è la metà del lato del quadrato.
HEC è congruente a NBT poiché sono due triangoli rettangoli che hanno CE ed NB congruenti poiché metà del lato dello stesso quadrato e gli angoli N$\hat{B}$T e H$\hat{C}$E congruenti
FEH è equivalente a ¼ NTB poiché sono due triangoli simili ed FE è congruente a ½ NB
FEC ≡ FEH+HEC ≡ FEH+NBT

NBT ≡ $^1/_{20}$ ABCD perché FEC ≡ $^1/_{16}$ ABCD≡FEH+NBT e, poiché FEH≡¼ NBT, avremo

che FEC ≡ 5/4 NBT per cui NBT equivale a $^4/_5$ di $^1/_{16}$ ABCD ovvero $^1/_{20}$ ABCD.

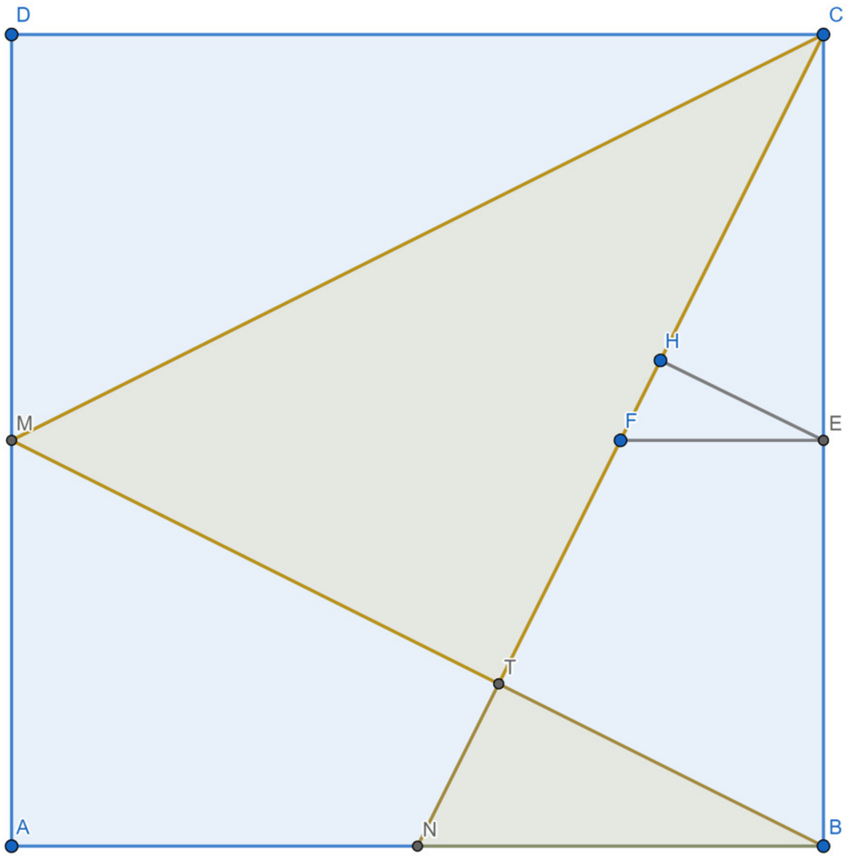
ABM = MCD ≡ ¼ ABCD (triangoli con cateti uguali rispettivamente al lato del quadrato e alla sua metà).

ANTM ≡ ABM-NBT ≡ (¼ - $^{1}/_{20}$) ABCD ≡ $^{4}/_{20}$ ABCD

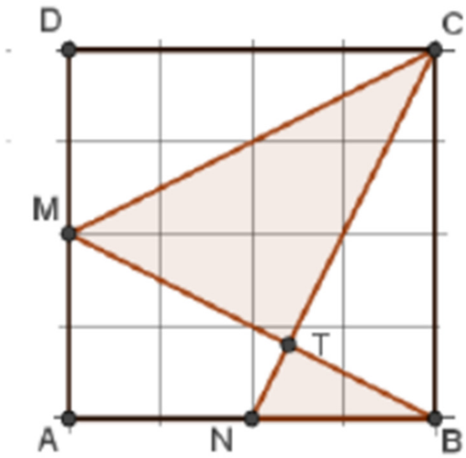
TBC = NBC-NBT ≡ (¼ -$^{1}/_{20}$) ABCD ≡ $^{4}/_{20}$ ABCD

MCD+TBC+ANTM ≡ (¼+$^{4}/_{20}$+$^{4}/_{20}$) ABCD ≡ $^{13}/_{20}$ ABCD

NBT+MTC ≡ (1 - $^{13}/_{20}$) ABCD=[7/20ABCD] [[e poiché ANTM+MCD+TBC è il complementare della superficie colorata si ha che]]: NTB+MTC rappresenta i $^{7}/_{20}$ del quadrato.



11) Soluzione inviata da Mario Busetti, 2D, Liceo B. Russell, indirizzo scientifico scienze applicate, Cles (TN)



IPOTESI

$ABCD$ composto da 16 quadrati

- N è il pt medio di AB
- M è il pt medio di DA

TESI

- rapporto tra le aree di $BTN + MTC$ e $ABCD$

DIMOSTRAZIONE

- considero il quadrato $ABCD$
  - poiché è composto da 16 quadrati consideriamo la sua area di 16
  - $l = \sqrt{A} = \sqrt{16} = 4$
- considero NBC e MDC
  - N è pt medio di AB quindi $AN \simeq NB = 2$
  - M è pt medio di AD quindi $DM \simeq MA = 2$
  - calcolo MC e NC
    - $NC = \sqrt{NB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ *applicando il teorema di Pitagora*
    - $MC = \sqrt{DM^2 + CD^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ *applicando il teorema di Pitagora*
    - $MB = \sqrt{MA^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ *applicando il teorema di Pitagora*
  - calcolo NT
    - $2^2 = 2\sqrt{5} \cdot NT$ [chi mi dice che BT è perpendicolare a TN ?]
    - $NT = \frac{4}{2\sqrt{5}}$ $\quad NT = \frac{4\sqrt{5}}{2 \cdot 5}$ $\quad NT = \frac{2}{5}\sqrt{5}$
    - per il 1° teorema di Euclide [era da dire prima]
  - calcolo TC
    - $2\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$ $\quad TC = \frac{8}{5}\sqrt{5}$
    - per sottrazione di segmenti [dire prima]
  - calcolo TB

  - $TB^2 = \frac{2}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{8}{5}\sqrt{5}$ $TB = \sqrt{\frac{16}{5}} = 4\sqrt{\frac{1}{5}}$ $TB = 4\sqrt{\frac{1}{5}}$
  - per 2° teorema di Euclide [dire prima]
- calcolo MT
  - $2\sqrt{5} - 4\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ $MT = \frac{6\sqrt{5}}{5}$
- dimostro che $MB \perp NC$ [anche questo era da fare prima]
  - rappresento la figura in un piano cartesiano [quale ?] e trovo le pendenze delle rette
  - calcolo la pendenza della retta passante per MB
    - $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4}$ $mMB = -\frac{1}{2}$
  - calcolo la pendenza della retta passante per NC
    - $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2}$ $mNC = 2$
  - $-\frac{1}{2}$ e 2 sono antireciproci → $MB \perp NC$
- calcolo le aree
  - calcolo l'area di NBT
    - $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{BT \cdot NT}{2}$
    - $4\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$ $A_{NBT} = \frac{4}{5}$
  - calcolo l'area di MTC
    - $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{TC \cdot TM}{2}$
    - $\frac{8}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{24}{5}$ $A_{MTC} = \frac{24}{5}$
  - calcolo la somma delle aree
    - $A_{TOT} = A_{NBT} + A_{MTC} = \frac{4}{5} + \frac{24}{5} = \frac{28}{5}$ $A_{TOT} = \frac{28}{5}$
- trovo il rapporto
  - $\frac{\frac{28}{5}}{16} = \frac{7}{20}$

CONCLUSIONE

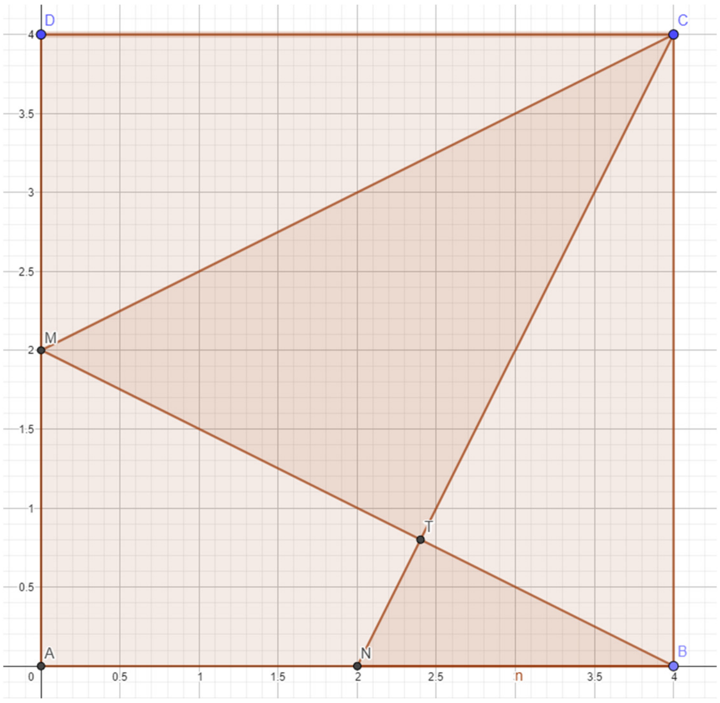
In conclusione il rapporto tra la somma delle aree dei triangoli e l'area del quadrato è di $\frac{7}{20}$.

[Molta confusione e varie imprecisioni]

12) Soluzione inviata da Roberi Chiara, 3^R, Istituto “Vasco Beccaria Govone”, Mondovì

Risoluzione del problema 9 – 30 gennaio 2023
Sappiamo che:
$A_{ABCD} = 16$
M è punto medio di AD
N è punto medio di AB
T è il punto di intersezione tra MB ed NC.

Inserisco la figura in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.



A(0;0)
B(4;0)
C(4;4)
D(0;4)

Pertanto, le coordinate di M ed N saranno rispettivamente:

$$M\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_D}{2} = 0 \\ y_M = \frac{y_A + y_D}{2} = 2 \end{cases} \qquad M(0;2)$$

$$N\begin{cases} x_N = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_N = \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \end{cases} \qquad N(2;0)$$

Dimostro che l’angolo MTC è rettangolo.
Affinché MTC sia rettangolo, i segmenti (che considererò come rette) MB ed NC devono essere perpendicolari. Deve quindi essere rispettata la seguente condizione:

$$m_{MB} = -\frac{1}{m_{NC}}$$

$$m_{MB} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{NC} = \frac{y_N - y_C}{x_N - x_C} = \frac{0-4}{2-4} = 2$$

I due coefficienti angolari rispettano la condizione di essere antireciproci, pertanto l’angolo MTC è retto.
Siccome MTC e NTB sono angoli opposti al vertice, anche NTB misura 90 gradi.
Considero ora i triangoli MTC ed NTB. Sono entrambi rettangoli in [[B]] [T], pertanto:

- TC è altezza di MTC rispetto a MT
- TB è altezza di NTB rispetto a NT

Per calcolare le aree dei due triangoli abbiamo bisogno della misura delle distanze di TC, MT, TB e NT.
Trovo quindi il punto T, sfruttando l’intersezione tra MB ed NC.

- Equazione di MB passante per B
  $m_{MB} = -\frac{1}{2}$ per calcoli precedenti
  [[B(0;4)]] [B(4;0)]

  $y - y_B = m_{MB}(x - x_B)$
  $y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 4)$
  $y = -\frac{1}{2}x + 2$
- Analogamente, equazione di NC passante per N
  $m_{NC} = 2$ per calcoli precedenti
  N(2;0)

  $y - y_N = m_{NC}(x - x_N)$
  $y - 0 = 2(x - 2)$
  $y = 2x - 4$

$$T\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$
$$T\begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 = 2x - 4 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$
$$T\begin{cases} x_T = \frac{12}{5} \\ y_T = 2 * \frac{12}{5} - 4 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Pertanto, $T(\frac{12}{5};\frac{4}{5})$.
Possiamo proseguire nel calcolo delle distanze MT, TC, NT, BT e dell'area dei rispettivi triangoli.

- Triangolo NTB

  $$NT = \sqrt{(x_N - x_T)^2 + (y_N - y_T)^2} = \sqrt{\left(2 - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

  Per procedimento analogo, otteniamo

  $$BT = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

  Possiamo quindi calcolare l'area del triangolo NTB

  $$A_{NTB} = NT * BT * \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} * \frac{4\sqrt{5}}{5} * \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$$

- Ripetiamo il procedimento analogamente per il triangolo MTC
  $MT = \frac{6\sqrt{5}}{5}$
  $TC = \frac{8\sqrt{5}}{5}$
  $A_{MTC} = MT * TC * \frac{1}{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} * \frac{8\sqrt{5}}{5} * \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$

La somma delle aree dei due triangoli sarà pertanto:

$$A_{NTB} + A_{MTC} = \frac{4}{5} + \frac{24}{5} = \frac{28}{5}$$

Ne consegue che il rapporto tra la somma delle aree dei due triangoli e l'area del quadrato è

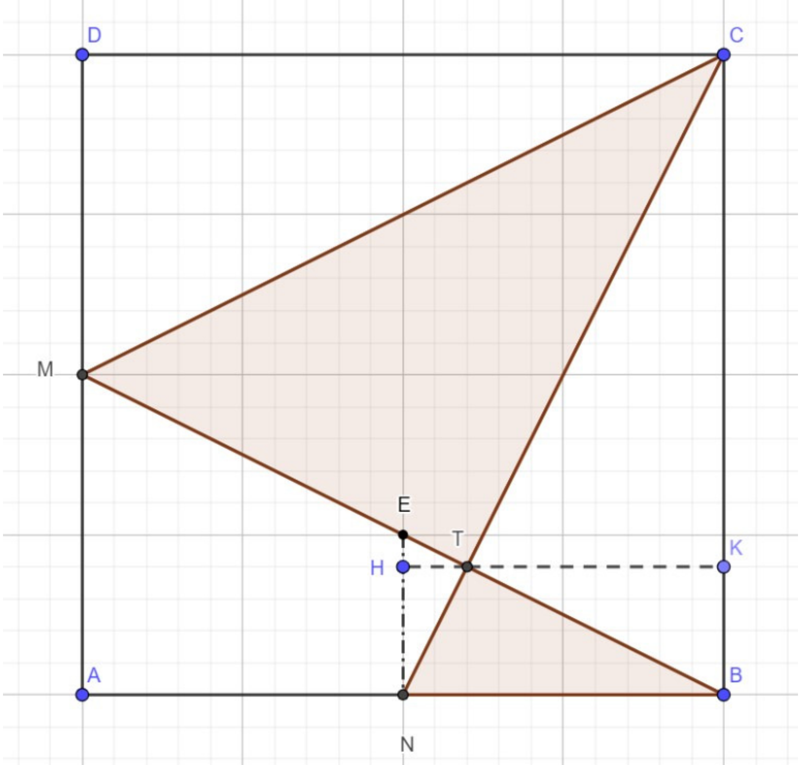
$$\frac{A_{NTB} + A_{MTC}}{A_{ABCD}} = \frac{28}{5} * \frac{1}{16} = \frac{28}{80} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Scrivendo la risposta sottoforma di proporzione otteniamo

$$(\boldsymbol{A_{NTB}} + \boldsymbol{A_{MTC}}) : \boldsymbol{A_{ABCD}} = \mathbf{7 : 20}$$

[varie imprecisioni]

13) Soluzione inviata dalla classe 3ABA-ITST-Marconi, Campobasso



$$\frac{A(BTN)+A(MTC)}{A(ABCD)}=\frac{A(ABCD)-A(MCD)-A(ANHM)-[A(TEN)+A(TBC)]}{A(ABCD)} \quad (*)$$

[invece di H ci vuole E]

Soluzione:

Si conduca da N la perpendicolare al lato AB fino ad incontrare il lato BM nel punto E (NE ∥BC)

Siano rispettivamente TH e TK le altezze dei triangoli TEN e TBC relative ai lati EN e BC
Risulta TH+TK=2
I triangoli TEN e TBC sono simili (nel rapporto 1÷4) [manca la motivazione] per il primo criterio di similitudine dei triangoli avendo gli angoli $E\hat{T}N = B\hat{T}C$ opposti al vertice e gli angoli $E\hat{N}T = T\hat{C}B$ alterni interni tra le rette parallele NE e BC tagliate dalla trasversale NC
Si ha

TH:TK=1:4
(TH+TK):TK=(1+4):4
2:TK=5:4
TK=8/5

Pertanto A(TBC)=(BC*TK)/2=4*(8/5)/2=16/5 e A(TEN)=A(TBC)/16=1/5
Sostituendo nella (*) si ha

$$\frac{A(BTN)+A(MTC)}{A(ABCD)}=\frac{16-4-3-\left[\frac{1}{5}+\frac{16}{5}\right]}{16}=\frac{7}{20}$$