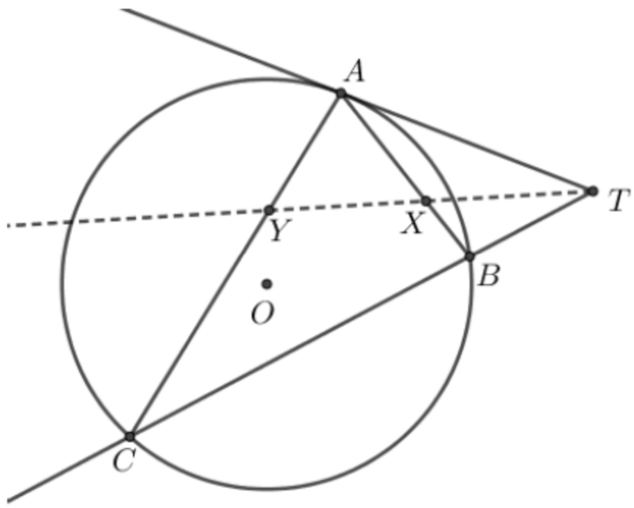
FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema – 3 - 24 novembre 2021 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

È data una circonferenza e da un punto esterno T è condotta una tangente TA (A punto di tangenza). Si conduca da T una secante la circonferenza (B e C i punti di intersezione con la circonferenza).
Provare che la bisettrice dell'angolo $A\widehat{T}B$ incontra i lati AB e AC del triangolo ABC nei punti X e Y, individuando un triangolo AXY isoscele.
Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto 22 risposte, prevalentemente da classi seconde e terze di Licei Scientifici, 10 di queste provenienti da una stessa classe.

Il problema poneva un quesito relativo ad una secante e a una tangente a una circonferenza condotte da un punto esterno e alla bisettrice dell'angolo da esse formato, chiedendo di dimostrare che un particolare triangolo risultava essere isoscele.

Le risposte arrivate sono tutte sostanzialmente corrette, con un buon uso soprattutto della proprietà relativa agli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.

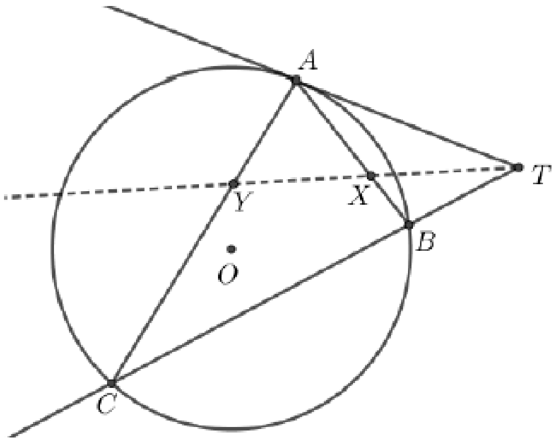
Dobbiamo però sottolineare ancora una volta che molte delle risposte giunte hanno una forma esageratamente "telegrafica" che a volte le rende quasi incomprensibili, soprattutto per un uso troppo spinto delle abbreviazioni (di cui non si vede l'utilità).

Sono pervenute risposte da studenti delle seguenti scuole:
-Liceo Scientifico “G. Rummo”, Benevento
-Liceo “Barsanti-Matteucci”, Viareggio (LU)
-Liceo “B. Russell”, Cles (TN)
-Liceo “Torricelli Ballardini”, Faenza (RA)
-Liceo Scientifico “A. Badoni”, Lecco
-Liceo Scientifico “Galileo Galilei”, Trieste
-Liceo Scientifico “Antonio Roiti”, Ferrara
Le riportiamo qui di seguito in ordine di arrivo.

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata da Aldo Coletta, classe 3^C, Liceo Scientifico Rummo, Benevento



Ipotesi:

- T punto esterno alla circonferenza di centro O
- A punto di tangenza tra la retta tangente TA e la circonferenza
- B punto di intersezione tra la retta secante TC e la circonferenza
- C punto di intersezione tra la retta secante TC e la circonferenza
- $\widehat{ATX} = \widehat{XTB}$
- X punto di intersezione tra la bisettrice dell'angolo ATC e il segmento AB
- Y punto di intersezione tra la bisettrice dell'angolo ATC e il segmento AC

Tesi: Il triangolo AYX è isoscele

Dimostrazione:
Definiamo $\widehat{ATX} = \alpha$
Per ipotesi, anche $\widehat{XTB} = \alpha$
Definiamo poi $\widehat{BAT} = \beta$
Poiché $\widehat{TCA}$ e $\widehat{BAT}$ sottendono lo stesso arco, hanno stessa ampiezza.
Nel triangolo TXA, essendo la somma deli angoli interni 180°, possiamo ricavare $\widehat{TXA} = 180° - \widehat{XTA} - \widehat{XAT} = 180° - \alpha - \beta$.
Nel triangolo TYC, essendo la somma deli angoli interni 180°, possiamo ricavare $\widehat{TYC} = 180° - \widehat{YTC} - \widehat{YCT} = 180° - \alpha - \beta$.
Essendo $\widehat{AYX}$ supplementare di $\widehat{XYC}$, allora $\widehat{AYX} = \alpha + \beta$.
Essendo $\widehat{YXA}$ supplementare di $\widehat{TXA}$, allora $\widehat{YXA} = \alpha + \beta$.
Avendo il triangolo AYX, gli angoli alla base congruenti, esso è isoscele.
In particolare $\overline{AY} = \overline{AX}$
C.V.D.

2) Soluzione inviata da Emanuela Guerrera, 2^C, Liceo Scientifico G. Rummo, Benevento

Ipotesi

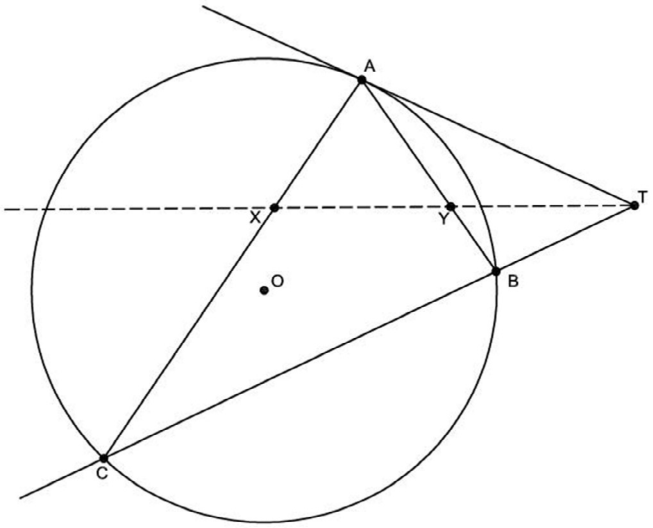
$\overline{TA} = Tangente$

$\overline{TC} = Secante$

$\widehat{ATY} \cong \widehat{BTY}$

Tesi

Triangolo AXY è Isoscele



- $\widehat{ACB} \cong \widehat{BAT}$ perché angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco AB
- $\widehat{CAT} = 180 - \widehat{ACB} - \widehat{ATC}$ e $\widehat{ABT} = 180 - \widehat{ATC} - \widehat{BAT}$ per cui $\widehat{CAT} \cong \widehat{ABT}$
- $\widehat{AXT} = 180 - \widehat{TAX} - \widehat{XTA}$ e $\widehat{BYT} = 180 - \widehat{YBT} - \widehat{YTB}$ poiché $\widehat{XTA} \cong \widehat{YTB}$ per ipotesi, allora abbiamo $\widehat{AXT} \cong \widehat{BYT}$
- $\widehat{AYX} \cong \widehat{BYT}$ perché opposti al vertice
- $\widehat{AYX} \cong \widehat{AXY}$

⇨ IL TRIANGOLO AXY È ISOSCELE *(cvd)*

3) Soluzione inviata da Barbato Giorgio, 2^C, Liceo Scientifico G. Rummo, Benevento

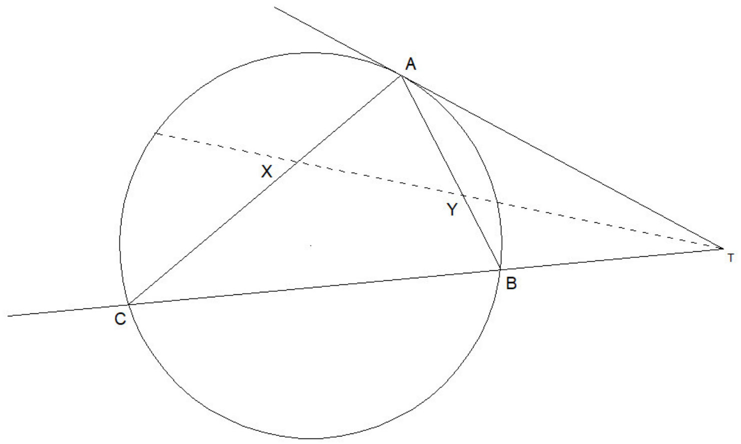
Ip.

- $\overline{TA}$= tangente alla circonferenza di centro O
- $\overline{TC}$= secante alla circonferenza di centro O
- $A\widehat{T}X \cong B\widehat{T}X$

Th.

- $AXY\Delta$ isoscele

○●



$\widehat{TBA} = B\widehat{A}C + B\widehat{C}A$ per il teorema dell'angolo esterno di un triangolo
$B\widehat{C}A \cong \widehat{BAT}$ perché angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco AB

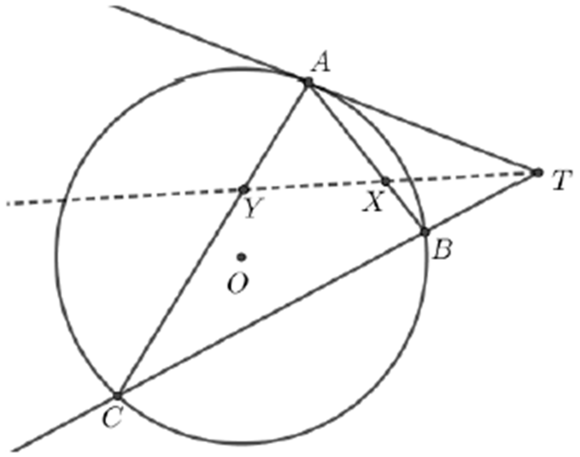
Considero $YTB\Delta$ e XAT Δ, essi hanno:

- $A\widehat{T}X \cong B\widehat{T}X$ per ipotesi
- $X\widehat{A}T \cong Y\widehat{B}T$ perché $X\widehat{A}T = \widehat{YAX} + \widehat{YAT} = \widehat{YBT}$ come dimostrato in precedenza

$\rightarrow T\widehat{Y}B \cong A\widehat{X}Y \rightarrow A\widehat{X}Y \cong A\widehat{Y}X$ [perché AYX=TYB in quanto angoli opposti al vertice].

$\rightarrow$ **$AXY\Delta$ isoscele su base $\overline{XY}$**

4) Soluzione inviata da Ilaria Righetti, 2ºBS, Liceo “Torricelli Ballardini”, Faenza (RA)



TÂB è un angolo alla circonferenza che insiste sull’arco AB. Anche AĈB è un angolo alla circonferenza che insiste sull’arco AB. Quindi TÂB≅AĈB perché angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco sono congruenti. L’angolo ATX è congruente all’angolo XTB per ipotesi.

L’angolo AYT è angolo esterno del triangolo CYT, quindi, per teorema (l’angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma degli angoli interni, ad esso non adiacenti), è congruente alla somma degli angoli YCT (≅TAB) e YTC (≅ATX).
L’angolo AXY è angolo esterno del triangolo AXT, quindi è congruente alla somma degli angoli TAX e ATX.

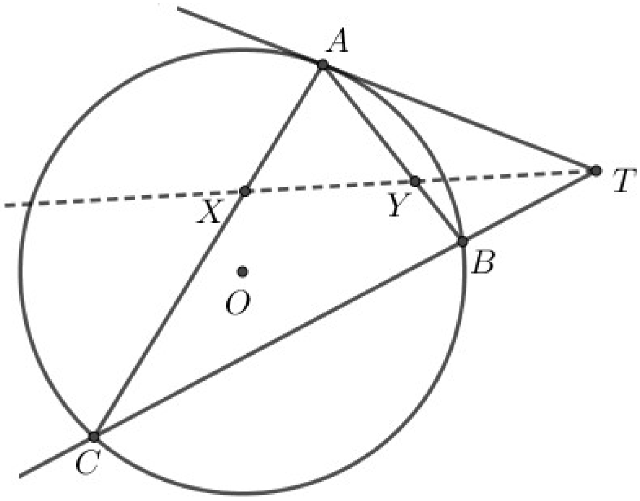
Gli angoli AYX e AXY sono congruenti perché somme di angoli congruenti (ACB≅TAB per dimostrazione precedente e YTB≅ATX per ipotesi).
Quindi per teorema inverso, avendo gli angoli alla base congruenti, il triangolo AYX è isoscele.

5) Soluzione inviata da Andrea Donato, Diego Colombo, Classe: 3^ Liceo Scientifico delle Scienze Applicate Sezione: A, IIS A. Badoni, Lecco

È data una circonferenza e da un punto esterno T è condotta una tangente TA (A punto di tangenza). Si conduca da T una secante la circonferenza (B e C i punti di intersezione con la circonferenza). Provare che la bisettrice dell'angolo ATB incontra i lati AB e AC del triangolo ABC nei punti X e Y, individuando un triangolo AXY isoscele.

Tesi:
Triangolo AXY isoscele

Dimostrazione:



Poniamo $A\hat{C}B = \beta$ e $A\hat{T}X = \alpha = B\hat{T}X$ (per ipotesi).

L'angolo $A\hat{C}B$ è un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda $\overline{AB}$.

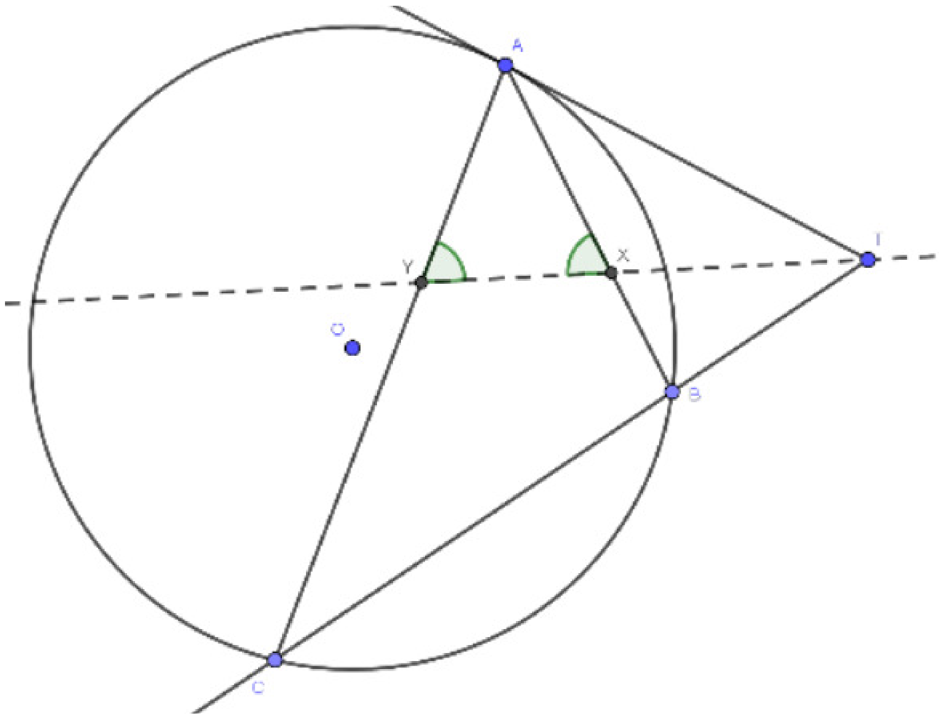
Gli angoli alla circonferenza $A\hat{C}B$ e $B\hat{A}T$ insistono sulla corda $\overline{AB}$ (l'angolo $B\hat{A}T$ è angolo limite alla circonferenza avente lati la corda stessa $\overline{AB}$ e la tangente $\overline{TA}$). Per questo motivo si ha che: $A\hat{C}B \cong B\hat{A}T = \beta$.

Consideriamo il triangolo YAT: l'angolo esterno $A\hat{Y}X$ è pari alla somma degli angoli, in questo caso $Y\hat{A}T$ e $Y\hat{T}A$, non adiacenti ad esso: $A\hat{Y}X = \beta + \alpha$ (1)

Consideriamo il triangolo CXT: l'angolo esterno $A\hat{X}T$ è pari alla somma degli angoli, in questo caso $X\hat{C}T$ e $X\hat{T}C$, non adiacenti ad esso: $A\hat{X}T = \beta + \alpha$ (2)

Consideriamo ora il triangolo AXY di base $\overline{XY}$. Per (1) e per (2) si ha che $A\hat{Y}X \cong A\hat{X}Y = \beta + \alpha$. Un triangolo avente gli angoli alla base congruenti è isoscele, quindi AXY è isoscele.

6) Soluzione inviata da Andreis Fabrizio, Classe 2D, Liceo Russell, Cles



Ipotesi: $A\hat{T}Y \cong Y\hat{T}C$ (per bisettrice)

Tesi: AXY è isoscele

[Mancano alcune ipotesi]

Dimostrazione:

$B\hat{C}A \cong B\hat{A}T$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB

$C\hat{Y}T \cong A\hat{X}T$

perché $C\hat{Y}T = 180° - Y\hat{T}C - B\hat{C}A$

$A\hat{X}T = 180° - A\hat{T}Y - B\hat{A}T$

dove $Y\hat{T}C \cong A\hat{T}Y$ *per (ipotesi)* $B\hat{C}A \cong B\hat{A}T$ *(sopra dimostrato)*

$A\hat{Y}X \cong A\hat{X}Y$

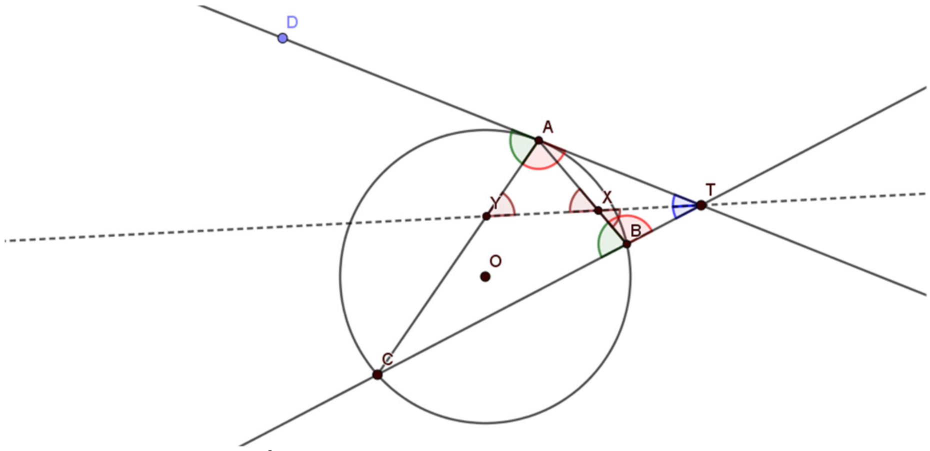
perché $A\hat{Y}X = 180° - C\hat{Y}T$ $A\hat{X}Y = 180° - A\hat{X}T$ *dove* $C\hat{Y}T \cong A\hat{X}T$ *(sopra dimostrato)*

Quindi il triangolo AXY è isoscele perché angoli alla base $A\hat{Y}X \cong A\hat{X}Y$ *congruenti*

[Non è facile fare la correzione ! Intanto (per ipotesi) ha la parentesi messa male, due righe più sotto ci vorrebbe una virgola tra i due angoli CYT e AXY e sull'ultima riga sarebbe meglio scrivere in un italiano più comprensibile "perché gli angoli alla base AYX e AXY sono congruenti"]

7) Soluzione inviata da Anastasia Timis, Classe 2D, Liceo Scientifico Scienze Applicate "Bertrand Russell", Cles (TN)

Ipotesi:
- f retta tangente (A punto di tangenza),



- $\overline{TY}$ bisettrice dell'angolo $A\hat{T}B$.

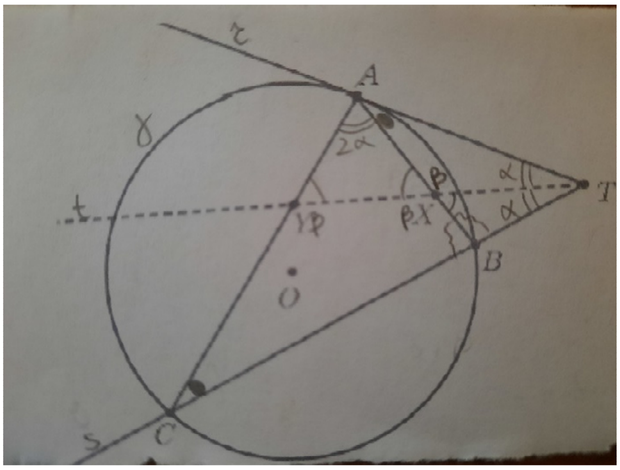
Tesi:
Il triangolo AXY è isoscele.

Dimostrazione:
Considero i 2 triangoli XBT e AYT;
Essi hanno:
- $X\hat{T}B \cong Y\hat{T}A$ perché $\overline{TY}$ bisettrice dell'angolo $A\hat{T}B$ per ipotesi;
- $X\hat{B}T \cong Y\hat{A}T$ per differenza di angoli $\cong$ ($D\hat{A}C \cong C\hat{B}A$ perché sottendono lo stesso arco) quindi;
gli angoli piatti $D\hat{A}T$ e $C\hat{B}T$ = 180° quindi;
180° ($C\hat{B}T$) - $C\hat{B}A$ = $X\hat{B}T$;
180° ($D\hat{A}T$) - $D\hat{A}C$ = $Y\hat{A}T$;
Quindi $X\hat{B}T \cong Y\hat{A}T$ per differenza di angoli $\cong$ ($D\hat{A}C \cong C\hat{B}A$);

Infine:
$A\hat{Y}T \cong B\hat{X}T$ perché;
180°(somma angoli interni triangolo XBT) - $X\hat{T}B$ - $X\hat{B}T$ = $B\hat{X}T$;
180°(somma angoli interni triangolo AYT) - $Y\hat{T}A$ - $Y\hat{A}T$ = $A\hat{Y}T$;
quindi i due angoli $B\hat{X}T$ e $A\hat{Y}T$ sono $\cong$ per differenza di angoli $\cong$;

$A\hat{X}Y \cong B\hat{X}T$ perché angoli opposti al vertice;
quindi $A\hat{Y}T \cong A\hat{X}Y$ perché $B\hat{X}T \cong A\hat{Y}T$ per dimostrazione precedente;
quindi il triangolo AXY è isoscele perché gli angoli alla base ($A\hat{Y}X$ e $A\hat{X}Y$) sono $\cong$

8) Soluzione inviata da Sofia Scala, classe 3D, Liceo Barsanti e Matteucci, Viareggio (LU)



HP. Y:Circ. di centro o
T non appartiene Y
T appartiene r
r ∩ y=A
s ∩ y=C,B
T appartiene s

TH.
AXY=tr isoscele

Dim: angolo AXT = YXB =β perché opposti al vertice
Considero i triangoli AXT e CYT ;essi hanno:
Angolo YCT =XAT perché angoli alla circonferenza che insistono su AB(arco)
Angolo CTY =ATX =α per hp
Segue che i 2 triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine, di conseguenza
[[Angolo AXT = YXB= CYT=β per proprietà transitiva]][AXT=CYT= β e quindi CYT=YXB per proprietà transitiva]
Poiché angolo AYX=180-β
angoloAXY=180-β
I 2 angoli sono congruenti segue che AXY è un triangolo isoscele perché ha gli angoli alla base congruenti
[Sarebbe opportuno usare un linguaggio meno telegrafico !!!]

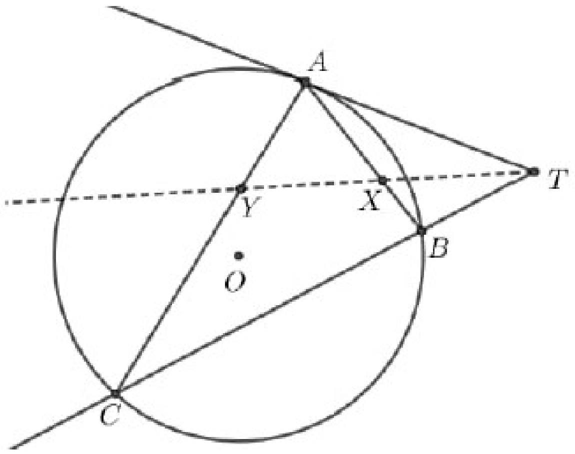
9) Soluzione inviata da Bianca del Bucchia, classe 2º, sezione E, liceo scientifico Barsanti e Matteucci, Viareggio (LU)

Ipotesi

γ è una circonferenza di centro O
$OT >$ del raggio della circonferenza γ, di conseguenza [T] è esterno
t è [[la]] tangente alla circonferenza γ
$t \cap \gamma = A$
B, C appartengono alla circonferenza γ
C, B, T sono allineati
r è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ATC}$
$r \cap AB = X$
$r \cap AC = Y$

Tesi

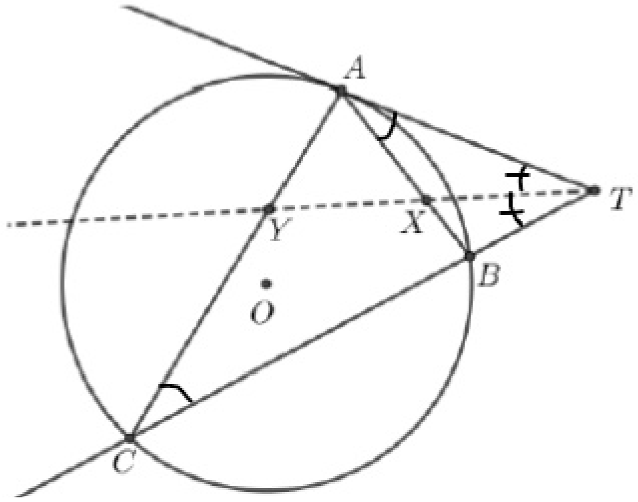
Il triangolo AYX è isoscele



Dimostrazione

Chiamiamo β l'angolo $\widehat{ATY}$
$\widehat{ATY} \cong \widehat{YTC} = \beta$ [[perché]] [per ipotesi]
Chiamiamo α l'angolo $\widehat{ACB}$
$\widehat{BAT} \cong \widehat{ACB} = \alpha$ perché $\widehat{BAT}$ e $\widehat{ACB}$ sono due angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB
$\widehat{AXT} = 180° - \alpha - \beta$ perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° e, come detto in precedenza, $\widehat{XAT} = \alpha$ e $\widehat{ATY} = \beta$
Perciò $\widehat{YXA} = 180° - (180° - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$ visto che è il supplementare dell'angolo $\widehat{AXT}$
$\widehat{CYT} = 180° - \alpha - \beta$ perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° e, come detto in precedenza, $\widehat{YCT} = \alpha$ e $\widehat{YTC} = \beta$
Perciò $\widehat{AYT} = 180° - (180° - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$ visto che è il supplementare dell'angolo $\widehat{CYT}$
Da ciò ricaviamo che $\widehat{AYT} \cong \widehat{AXY}$ perché, come dimostrato, sono entrambi dati dalla somma $\alpha + \beta$, e dato che sono due angoli [del] triangolo AXT, riconducendoci al teorema inverso del triangolo isoscele, deduciamo che quest'ultimo sia isoscele su base YX

10) Soluzione inviata da Giulia della Porta, 2A, LS Galileo Galilei, Trieste



Ipotesi:

- cfr. con centro O
- da T la secante interseca la cfr in B e C
- TA è tangente la crf in A
- ΔABC
- la bisettrice $A\hat{T}C$ interseca AC e AB in Y e X $\Rightarrow$ $A\hat{T}Y \cong Y\hat{T}C \cong \frac{1}{2}A\hat{T}C$

Tesi:

- ΔAXY *isoscele*

Dimostrazione:

1) In una cfr. gli angoli alla cfr. che insistono sullo stesso arco sono congruenti, in questo caso quindi $A\hat{C}B \cong B\hat{A}T$, perché entrambi insistono sull'arco AB.

2) La bisettrice T taglia $A\hat{T}B$ tale che $A\hat{T}Y \cong Y\hat{T}C \cong \frac{1}{2}A\hat{T}C$ per ipotesi.

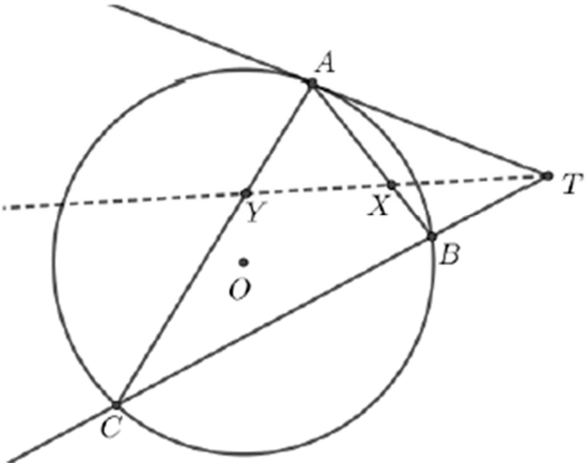
3) Considero i ΔAXT e ΔCYT, essi hanno $A\hat{C}T \cong X\hat{A}T$ per osservazione 1 e $A\hat{T}X \cong Y\hat{T}C$ per osservazione 2. Hanno dunque tutti gli angoli rispettivamente congruenti.

4) Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°:
a) $A\hat{X}T = 180° - (X\hat{A}T + X\hat{T}A)$
b) $C\hat{Y}T = 180° - (Y\hat{C}T + Y\hat{T}C)$
ma $X\hat{A}T \cong Y\hat{C}T$ e $X\hat{T}A \cong Y\hat{T}C$ allora per la proprietà transitiva:
$A\hat{X}T \cong 180° - (X\hat{A}T + X\hat{T}A) \cong C\hat{Y}T \cong 180° - (Y\hat{C}T + Y\hat{T}C)$ [secondo logica bisogna invertire CYT con 180-(YCT+YTC) nell'ultima congruenza] quindi $A\hat{X}T \cong C\hat{Y}T$

5) Osservo che: $A\hat{X}T$ *e* $A\hat{X}Y$ sono adiacenti quindi: $A\hat{X}Y \cong$ 180°- $A\hat{X}T$.
Noto che anche $C\hat{Y}T$ *e* $A\hat{Y}X$ sono adiacenti quindi: $A\hat{Y}X \cong$ 180°- $C\hat{Y}T$ ma $A\hat{X}T \cong C\hat{Y}T$ per osservazione 4, quindi per la proprietà transitiva $A\hat{X}Y \cong A\hat{Y}X$.

6) Considero il ΔAXY, esso ha due angoli congruenti ($A\hat{X}Y \cong A\hat{Y}X$), per il teorema inverso del triangolo isoscele è isoscele. c.v.d

11) Soluzione inviata da Filippo Belletato 1R   Liceo Scientifico Antonio Roiti Ferrara



L'obiettivo del problema è quello di dimostrare che il triangolo AYX è isoscele.
Per definizione un triangolo è isoscele quando ha due lati [(o due angoli congruenti)], quindi per dimostrare che il triangolo AYX è isoscele proveremo a dimostrare che gli angoli $A\hat{Y}X$ e $A\hat{X}Y$ sono congruenti.
All'interno della dimostrazione useremo la somma degli angoli interni di un triangolo.
Prenderemo in esame in particolare il triangolo TAX e il triangolo CYT e i rispettivi angoli $C\hat{Y}T$ e $T\hat{X}A$.
L'ampiezza di questi angoli è data dalle seguenti formule:
$C\hat{Y}T = 180° - T\hat{C}Y - C\hat{T}Y$
$T\hat{X}A = 180° - T\hat{A}X - X\hat{T}A$
Gli angoli $C\hat{T}Y$ e $X\hat{T}A$ sono congruenti poiché sono frutto di un angolo diviso a metà da una bisettrice, indicheremo questi due angoli convenzionalmente con il simbolo α.
Inoltre l'angolo $T\hat{C}Y$ è uguale all'angolo $T\hat{A}B$, poiché angoli alla circonferenza che insistono sul medesimo arco AB: il secondo angolo è la posizione limite formata dalla corda e dalla tangente, difatti l'angolo formato da una corda, che insiste su un arco AB, e una retta tangente rispetto al punto A è uguale all'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco AB.

Inoltre l'angolo $T\hat{A}B$ è uguale all'angolo $T\hat{A}X$, di conseguenza possiamo affermare che:

$$T\hat{A}X = T\hat{C}Y$$

Questi due angoli verranno indicati convenzionalmente con il simbolo β.
Otteniamo quindi che:
$C\hat{Y}T = 180° - \alpha - \beta$
$T\hat{X}A = 180° - \alpha - \beta$
Possiamo dunque affermare che $C\hat{Y}T = T\hat{X}A$
Di conseguenza sono uguali anche i rispettivi angoli [adiacenti] (in quanto supplementari)], quindi:

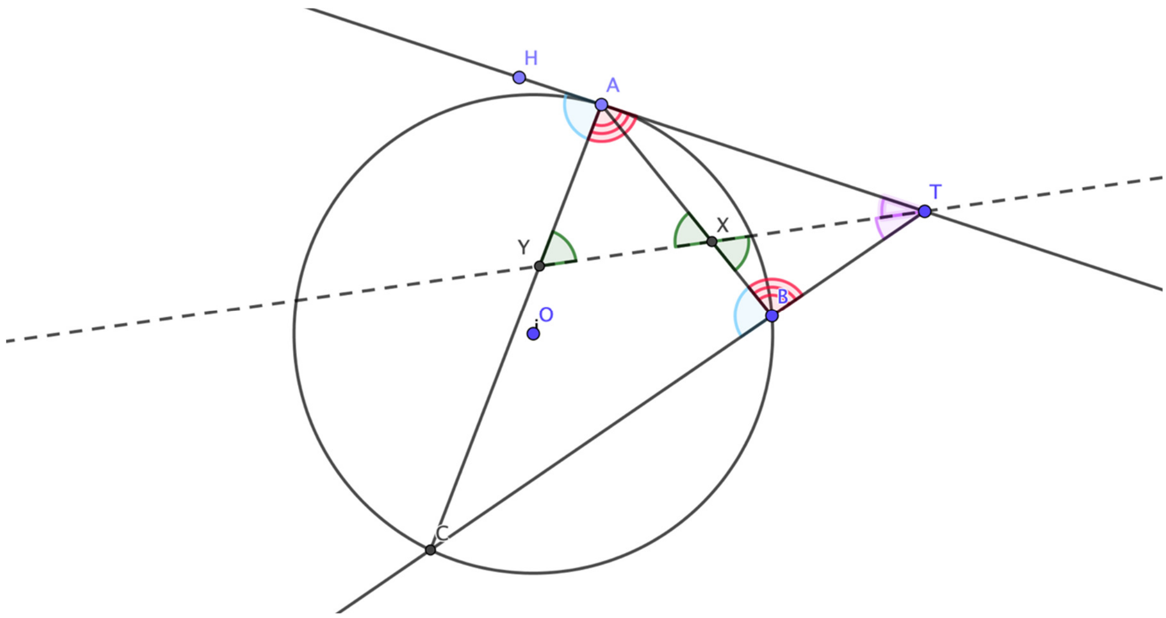
$$A\hat{Y}X = A\hat{X}Y$$

Avendo dimostrato che due angoli del triangolo AXY sono congruenti, possiamo affermare che quest'ultimo triangolo è isoscele.
[sistemare l'indicazione degli angoli]

12) Soluzione inviata da Sherman-Hartman-2D-Scienze Applicate- Liceo Russell-Cles

IPOTESI:
-TC è una retta secante alla circonferenza;
-TY è la bisettrice dell'angolo ATB;
-TA è una retta tangente alla circonferenza;

TESI:
-Il triangolo AXY è isoscele;



DIMOSTRAZIONE:

Angolo CBA è congruente all'angolo HAC, poiché sono angoli alla circonferenza che sottendono uno stesso arco;

Considero ora il triangolo AYT e il triangolo XBT, essi hanno:

- ATY (angolo) è congruente a XTB (angolo) poiché l' angolo ATB è diviso da una bisettrice (TY);
-YAT(angolo) è congruente a XBT(angolo), per differenza di angoli congruenti [[perciò]]:
[[180°-(HAC/CBA)]] [180°-HAC e 180°-CBA]

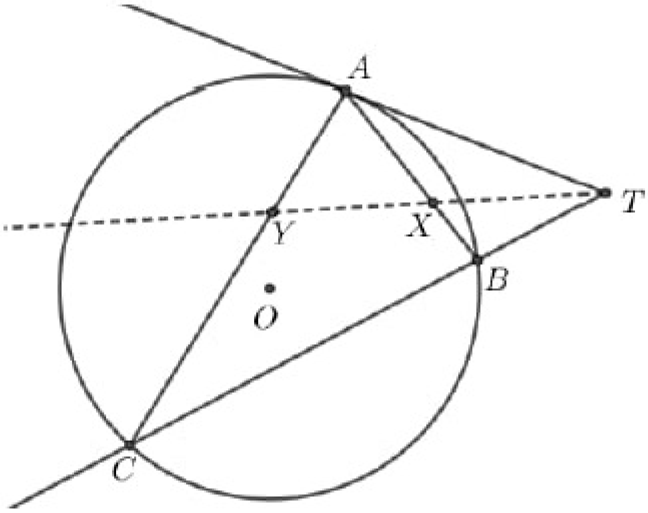
ANGOLO AYX= 180°- (ATY(angolo)+ YAT(angolo))

ANGOLO BXT= 180°- (XTB(angolo)+XBT(angolo))

Conclusione:
Dato che l'angolo ATY è congruente all'angolo XTB e l'angolo YAT è congruente all'angolo XBT [[e per questo riesco a capire che]] anche AYX(angolo) e BXT(angolo) sono congruenti.

Quindi sapendo anche che l'angolo BXT e l'angolo AXY, sono [congruenti in quanto] angoli opposti al vertice, si è così dimostrata la tesi, confermando che il triangolo YAX è isoscele.

13) Soluzione inviata da EDOARDO DI MANNO, 2°E, LICEO SCIENTIFICO BARSANTI E MATTEUCCI, VIAREGGIO (LU)



Tesi:
AYX triangolo isoscele

Dimostrazione:
Chiamo l'angolo $\widehat{BAT}$: α, e gli angoli $\widehat{ATY}$ e $\widehat{YTB}$: β

L'angolo $\widehat{ACB}$ è congruente ad α perché gli angoli $\widehat{\mathrm{ACB}}$ e $\widehat{\mathrm{BAT}}$ sono angoli alla circonferenza corrispondenti ad uno stesso arco AB.

L'angolo $\widehat{TYC}$ è congruente a: π-α-β per differenza di angoli nel triangolo TYC.

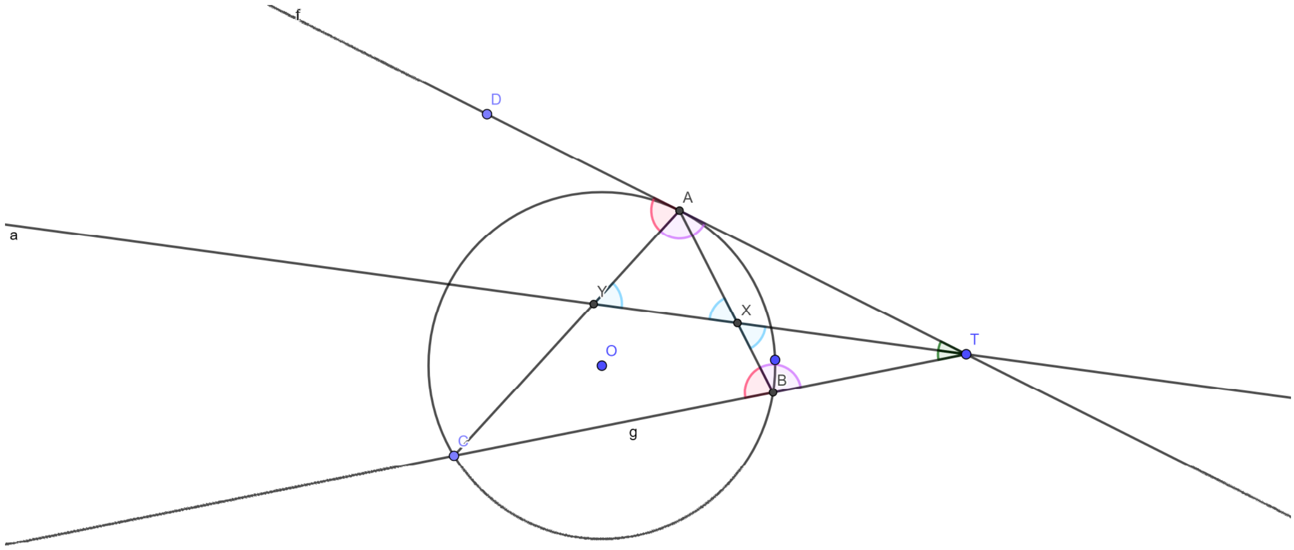
L'angolo $\widehat{AYX}$ è congruente a: α+β perché supplementare di $\widehat{TYC}$.

L'angolo $\widehat{AXT}$ è congruente a: π-α-β per differenza di angoli nel triangolo AXT.

L'angolo $\widehat{AXY}$ è congruente a: α+β perché supplementare di $\widehat{AXT}$.

Quindi il triangolo AYX è isoscele per il teorema inverso del triangolo isoscele, poiché $\widehat{AYX} \cong \widehat{AXY}$.

14) Soluzione inviata da Ginevra Sartori – 2D – liceo Russell – Cles (TN)



IPOTESI:

- circonferenza con centro O;
- punto T esterno alla circonferenza;
- 'f'=retta tangente uscente da T;
- 'a'= bisettrice dell'angolo ATC .

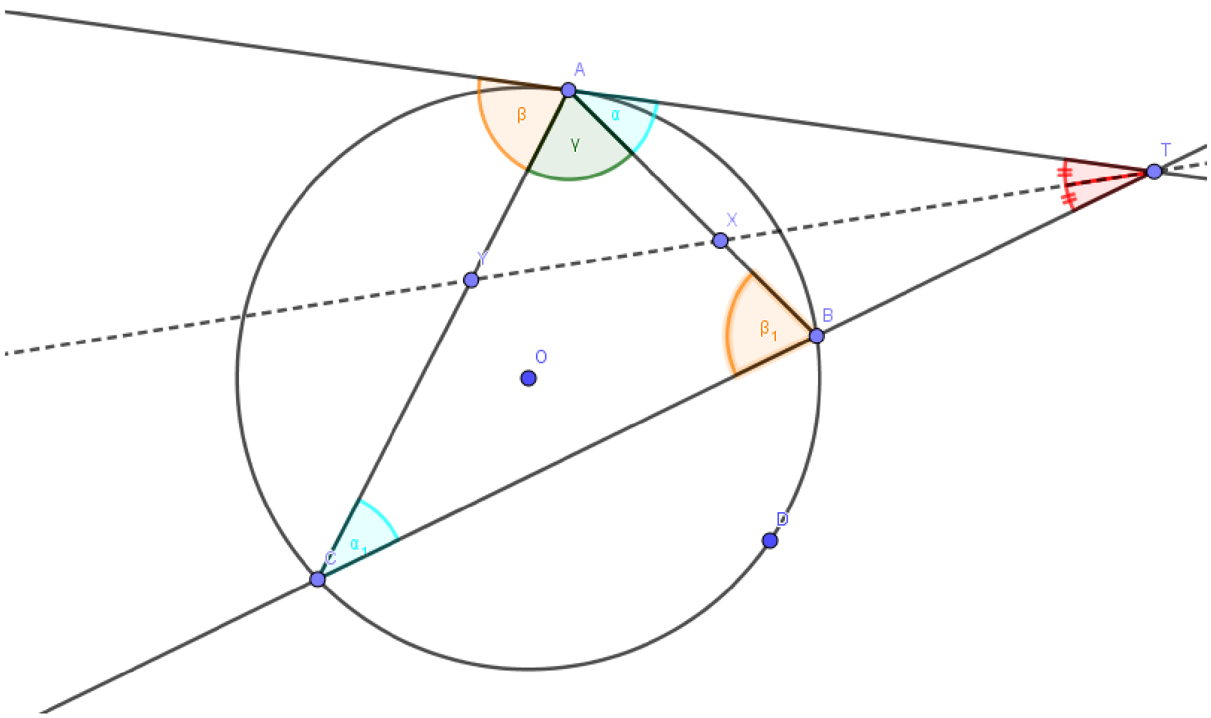
TESI:

- il triangolo [AYX] [[AYB]] è isoscele.

DIMOSTRAZIONE:

- Considero gli angoli: DAC e CBA: essi sono congruenti perché sottendono lo stesso arco AC;
  ==> gli angoli YAT e TBX sono congruenti per differenza di angoli congruenti (YAT=180°-DAY e TBX=180°-XBC);
- Considero gli angoli: BXT e AXY: essi sono congruenti perché opposti al vertice;
- Considero gli angoli: ATX e XTB: essi sono congruenti perché sono le due metà dell'angolo ATB, che è tagliato dalla bisettrice 'a';
- Considero l'angolo AYT. Questo è : 180°-[(YAT= TBX)+(ATY= XTB)] [uso delle parentesi, bisogna aggiungere due parentesi quadre];
- Considero l'angolo BXT che è: 180°-[(TBX=YAT)+(XTB= ATX)] [stesso discorso di prima]
  ==> i due angoli AYT e BXT sono congruenti per differenza di angoli congruenti
  ==> il triangolo AXY è isoscele per proprietà (= se i due angoli alla base sono congruenti allora il triangolo è isoscele).

15) Soluzione inviata da Lisa Paternoster, 2D, Liceo scientifico-scienze applicate B. Russell Cles (TN)



Ipotesi:
AT tangente in A
TY bisettrice $A\hat{T}B$
Tesi:
AXY isoscele.

Dimostrazione:
$\alpha \cong \alpha_1$ perché sono angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco (AB)
$\beta \cong \beta_1$ perché sono angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco (AC)

$$X\hat{T}B \cong X\hat{T}A = \frac{180° - (\alpha + \alpha_1 + \gamma)}{2} = 90° - \alpha - \frac{1}{2}\gamma$$

$$C\hat{Y}T = 180° - (\alpha + 90° - \alpha - \frac{1}{2}\gamma) = 90° + \frac{1}{2}\gamma$$

$$T\hat{X}B = 180° - \left([[\beta]][\alpha] + \gamma + 90° - \alpha - \frac{1}{2}\gamma\right) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$$

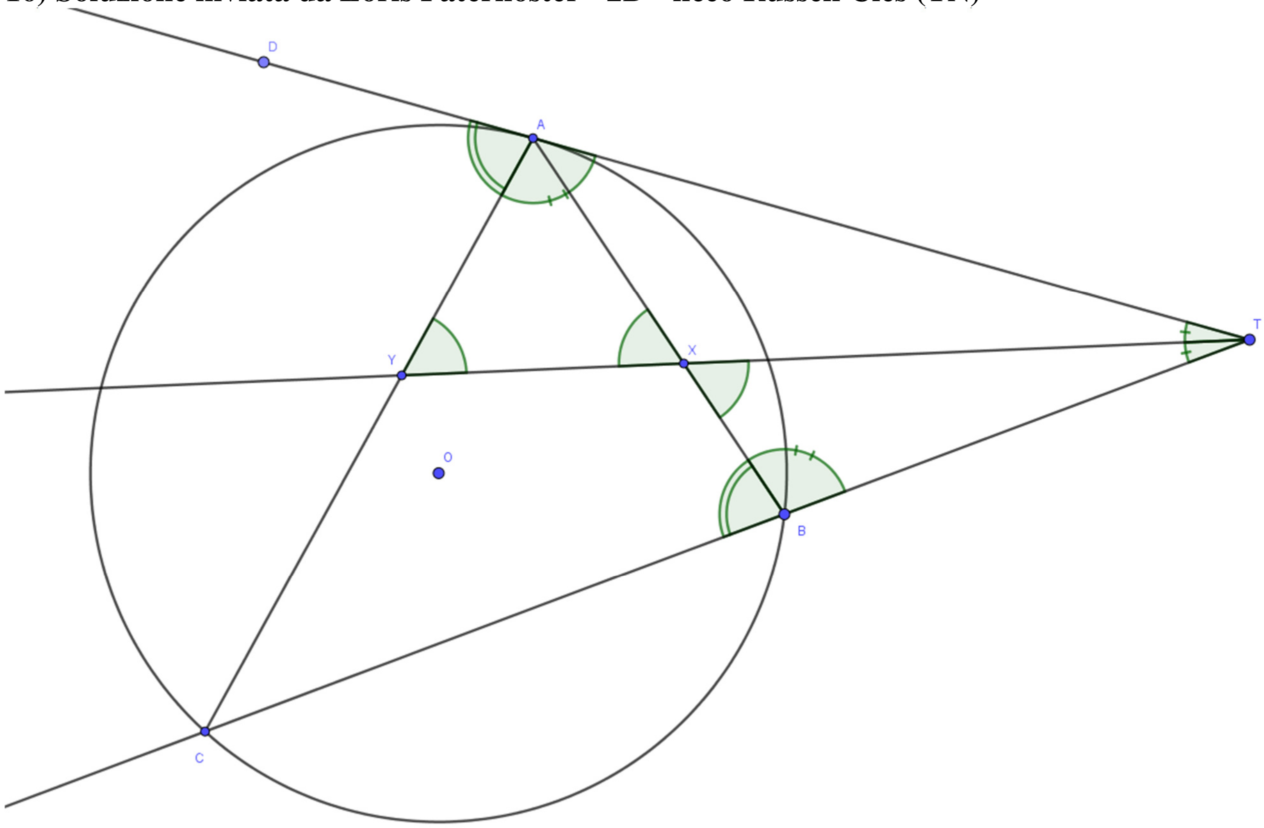
$$A\hat{X}Y = [T\hat{X}B] = 90° - \frac{1}{2}\gamma \; perché \; opposti \; al \; vertice$$

$$A\hat{Y}X = 180° - (90° + \frac{1}{2}\gamma) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$$

$$quindi \; A\hat{Y}X \cong Y\hat{X}A$$

Quindi il triangolo AXY è isoscele, perché ha gli angoli alla base congruenti

16) Soluzione inviata da Loris Paternoster - 2D - liceo Russell Cles (TN)



IPOTESI:

- TA → tangente alla circonferenza
- TX → bisettrice dell'angolo $A\hat{T}B$

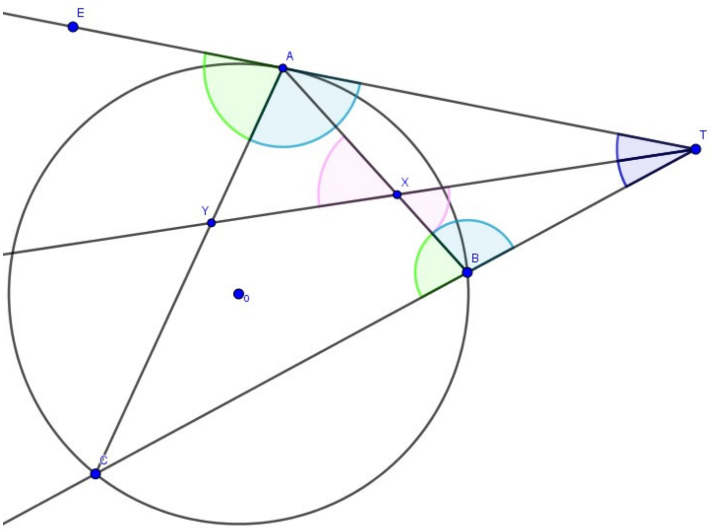
TESI: AYX isoscele

DIMOSTRAZIONE:

$D\hat{A}Y \cong C\hat{B}X$ *perchè sottendono lo stesso arco* AC,
quindi $X\hat{B}T \cong Y\hat{A}T$ *per differenza di angoli congruenti*,
infatti $X\hat{B}T = 180° - C\hat{B}X,\ Y\hat{A}T = 180° - D\hat{A}Y$ *e dato che* $D\hat{A}Y \cong C\hat{B}X$ *anche* $X\hat{B}T \cong Y\hat{A}T$.
$B\hat{T}X \cong X\hat{T}A$ *perchè sono angoli divisi dalla bisettrice* TX.
$B\hat{X}T \cong Y\hat{X}A$ *perchè sono angoli opposti al vertice*.
$X\hat{B}T + B\hat{T}X + B\hat{X}T = 180°$ *perchè sono i tre angoli interni del triangolo* XBT,
quindi $A\hat{Y}T = 180° - \left(Y\hat{A}T + A\hat{T}Y\right)$,
quindi $A\hat{Y}T = B\hat{X}T$, *perchè entrambi sono* $180° - ((Y\hat{A}T \cong X\hat{B}T) + (A\hat{T}Y \cong X\hat{B}T))$
quindi $X\hat{Y}A \cong Y\hat{X}A$,
quindi il triangolo AYX *è isoscele perchè ha gli angoli alla base congruenti*.

17) Soluzione inviata da Elena Pangrazzi 2D Liceo Russell Cles (TN)

IPOTESI:
T punto esterno
- TA tangente
- A punto di tangenza
- TC semiretta secante
- B e C punti di intersezioni della semiretta secante con la circonferenza
- TX bisettrice dell'angolo A$\hat{T}$B
- ABC triangolo
- X e Y punti di intersezione tra la bisettrice e i lati del triangolo ABC



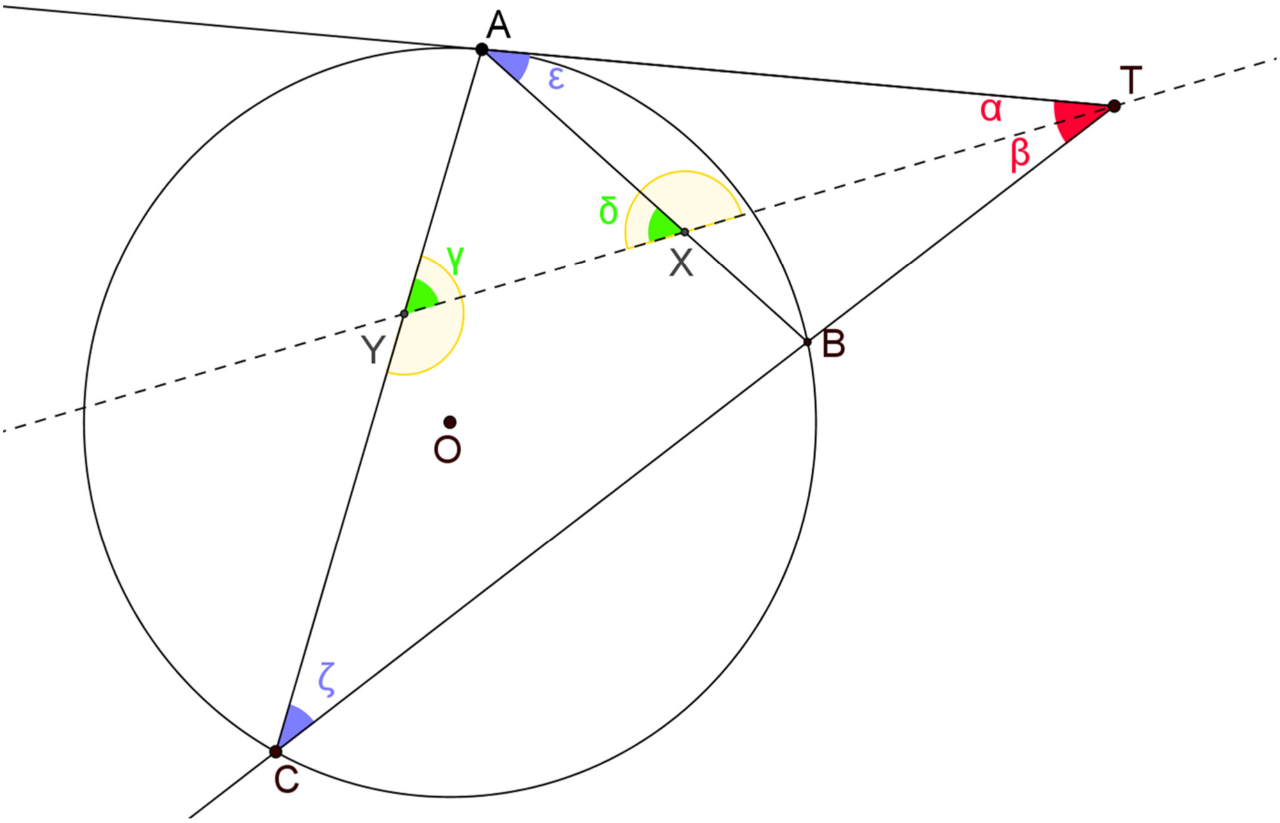
TESI: il triangolo AXY è isoscele.
DIMOSTRAZIONE:
- E$\hat{A}$Y≅X$\hat{B}$C perché [angoli alla circonferenza che] sottendono lo stesso arco
- Y$\hat{A}$T≅X$\hat{B}$T perché [[sono entrambi]] [Y$\hat{A}$T≅180-E$\hat{A}$Y e X$\hat{B}$T≅180-X$\hat{B}$C]
- X$\hat{T}$B≅X$\hat{T}$A perché due metà dell'angolo A$\hat{T}$B
- $T\hat{X}$B≅A$\hat{X}$Y perché opposti al vertice
- X$\hat{B}$T+ $T\hat{X}$B +X$\hat{T}$B=180° perché angoli interni di un triangolo
- A$\hat{Y}$T=180- (X$\hat{T}$A+ Y$\hat{A}$T)
- A$\hat{Y}$T= $T\hat{X}$B [perche' ?]
- $A\hat{X}Y$ ≅A$\hat{Y}$X perché entrambi congruenti all'angolo $T\hat{X}$B

  Il triangolo AXY è quindi isoscele perché ha gli angoli alla base congruenti.

[Soluzione un po' tirata via !]

18) Soluzione inviata da Samuele Endrizzi – 2^D – Liceo Scienze Applicate – Liceo "B.Russell" – Cles(TN)

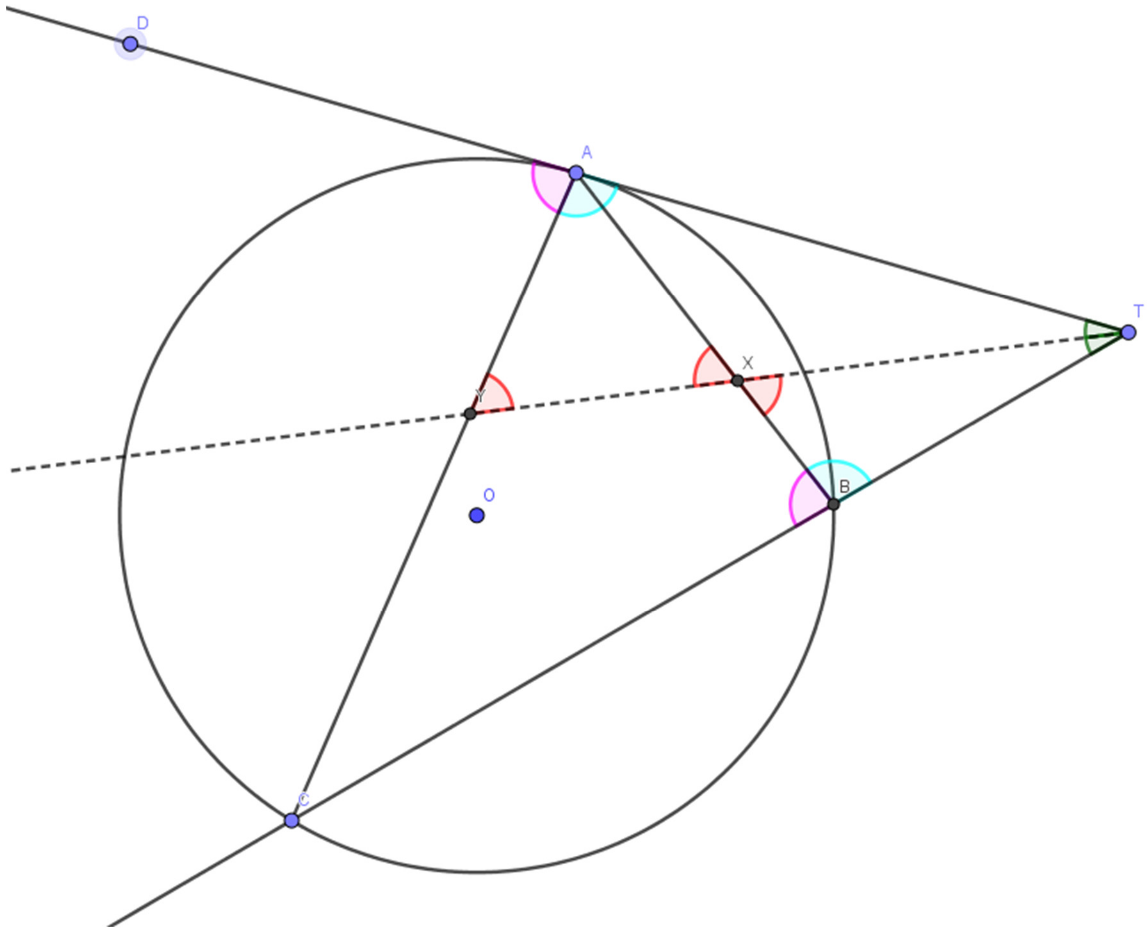
1. Considero $\zeta \equiv \varepsilon$, perché sottendono lo stesso arco che parte da A e termina in B;
2. Considero $\alpha \equiv \beta$ per ipotesi;
3. Considero $A\hat{X}T$= 180°- ε - α , per [il] teorema [sulla somma] degli angoli



interni di un triangolo;

4. Considero δ = 180°- (180°- ε - α) = ε + α, perché è presente un angolo piatto sul segmento $\overline{TY}$ (nel punto X);
5. Considero $C\hat{Y}T$= 180° - ζ – β, per teorema degli angoli interni di un triangolo;
6. Considero γ = 180° - (180° - ζ - β) = ζ + β, perché è presente un angolo piatto sul segmento $\overline{CA}$ (nel punto Y);
7. Dato che $\zeta \equiv \varepsilon$e $\alpha \equiv \beta$, γ e δ sono congruenti.
8. Dato che $\gamma \equiv \delta$, il triangolo AXY è isoscele.

19) Soluzione inviata da Mattia Rosatti – 2C, Liceo Bertrand Russell – Cles (TN)



Dimostrazione:

AXY(ang.) ≅ BXT(ang.) perché sono opposti al vertice.
BTX(ang.) ≅ XTA(ang.) perché l'angolo è tagliato a metà dalla bisettrice.
ABC(ang.) ≅ CAD(ang.) perché [angoli alla circonferenza che] sottendono lo stesso arco.
CAT(ang.) ≅ ABT(ang.) perché uno è 180-ABC(ang.) e l'altro è 180-CAD(ang.) e sapendo che ABC(ang.) e CAD(ang.) sono ≅ allora i due angoli sono ≅.

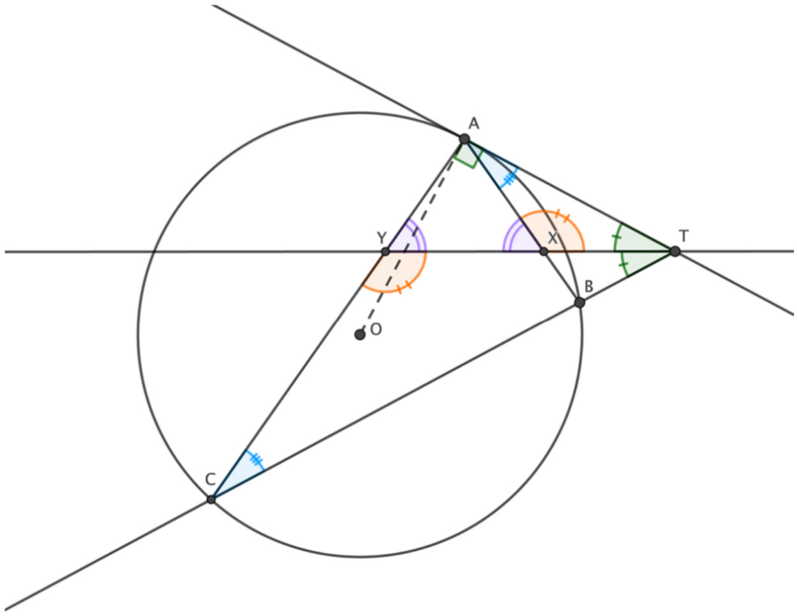
AYT(ang.) ≅ BXT(ang.) dato che i triangoli AYT [[(ang.)]] e XBT [[(ang.)]] hanno già due [[lati ≅allora il terzo è uguale.]] [angoli congruenti anche i terzi angoli sono congruenti].

Sapendo che l'angolo BXT[[(ang.)]] è congruente sia all'angolo AYX [[(ang.)]] che all'angolo AXY[[(ang.)]] allora si può dire che il triangolo AYX [[(ang.)]] è isoscele perché ha due angoli ≅ .

[Troppo telegrafico !!!]

20) Soluzione inviata da Seppi Davide (2D), Liceo "Bertrand Russell", Cles (TN)

Ipotesi: AT tangente, YT bisettrice di $A\hat{T}C$.



Tesi: il triangolo AXY è isoscele.

Considero gli angoli $A\hat{C}B$ e $B\hat{A}T$:

essi sono due angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco AB ($B\hat{A}T$ è un angolo alla circonferenza perché AT tangente in A per ipotesi);

$\Longrightarrow$ i due angoli sono $\cong$.

Considero gli angoli $C\hat{Y}T$ e $A\hat{X}T$:

$C\hat{Y}T \cong 180°-(Y\hat{C}T+Y\hat{T}C)$ (180° perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°);

$A\hat{X}T \cong 180°-(A\hat{T}X+X\hat{A}T)$ (180° perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°);

con $A\hat{C}T \cong X\hat{A}T$ (per dimostrazione precedente) e con $A\hat{T}Y \cong Y\hat{T}C$ (per ipotesi);

$\Longrightarrow$ i due angoli sono $\cong$ (perché $\cong$ a 180° - 2 angoli $\cong$).

Considero gli angoli $A\hat{Y}X$ e $A\hat{X}Y$:

$A\hat{Y}X \cong 180°-C\hat{Y}T$ (perché angoli adiacenti per costruzione);

$A\hat{X}Y \cong 180°-A\hat{X}T$ (perché angoli adiacenti per costruzione);

con $C\widehat{Y}T \cong A\widehat{X}T$ (per dimostrazione precedente);

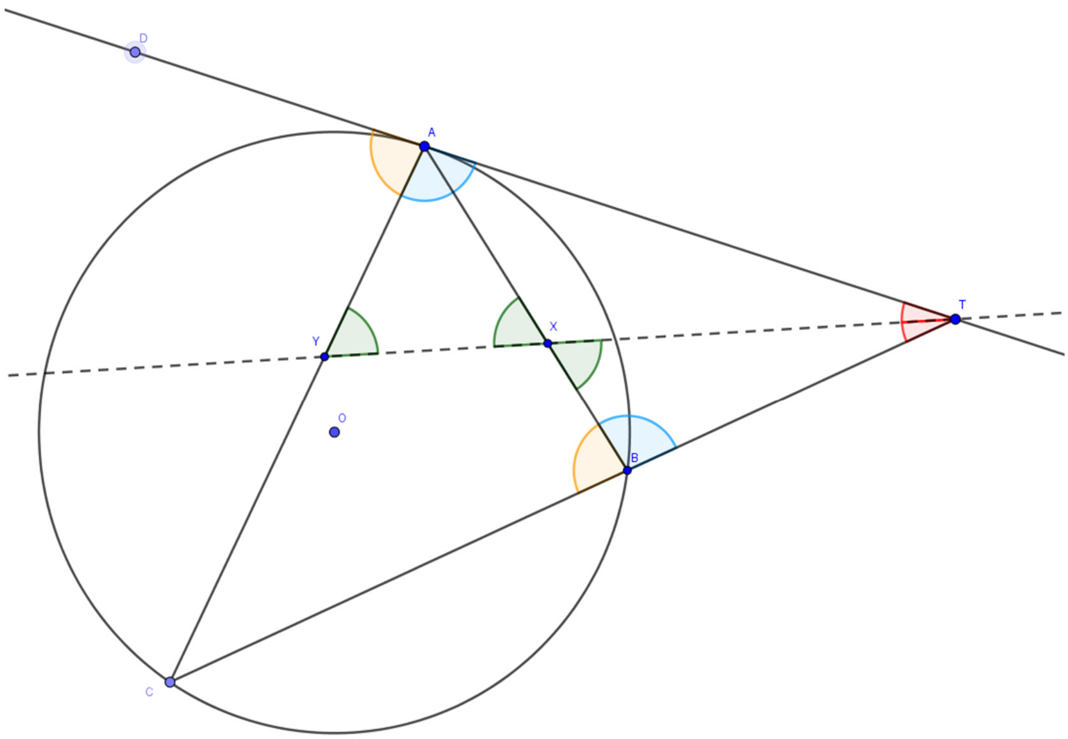
$\Longrightarrow$ i due angoli sono $\cong$ (per differenza di angoli $\cong$).

Considero il triangolo AYX:

esso ha gli angoli alla base $A\widehat{Y}X$ e $A\widehat{X}Y$ $\cong$ (per dimostrazione precedente)

$\Longrightarrow$ il triangolo è isoscele (perché ha gli angoli alla base $\cong$).

21) Soluzione inviata da Alexander-Angeli, 2D, Liceo Bertrand Russell-Cles (TN)



Ipotesi:

- TY è bisettrice dell'angolo ATB
- TC è una retta secante alla circonferenza
- TA è una retta tangente alla circonferenza

Tesi:

- Il triangolo AXY è isoscele

Dimostrazione:

- angolo DAC ≅ angolo CBA perché sono angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco

Considero i triangoli AYT e XBT:
essi hanno due angoli congruenti perché:

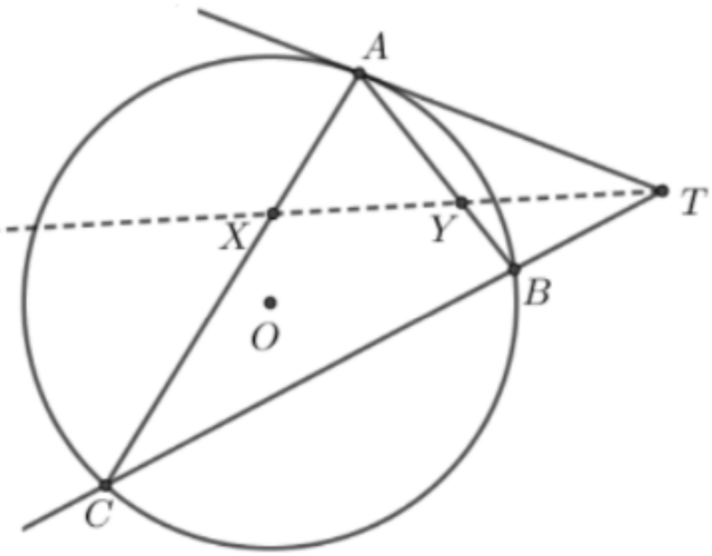
- angolo ATY ≅ angolo XTB perché TY è la bisettrice [dell'angolo ATB].
- angolo YAT ≅ angolo XBT perché differenza di angoli congruenti (180°-DAC/CBA)

Quindi:

- angolo AYX = 180°- (angolo ATY + angolo YAT)
- angolo BXT = 180°- (angolo XTB + angolo XBT)

Dato che angolo ATY ≅ angolo XTB e che angolo YAT ≅ angolo XBT, si ottiene che i due angoli AYX e BXT sono congruenti.
Dato che BXT e AXY sono angoli opposti al vertice e quindi congruenti, è dimostrata la tesi e cioè che il triangolo YAX è isoscele.

22) Soluzione inviata da Giulio Franzoni – classe 1^R – Liceo scientifico A. Roiti indirizzo scienze applicate – Ferrara



Consideriamo l'arco AC. Gli angoli ABC e CAV sono uguali perchè angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC; in particolare l'angolo CAV è considerato alla circonferenza perchè compreso tra la corda AC e la tangente alla circonferenza nel punto A.

Ne segue che anche gli angoli ABT e CAT sono uguali in quanto supplementari rispettivamente degli angoli ABC e CAV.

Consideriamo i triangoli AXT e YBT. I triangoli sono simili perchè gli angoli ATX e BTY sono uguali in quanto la bisettrice divide l'angolo [[ABT]] [ATB] in due angoli congruenti e gli angoli ABT e CAT sono uguali per il motivo che abbiamo detto sopra.

Di conseguenza anche gli angoli BYT e AXT sono uguali.

Infine, essendo opposto al vertice, l'angolo AYX è uguale all'angolo BYT e quidi gli angoli AXT e AYX sono uguali.

Questo dimostra che il triangolo AXY è isoscele con vertice in A.