FLAT*landia*

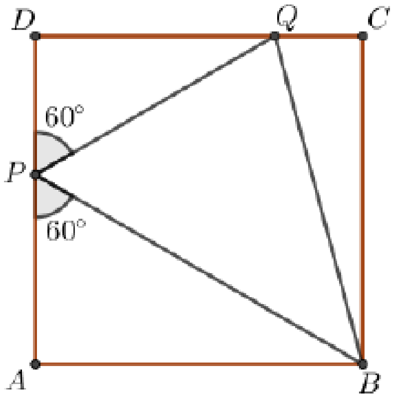
Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema – 7 – 28 febbraio 2022 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia $ABCD$ un quadrato e siano P, Q punti rispettivamente sui lati AD e DC tali che $\widehat{APB} = \widehat{QPD} = 60°$ (vedi figura). Determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{PBQ}$.

Motivare la risposta.



Commento

Abbiamo ricevuto dodici risposte, una da una Scuola secondaria di I grado e tutte le altre tutte da Licei scientifici.

Il problema portava alla costruzione, all'interno di un quadrato, di un triangolo con un vertice coincidente con uno dei vertici del quadrato e gli altri due situati sui due lati ad esso opposti. Veniva poi richiesto di determinare l'ampiezza dell'angolo del triangolo relativo al vertice comune col quadrato.

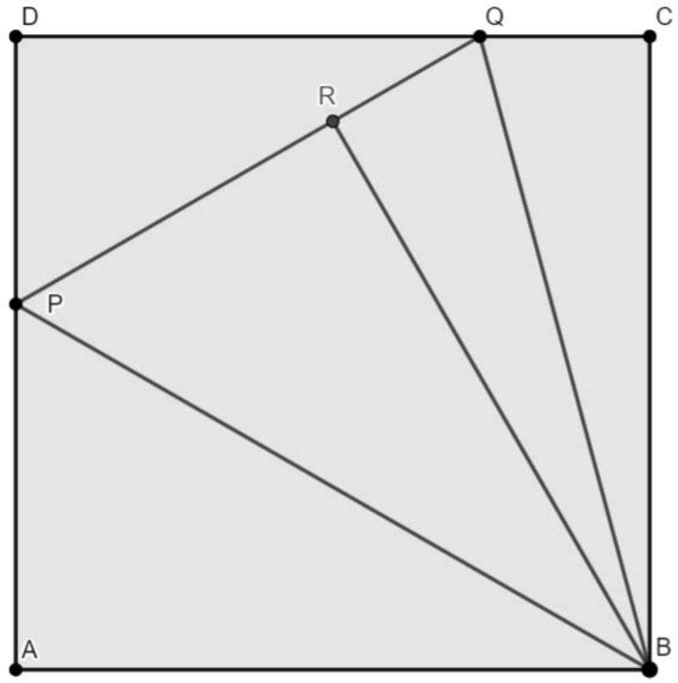
Le risposte arrivate sono sostanzialmente corrette e vengono usati sia metodi sintetici che metodi trigonometrici. Alcune soluzioni sono risultate un po' prolisse oppure non particolarmente chiare.

Sono arrivate risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):
-Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento
-Liceo Scientifico "Archimede", Messina
-Istituto Comprensivo n. 1 - Scuola sec. di I grado, Porto Torres (SS)
-Liceo Scientifico, "Galileo Galilei" Alessandria
-IIS "Badoni", Lecco
-Liceo Scientifico Statale "Enrico Fermi", Padova
-Liceo scientifico "A. Volta", Colle Val D'Elsa (SI)
-Liceo "B. Russell"- liceo delle scienze applicate, Cles (TN)
-Liceo Scientifico "A. Roiti", Ferrara

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata da Aldo Coletta, classe 3^C, Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento



Ipotesi:

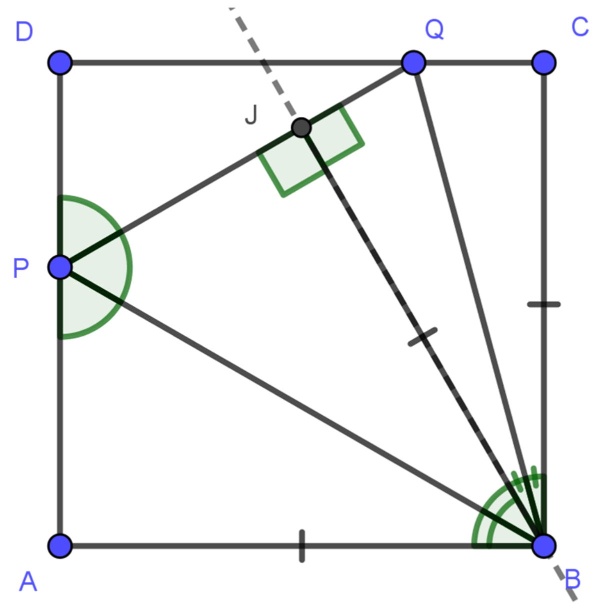
- ABCD è un quadrato
- $\widehat{APB}=\widehat{QPD}=60°$

Richiesta: Determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{PBQ}$

Soluzione:
Conduciamo la perpendicolare a $\overline{PQ}$ passante per B e definiamo R, il piede della perpendicolare.
Sottolineiamo poi che $\widehat{RPB}=60°$ per costruzione ($\widehat{RPB}=180°-\widehat{DPQ}-\widehat{BPA}$) e $\widehat{PBA}=30°$ essendo PAB un triangolo rettangolo con un angolo acuto di 30°.
Osserviamo PRB ≅ PAB per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli in quanto con $\overline{PB}$ in comune e $\widehat{BPR}=\widehat{BPA}$.
Dunque $\overline{BR}=\overline{AB}$.
Notiamo poi anche BRQ ≅ BQC per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli in quanto $\overline{BQ}$ in comune e $\overline{BR}=\overline{BC}$ per dimostrazione precedente. Quindi $\widehat{RBQ}=\widehat{QBC}$ e otteniamo $\widehat{RBC}=90°-\widehat{RBP}-\widehat{PBA}=30°$
Dove $\widehat{RBQ}=\widehat{RBC}/2=15°$ per quanto appena dimostrato.
Dunque $\widehat{PBQ}=30°+15°=45°$

C.V.D.

2) Soluzione inviata da Barbaccia Riccardo 2B, Liceo Scientifico Archimede, Messina



$$ABCD\ quadrato$$
$$P \in DA$$
$$Q \in DC$$
$$\widehat{APB} = \widehat{QPD} = 60°$$

$$\widehat{PBQ} = ?$$

Costruiamo la retta r ⊥ QP condotta per B.

$\widehat{QPB} = 180° - \widehat{APB} - \widehat{QPD} =$
$= 180° - 60° - 60° = 60°$ poiché supplementari.

Consideriamo il triangolo $\boldsymbol{BPA}$:

$\widehat{PBA} = 90° - \widehat{APB} = 90° - 60° = 30°$ poiché complementari.

Analogamente considerando il triangolo BJP risulta : $\widehat{JBP} = 30°$.

Consideriamo i triangoli $\boldsymbol{BPA}$ e $\boldsymbol{JBP}$:

$\widehat{APB} \cong \widehat{BPQ}$	poiché precedentemente dimostrato	$\Longrightarrow BPA \cong JBP$	per il II criterio di congruenza dei triangoli $\Longrightarrow$
$\widehat{JBP} \cong \widehat{PBA}$	poiché precedentemente dimostrato		
BC	in comune		

$\Longrightarrow AB \cong JB$	poiché lati opposti ad angoli congruenti in triangoli congruenti.	$\Longrightarrow JB \cong BC$	per la proprietà transtitiva.
$AB \cong BC$	poiché lati del quadrato ABCD		

Consideriamo i triangoli rettangoli $\boldsymbol{QBJ}$ e $\boldsymbol{BQC}$:

$BC \cong JB$	poiché precedentemente dimostrato	$\Longrightarrow QBJ \cong BQC$	per il criterio particolare di congruenza dei triangoli rettangoli $\Longrightarrow$

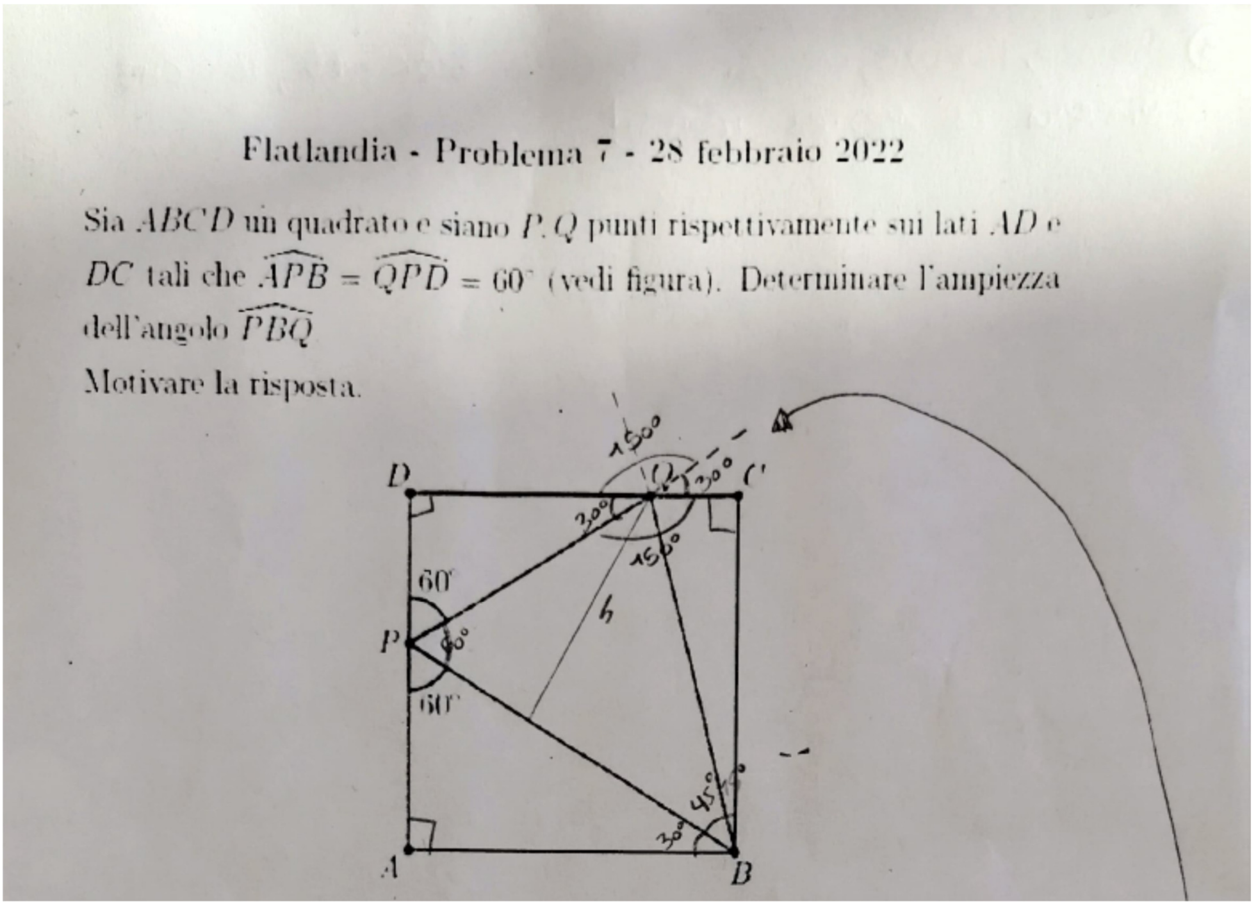
[[BQ]]
[BC] in comune

$\Longrightarrow JQ \cong QC$ poiché lati corrispondenti in triangoli congruenti $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \widehat{JBQ} \cong \widehat{QBC}$ poiché angoli opposti a lati congruenti in triangoli congruenti.

$$\widehat{JBC} = \widehat{ABC} - 2\widehat{PBA} = 90° - 60° = 30°$$
$$\widehat{JBQ} = \frac{\widehat{JBC}}{2} = \frac{30°}{2} = 15°$$
$$\widehat{PBQ} = \widehat{PBJ} + \widehat{JBQ} = 30° + 15° = 45°$$

3) Soluzione inviata da classe 2^D Scuola sec. di I grado-Istituto Comprensivo N.1 di Porto Torres (SS)

[Contrariamente alle regole, la soluzione inviata, in PDF, contiene la scansione di una soluzione scritta a mano… La riportiamo senza commenti.]



Flatlandia - Problema 7 - 28 febbraio 2022

Sia $ABCD$ un quadrato e siano P, Q punti rispettivamente sui lati AD e DC tali che $\widehat{APB} = \widehat{QPD} = 60°$ (vedi figura). Determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{PBQ}$.

Motivare la risposta.

1

(1) ABBIAMO CALCOLATO L'ANGOLO $B\hat{P}Q = 60°$.

(2) CONSIDERATO CHE $B\hat{A}P = P\hat{D}Q = B\hat{C}Q = 90°$, ABBIAMO CALCOLATO GLI ANGOLI $A\hat{B}P$ E $D\hat{Q}P = 30°$ ENTRAMBI: $180° - (60° + 90°)$

(3) ABBIAMO PROLUNGATO I SEGMENTI $\overline{PQ}$ E $\overline{BQ}$.

(4) ABBIAMO SCOPERTO CHE L'AMPIEZZA DEGLI ANGOLI SONO CONGRUENTI AGLI ANGOLI OTTENUTI DAI PROLUNGAMENTI.

(5) ABBIAMO INTUITO CHE DIVIDENDO L'ANGOLO DA 150° POTESSIMO OTTENERNE 2 CONGRUENTI DA 75°

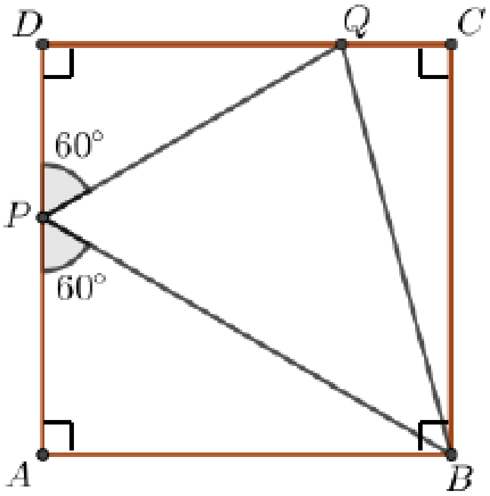
(6) PER CALCOLARE L'AMPIEZZA DELL'ANGOLO $P\hat{B}Q$, ABBIAMO SOTTRATTO DA 180°, 60° E 75° = 45°.

(7) IL RISULTATO HA DATO 45°.

(8) PER VERIFICARE ABBIAMO CALCOLATO L'ANGOLO $Q\hat{B}C = 15°$.

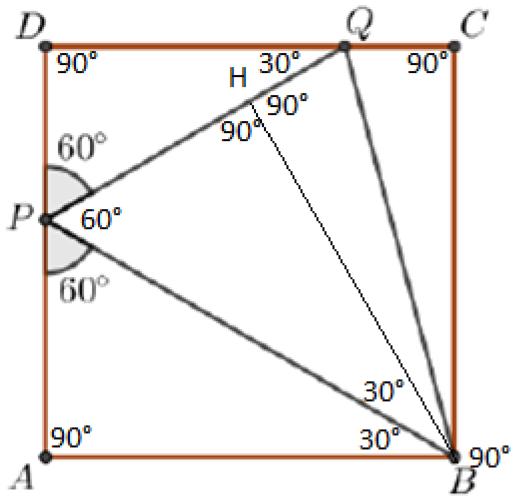
(9) ABBIAMO, INFINE, CALCOLATO L'ANGOLO $B\hat{Q}C = 75°$, IL CHE CONFERMA LA NOSTRA IPOTESI!

4) Soluzione inviata da Andrea Papillo e Carlo Garau, 1B (Liceo Potenziato di Matematica), "Liceo Scientifico, Galileo Galilei" Alessandria.



Principi teorici:
Criteri di congruenza dei triangoli;
somma degli angoli interni di un triangolo = 180°;
angolo piatto = 180°;
Angoli interni di un quadrato = 90°

Tracciamo l'altezza che partendo da B arriva su PQ e tramite l'uso dei principi teorici calcoliamo alcuni angoli:



Inoltre possiamo dire che:
$H\hat{B}C$= 90-30-30= 30°
$C\hat{Q}H$= 180-30= 120°

Mediante i criteri di congruenza affermiamo che i triangoli PHB e PAB sono uguali, poiché:

$\hat{P}=\hat{P}$

$\hat{H}=\hat{A}$

$\hat{B}=\hat{B}$

$\overline{PB}=\overline{PB}$

Di conseguenza il lato HB risulta essere uguale al lato CB, poiché:

$\overline{HB} = \overline{AB} = \overline{CB}$

Con questi dati siamo anche in grado di dire che i triangoli QHB e QCB sono congruenti:

$\overline{HB}=\overline{CB}$

$\overline{QB}=\overline{QB}$

$\hat{H}=\hat{C}$

In quanto i due triangoli sono uguali, gli angoli $H\hat{Q}B$ e $H\hat{B}Q$ saranno rispettivamente:

$C\hat{Q}H/2=$ [150/2=75°] [[120/2= 60°]]

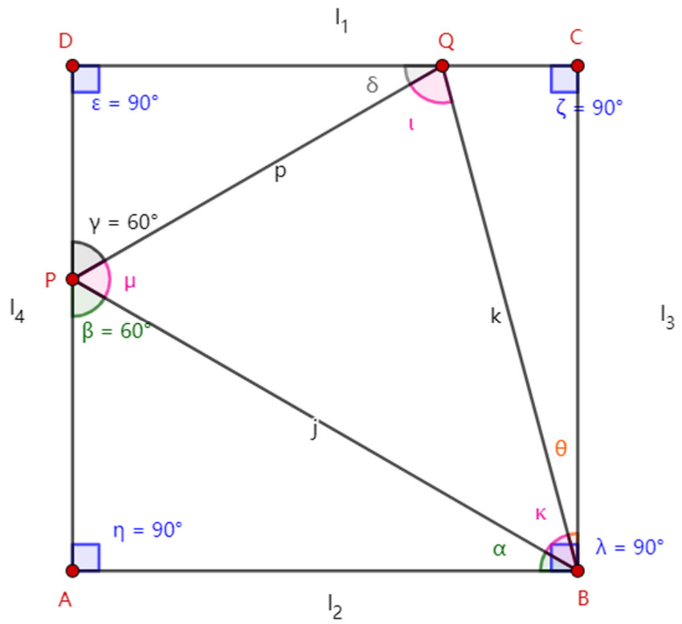
$H\hat{B}C/2= 30/2= 15°$

Infine l'angolo $P\hat{B}Q$ è quindi:

$P\hat{B}H+ H\hat{B}Q= 30+15= 45°$

5) **Soluzione inviata da Andrea Fu, 1ASA Scienze Applicate - Liceo Scientifico Statale “Enrico Fermi” -Padova**

IPOTESI	TESI
$ABCD$ = quadrato $AB = BC = CD = DA$ $\epsilon = \zeta = \eta = \lambda = 90°$ $\beta = \gamma = 60°$	κ =?



Dimostrazione:

$$\alpha = 180° - 60° - 90° = 30°$$

Considero i lati del triangolo $\triangle ABP$ dell’angolo $30°$

Considero $AP = x$ allora $BP = 2x$ $AB = x\sqrt{3}$

Come sappiamo AB è un lato di quadrato quindi $AB = BC = CD = DA = x\sqrt{3}$

Considero successivamente i lati del triangolo $\triangle PDQ$ dell'angolo $60°$

Considero $DP = DA - PA = x\sqrt{3} - x$

Successivamente si deve trovare DQ

$\tan(\gamma) = \frac{DQ}{DP}$

quindi $DQ = \tan(\gamma) \times DP$

$$(\gamma) = 60°\ per\ ipotesi$$

Riportando i risultati che ho calcolato

$$DQ = \tan(\gamma) \times DP = \tan 60° \times (x\sqrt{3} - x) = \sqrt{3} \times (x\sqrt{3} - x) = 3x - \sqrt{3}x$$

Considero i lati del triangolo $\triangle QCB$ dell’angolo θ

Considero $CQ = CD - DQ$

Riportando i risultati che abbiamo calcolato

$$CQ = CD - DQ = l\ del\ quadrato - DQ = \sqrt{3}x - (3x - \sqrt{3}x)$$

$\sqrt{3}x - (3x - \sqrt{3}x) = \sqrt{3}x - 3x + \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x - 3x$

Considerando angolo θ (angolo incognita) avendo la lunghezza del lato opposto all'angolo e del lato adiacente all'angolo possiamo facilmente trovare l'angolo usando la tangente.

Quindi:

$tan\theta = \frac{CQ}{BC} = \frac{CQ}{lato\ del\ quadrato} = \frac{2\sqrt{3}x-3x}{\sqrt{3}x}$

$$\frac{2\sqrt{3}x - 3x}{\sqrt{3}x} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} - 3) \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$tan\theta = 2 - \sqrt{3}\ \ allora\ \theta = (2 - \sqrt{3}) \times \tan\text{^\{−1\}}$$

$$\theta = 15°$$

$$Infine:$$

Sapendo l'angolo di θ basta fare

$$\lambda = 90°\ per\ ipotesi$$

Sapendo che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°

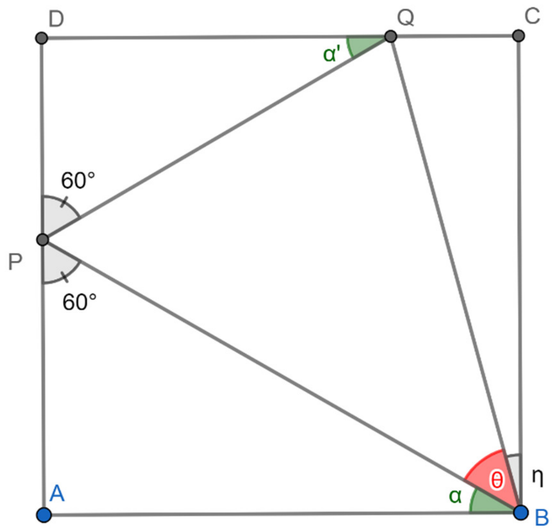
$$a = 180° - \beta - \eta = 180° - 60° - 90° = 30°$$

$$\theta\ = 15°$$

$$quindi\ \kappa = \lambda - \alpha - \theta = 45°$$

$$C.V.D$$

6) Soluzione inviata da Matteo Borghino 1B, Liceo Scientifico Arimondi, Savigliano (CN)



IPOTESI:
$ABCD$ è $un\ quadrato$
$\widehat{APB} = \widehat{QPD} = 60°$
TESI:
$\theta = 45°$
DIMOSTRAZIONE:
Sia $\overline{AB} = X$. Consideriamo i triangoli rettangoli ABP e DQP.

Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è $180°$ si ha $\hat{\alpha} = \widehat{\alpha'} = 180° - 60° - 90° = 30°$

Considero il triangolo rettangolo ABP. Per i teoremi sui triangoli rettangoli: $\overline{AP} = \tan\alpha \cdot \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}X}{3}$

quindi si ricava:

$\overline{DP} = X - \overline{AP} = X - \frac{\sqrt{3}X}{3} = \frac{3X-\sqrt{3}X}{3}$

Considero il triangolo rettangolo DPQ

$\overline{DQ} = \tan\widehat{DPQ} \cdot \overline{DP} = \sqrt{3} \cdot \frac{3X-\sqrt{3}X}{3} = X\sqrt{3} - X = X(\sqrt{3}-1)$ quindi

$\overline{QC} = \overline{DC} - \overline{DQ} = X - \left(X\sqrt{3} - X\right) = 2X - X\sqrt{3} = X\left(2-\sqrt{3}\right).$

Considero l'angolo η del triangolo rettangolo QCB si ha:

$$\eta = \tan^{-1}\frac{\overline{QC}}{\overline{CB}} = \tan^{-1}\frac{X\left(2-\sqrt{3}\right)}{X} = \tan^{-1}\left(2-\sqrt{3}\right) = 15°$$

Essendo $\alpha + \theta + \eta = 90°$, si ottiene che :

$$\theta = 90° - \eta - \alpha = 90° - 15° - 30° = 45°$$

c.d.d.

7) Soluzione inviata da Andrea Donato, 3ALS-IIS Badoni-Lecco

Dimostrazione
Chiamiamo a il lato del quadrato $ABCD$.

Consideriamo l'angolo $\widehat{ABP}$ del triangolo rettangolo in $\widehat{PAB}$ ABP: in quanto in un triangolo la somma degli angoli interni è pari a 180°, si ha che $\widehat{ABP} = 180° - \widehat{PAB} - \widehat{APB} = 180° - 90° - 60° = 30°$. (1)

Consideriamo il cateto $\overline{PA}$ del triangolo rettangolo ABP: essendo quest'ultimo un triangolo rettangolo con un angolo di 30° (per 1) e uno di 60° (per ipotesi), si ha che $\overline{PA}$ è pari a $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Per differenza tra $\overline{AD}$ e $\overline{PA}$, il segmento $\overline{PD}$ è pari a: $a - \frac{\sqrt{3}}{3}a = a(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Consideriamo l'angolo $\widehat{PQD}$ del triangolo rettangolo in $\widehat{PDQ}$ PQD: in quanto in un triangolo la somma degli angoli interni è pari a 180°, si ha che $\widehat{PQD} = 180° - \widehat{PDQ} - \widehat{DPQ} = 180° - 90° - 60° = 30°$. (2)

Consideriamo il cateto $\overline{DQ}$ del triangolo rettangolo PQD: essendo quest'ultimo un triangolo rettangolo con un angolo di 30° (per 2) e uno di 60° (per ipotesi), si ha che $\overline{DQ}$ è pari a $(\sqrt{3} - 1)a$.

Per differenza tra $\overline{DC}$ e $\overline{DQ}$, il segmento $\overline{CQ}$ è pari a: $a - (\sqrt{3} - 1)a = (2 - \sqrt{3})a$.

Consideriamo l'angolo $\widehat{QBC}$del triangolo rettangolo in $\widehat{QCB}$ BQC: essendo $\tan(\widehat{QBC}) = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = (2 - \sqrt{3})$, l'angolo $\widehat{QBC}$ sarà uguale a: $\tan^{-1}(2 - \sqrt{3})$.

Consideriamo l'angolo $\widehat{PBQ}$: esso è complementare a $\widehat{ABP} + \widehat{QBC}$, per cui:

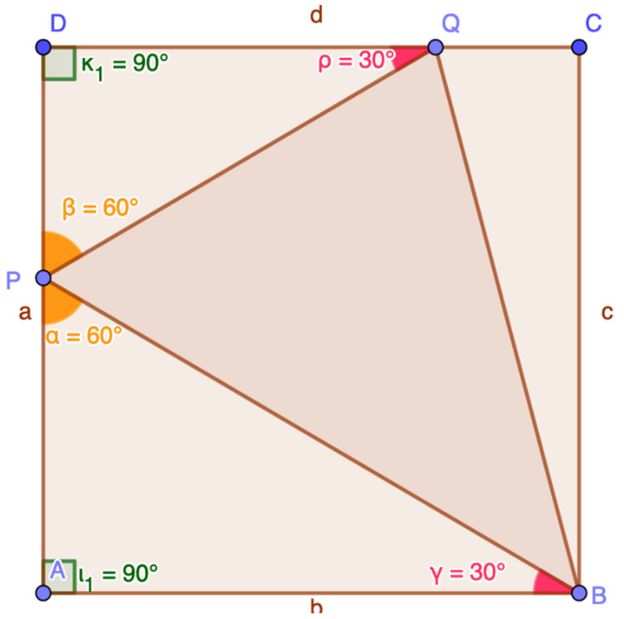
$$\widehat{PBQ} = 90° - (\widehat{ABP} + \widehat{QBC}) = 90° - 30° - \tan^{-1}(2 - \sqrt{3}) = 60° - 15° = 45°$$

8) Soluzione inviata da Federico Lucato, Beatrice Protto, Classe 2E, Liceo scientifico Galileo Galilei, Alessandria

DIMOSTRAZIONE

Passo 1

Immagine 1



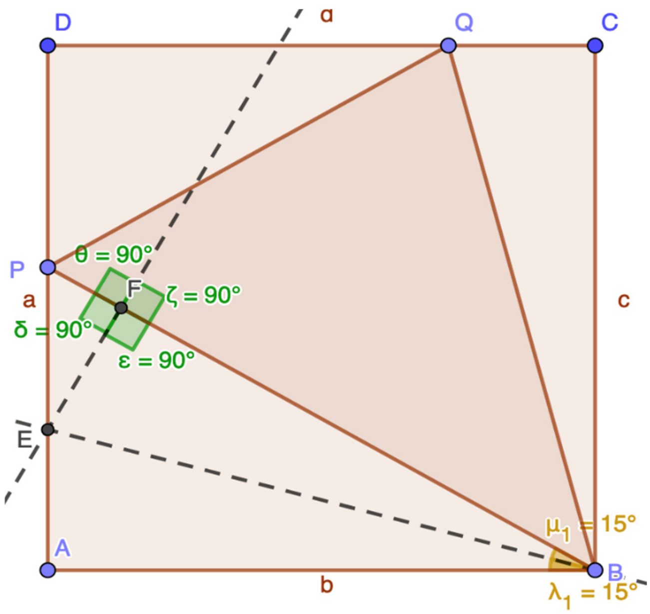
In riferimento all'immagine 1:

$$Triangolo\ APB: \quad \hat{\alpha} = 60°\ per\ ipotesi$$
$$\widehat{\iota_1} = 90°\ perchè\ angolo\ del\ quadrato$$
$$\Downarrow$$
$$\hat{\gamma} = 30°\ per\ differenza\ di\ angoli\ interni\ di\ un\ triangolo\ 180° - (60° + 30°)$$

$$Triangolo\ DPQ: \hat{\beta} = 60°\ per\ ipotesi$$
$$\widehat{\kappa_1} = 90°\ perchè\ angolo\ del\ quadrato$$
$$\Downarrow$$
$$\hat{\rho} = 30°\ per\ differenza\ di\ angolo\ interni\ di\ un\ triangolo\ 180° - (90° + 60°)$$

Passo 2

Immagine 2

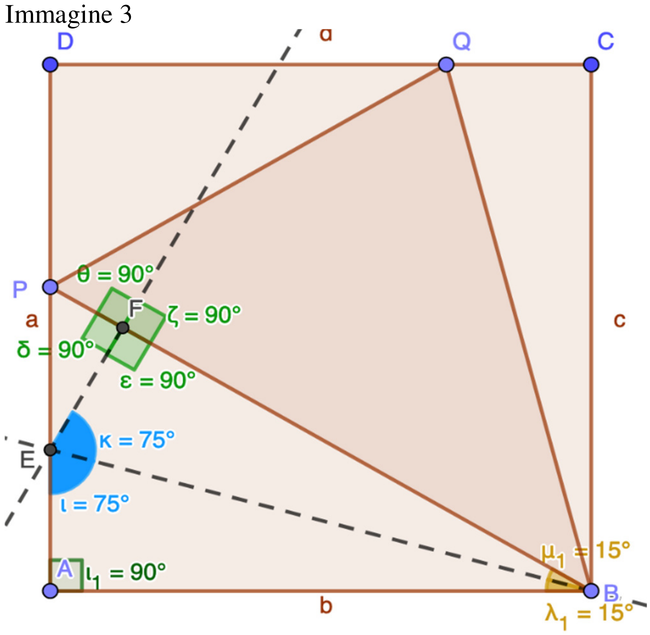


In riferimento all'immagine 2:

$\overline{BE}\ bisettrice\ \hat{\gamma}\ \Rightarrow\ \widehat{\lambda_1} \cong \widehat{\mu_1} = 15°$
$\overline{EF} \perp \overline{PB}\ \Rightarrow\ \hat{\varepsilon} \cong \hat{\zeta} \cong \hat{\theta} \cong \hat{\delta} = 90°$

<u>Passo 3</u>

Immagine 3



In riferimento all'immagine 3:

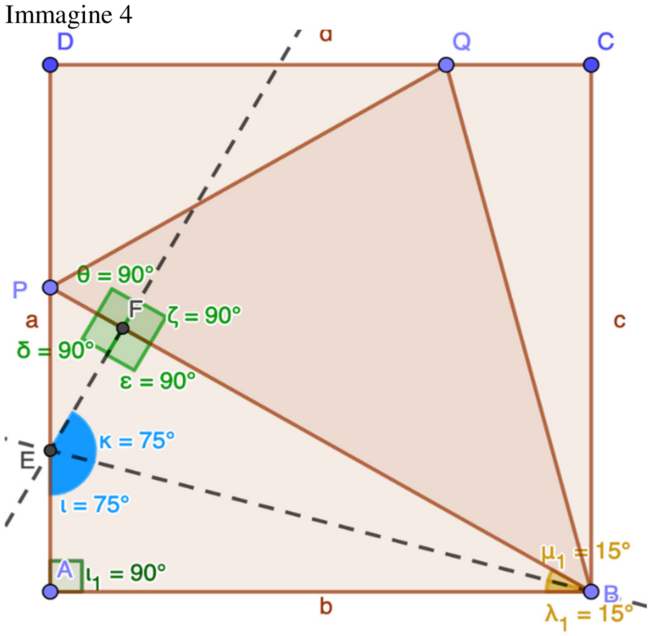
$Traingolo\ ABE: \widehat{\iota_1} = 90°\ perchè\ angolo\ del\ quadrato$
$\widehat{\lambda_1} = 15°\ per\ dimostrazione\ 2$
$\Downarrow$
$\hat{\iota} = 75°\ per\ differenza\ di\ angolo\ interni\ di\ un\ triangolo\ 180° - (90° + 15°)$

$Triangolo\ FEB$: $\hat{\varepsilon} = 90°\ per\ dimostrazione\ 2$

$$\widehat{\mu_1} = 15°\ per\ dimostrazione\ 2$$
$$\Downarrow$$
$$\hat{\kappa} = 75°\ per\ differenza\ di\ angoli\ interni\ di\ un\ triangolo\ 180° - (90° + 15°)$$

<u>Passo 4</u>

Immagine 4

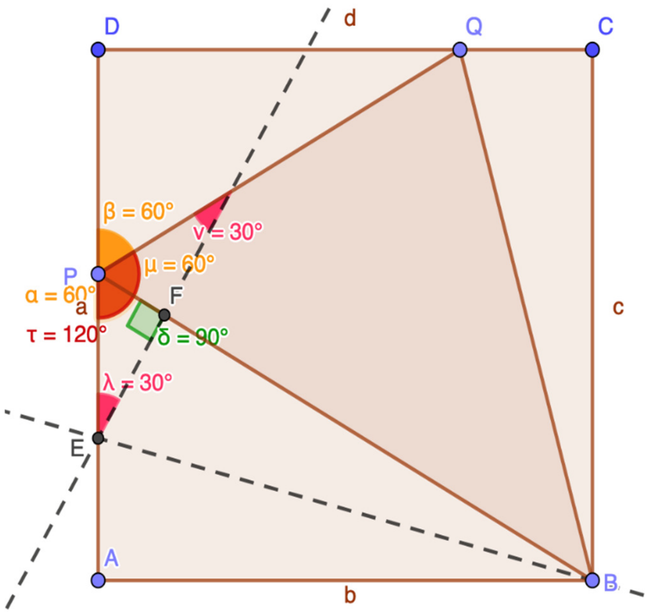


In riferimento all'immagine 4:

$$Traingoli\ ABE, FEB \begin{cases} \overline{EB}\ in\ comune \\ \widehat{\lambda_1} \cong \widehat{\mu_1}\ per\ dimostraione\ 2 \\ \hat{\iota} \cong \hat{\kappa}\ per\ dimostrazione\ 2 \end{cases}$$
$$\Downarrow 2\ C.C.$$
$$AEB \cong FEB$$

<u>Passo 5</u>

Immagine 5



In riferimento all'immagine 5:

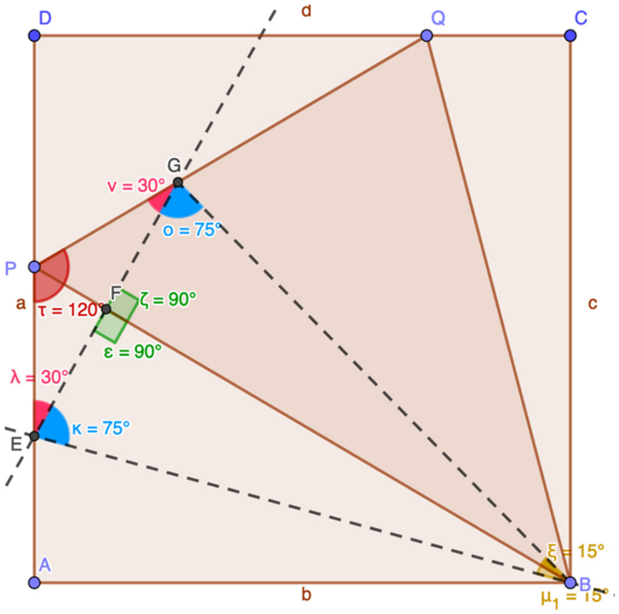
$Triangolo\ PFE: \hat{\delta} = 90°\ per\ dimostrazione\ 2$
$\hat{\alpha} = 60°\ per\ ipotesi$
$\Downarrow$
$\hat{\lambda} = 30°\ per\ differenza\ di\ angoli\ interni\ di\ un\ triangolo\ 180 - (90° + 60°)$

$\hat{\mu} = 60°\ perchè\ supplementare\ di\ angoli\ \ (60° + 60°)$

$Triangolo\ GPE: \hat{\lambda} = 30° per\ dimostrazione\ precedente$
$\hat{\tau} = 120°\ per\ somma\ di\ angoli\ (\hat{\alpha} + \hat{\mu}) = (60° + 60°)$
$\Downarrow$
$\hat{\nu} = 30°\ per\ differenza\ di\ angoli\ interni\ di\ un\ triangolo\ 180 - (120° + 30°)$
$\Downarrow$
$Il\ triangolo\ GPE$ è $isoscele\ perchè\ ha\ gli\ angoli\ alla\ base\ congruenti$

<u>Passo 6</u>

Immagine 6



In riferimento all'immagine 6:

$\overline{EF} \cong \overline{FG}$ perché $\overline{EG} \perp \overline{PB}$ per dimostrazione 2 e dato che il triangolo GPE è isoscele

$\Downarrow$

$\overline{PF}$ è altezza, mediana di $\overline{EG}$ dato che il triangolo GPE è isoscele

Triangoli EBF, FBG $\begin{cases} \overline{EF} \cong \overline{FG} \; per\ dimostrazione\ precedente \\ \hat{\varepsilon} \cong \hat{\zeta} \; per\ dimostrazione\ 2 \\ \overline{FB} \; in\ comune \end{cases}$

$\Downarrow$ 1° C.C.

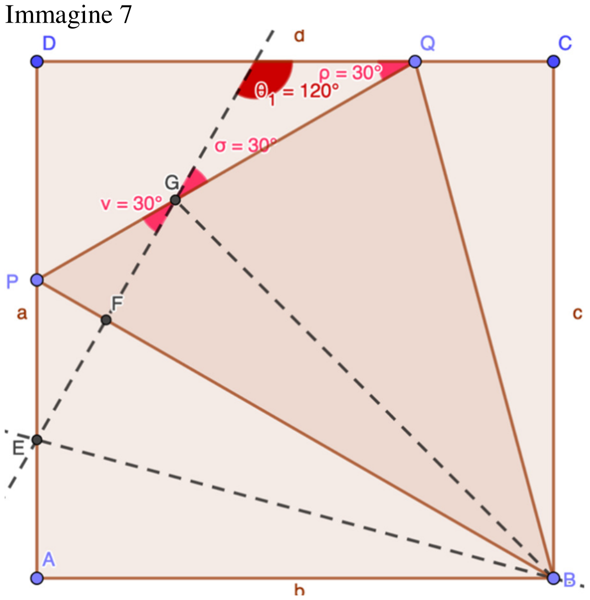
EBF $\cong FBG$

$\Downarrow$

In particolare $\widehat{\mu_1} \cong \hat{\xi} = 15° \wedge \hat{\kappa} \cong \hat{o} = 75°$

Passo 7

Immagine 7

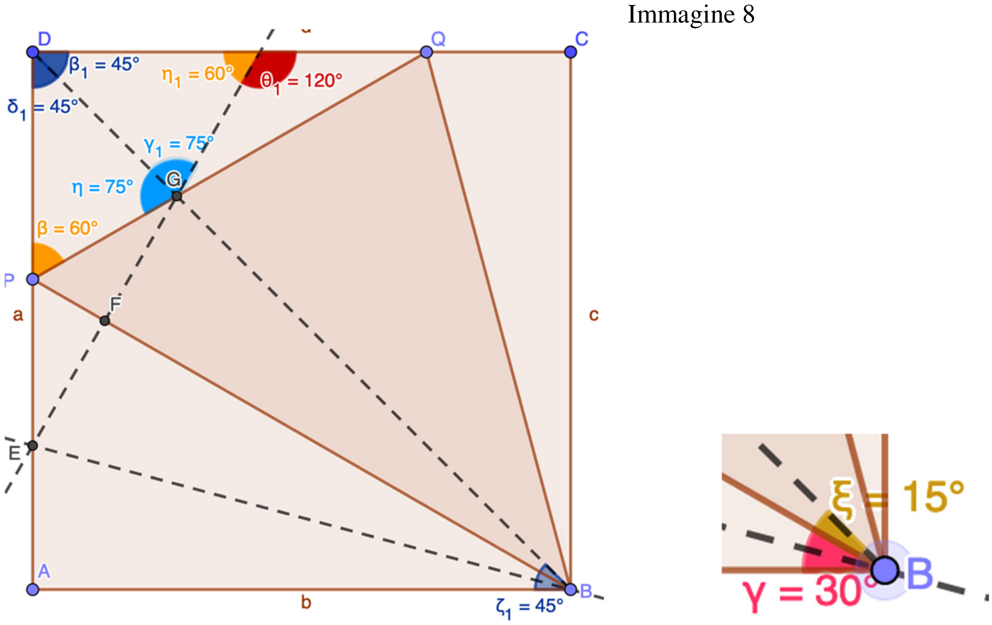


In riferimento all'immagine 7:

Triangolo IGQ: $\hat{\rho} = 30°\ per\ dimostrazione\ 1$
$\hat{\sigma} = 30°\ perché\ opposto\ al\ vertice\ di\ \hat{v}$
$\Downarrow$
IGQ è isoscele perché ha gli angoli alla base congruenti $\wedge\ \widehat{\theta_1} = 120°$
per differenza di angoli interni di un triangolo

<u>Passo 8</u>

Immagine 8



in riferimento all'immagine 8:

$\widehat{\zeta_1} = 45°\ perché\ somma\ di\ \hat{\gamma} + \hat{\xi} = 30° + 15°$
$\Downarrow$
$\mathrm{G} \in diagonale\ \overline{BD}\ \wedge\ \hat{\delta} \cong \widehat{\beta_1} = 45°$

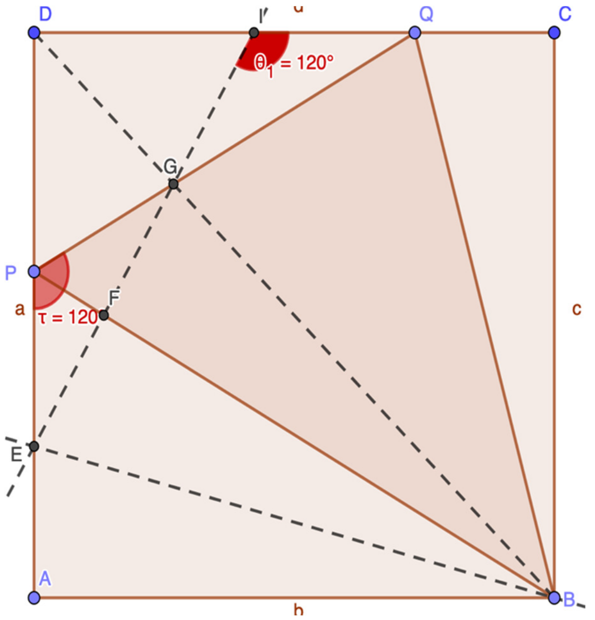
$\widehat{\eta_1} = 60°\ perchè\ supplementare\ di\ \hat{\theta} = 120°$

$$Triangoli\ PGD, DGI \begin{cases} \overline{DG}\ in\ comune \\ \hat{\delta} \cong \widehat{\beta_1}\ per\ dimostrazione\ precedente \\ \hat{\eta} \cong \widehat{\gamma_1} = 75°\ per\ differenza\ di\ angoli \\ interni\ \ 180° - (60° + 45°) \end{cases}$$

$\Downarrow$ 2° C.C.
PGD $\cong DGI$
$\Downarrow$
In particolare $\overline{PG} \cong \overline{GI}$

<u>Passo 9</u>

Immagine 9



In riferimento all'immagine 9:

$\overline{PG} \cong \overline{GI} \Rightarrow \overline{EP} \cong \overline{PG} \cong \overline{GI} \cong \overline{IQ}$ *perché lati obliqui di triangoli isosceli*

$$Triangoli\ EPG, GIQ \begin{cases} \overline{EP} \cong \overline{IG}\ per\ dimostrazione\ precedente \\ \overline{PG} \cong \overline{IQ}\ per\ dimostrazione\ precedente \\ \hat{\tau} \cong \widehat{\theta_1}\ per\ dimostrazione\ 5 \end{cases}$$

$$\Downarrow 1°\ C.C.$$

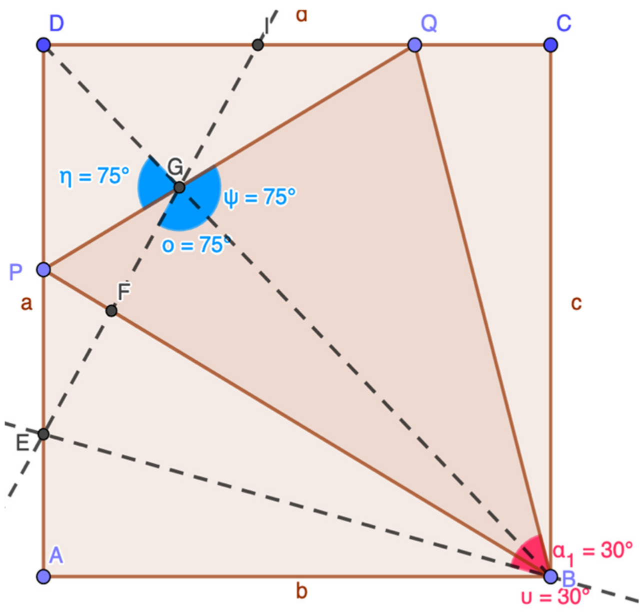
$$\text{EPG} \cong GIQ$$

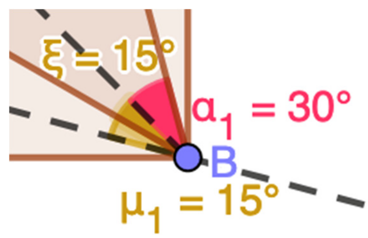
$$\Downarrow$$

$$\text{In particolare } \overline{EG} \cong \overline{GQ}$$

Passo 10

Immagine 10





In riferimento all'immagine 10:

$$\hat{\psi} = 75° \; perché \; opposto \; al \; vertice \; di \; \hat{\eta} \; rispetto \; alle \; rette \; PQ \; e \; BD \Rightarrow \; \hat{o} \cong \hat{\psi}$$

$$\text{Triangoli EBG, GBQ} \begin{cases} \overline{EG} \cong \overline{GQ} \; per \; dimostrazione \\ \overline{GB} \; in \; comune \\ \hat{o} \cong \hat{\psi} \; per \; dimostrazione \; precedente \end{cases}$$

$$\Downarrow \text{1°C.C.}$$

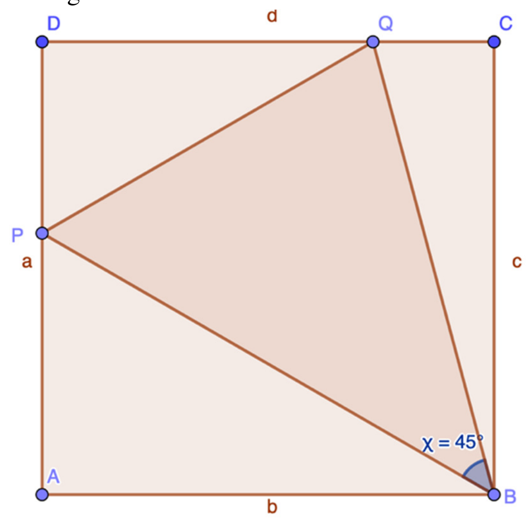
$$\text{EBG} \cong GBQ$$

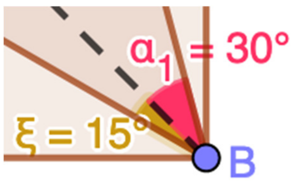
$$\Downarrow$$

In particolare $\widehat{\alpha_1} \cong \hat{\upsilon} = 30° \; perché \; \hat{\upsilon} = \widehat{\mu_1} + \hat{\xi} = 15° + 15°$

Passo 11

Immagine 11





In riferimento all'immagine 11:

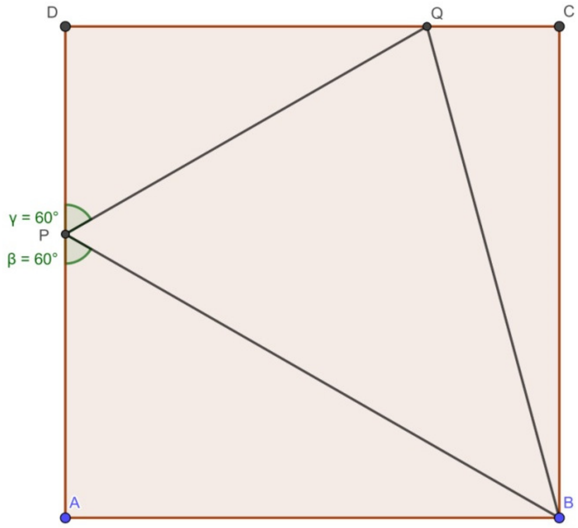
$\hat{\chi} = \hat{\xi} + \widehat{\alpha_1} = 15° + 30° = 45°$

c.v.d.

[I passaggi sono sostanzialmente corretti. Sono presenti molte imprecisioni di linguaggio che abbiamo preferito non segnalare (ad esempio laddove si scrive "per la dimostrazione precedente" si tratta spesso di "per la costruzione precedente").
Ma soprattutto poniamo questa domanda: non si poteva sintetizzare?]

9) Soluzione inviata dalla Classe 2C, Liceo scientifico opzione scienze applicate B. Russell, Cles (TN)

Sia ABCD un quadrato e siano P,Q punti rispettivamente sui lati AD e CD tali che $A\hat{P}B = Q\hat{P}D = 60°$ (vedi figura). Determinare l'ampiezza dell'angolo $P\widehat{B}Q$. Motivare la risposta.



<u>Ipotesi:</u>
ABCD quadrato

→ AB≅BC≅CD≅DA;

→ AB // DC e BC // AD;

→ $AB \perp BC \perp CD \perp DA$;

$A\hat{P}B = Q\hat{P}D = 60°$

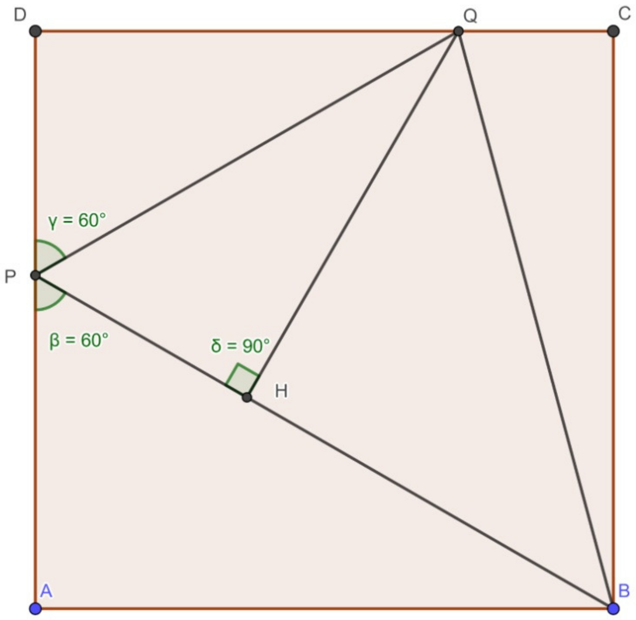
<u>Tesi:</u>
$P\widehat{B}Q$=?

<u>Risoluzione:</u>

Poniamo $AB = l$.

La somma degli angoli interni di un triangolo deve dare come risultato 180°, quindi per differenza di angoli, $A\hat{B}P = 30°$. Il triangolo ABP è metà di un triangolo equilatero, ha gli angoli che misurano 30°-60°-90° e possiamo quindi utilizzare le due seguenti formule ricavate con il teorema di Pitagora:
$h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$ o $l = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$ dove l è l'ipotenusa e h il cateto maggiore del triangolo 30°-60°-90°.

Quindi:
$AP = AB * \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$
$PB = 2 * AP = \frac{l2\sqrt{3}}{3}$
Tracciamo l'altezza QH del triangolo PBQ (parte dal vertice Q ed è perpendicolare al lato PB).



Consideriamo il triangolo PDQ.

$PD = AD - AP = l - \frac{l\sqrt{3}}{3} = \frac{3l - l\sqrt{3}}{3}$

La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, quindi per differenza di angoli $D\hat{Q}P = 30°$. Il triangolo PQD è un triangolo 30°-60°-90°. Si ha quindi che:

$PQ = 2 * PD = 2 * \frac{(3l - l\sqrt{3})}{3}$

Consideriamo ora i triangoli PQD e PQH, essi hanno:

- PQ in comune;
- $P\hat{D}Q \cong P\hat{H}Q = 90°$;
- $D\hat{P}Q \cong Q\hat{P}H = 60°$ infatti $Q\hat{P}H$=60° perchè supplementare di $\beta + \gamma$.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio generalizzato e in particolare PH≅ PD, lati corrispondenti di triangoli congruenti.

Per questo motivo:

$$PH = \frac{3l - l\sqrt{3}}{3}$$

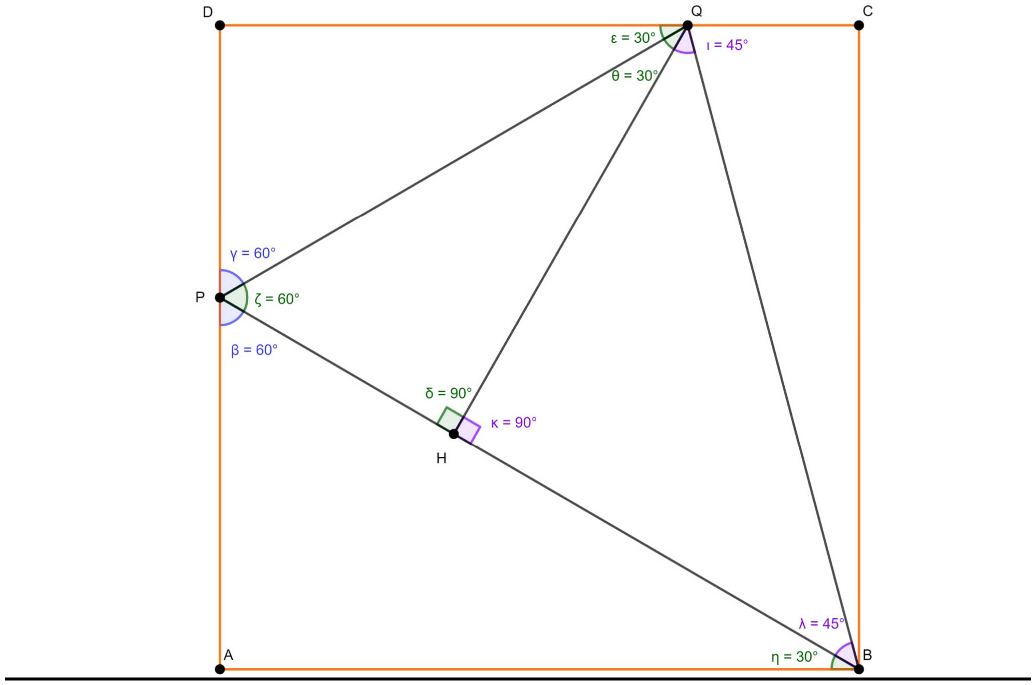
Anche il triangolo PHQ è un triangolo 30°-60°-90° quindi

$$QH = PQ * \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 * \frac{(3l - l\sqrt{3})}{3} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}l - 3l}{3} = l\sqrt{3} - l$$

Calcoliamo infine

$HB = PB - PH = \frac{l2\sqrt{3}}{3} - \frac{3l - l\sqrt{3}}{3} = \frac{l2\sqrt{3} - 3l + l\sqrt{3}}{3} = \frac{l3\sqrt{3} - 3l}{3} = l\sqrt{3} - l$

Essendo QH e HB due segmenti congruenti e conoscendo la misura dell'angolo $P\widehat{H}Q = 90°$, valore conseguente alla costruzione dell'altezza del triangolo PQB; possiamo dire che il triangolo HQB è un triangolo rettangolo isoscele quindi $H\widehat{B}Q\ e\ H\widehat{Q}B$ sono la metà di un angolo retto e valgono entrambi 45° ($\frac{180°-90°}{2}$).
Quindi $P\widehat{B}Q = 45°$.

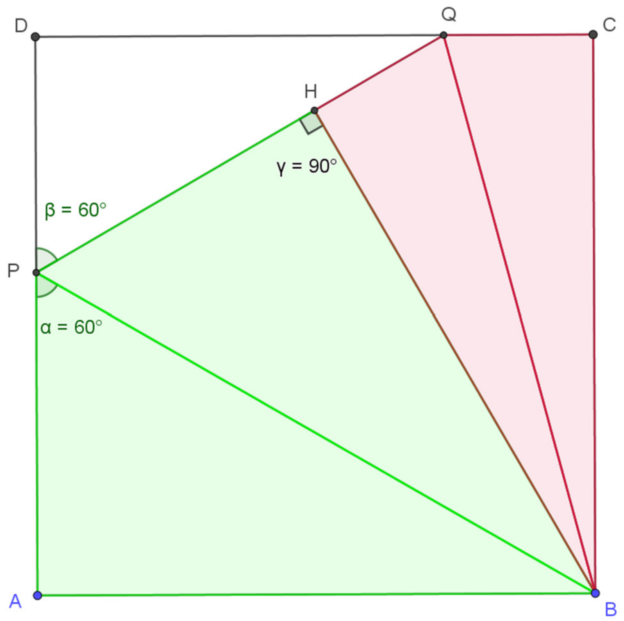


10) Soluzione inviata dalla classe 2D del liceo scientifico "A. Volta" di Colle Val D'Elsa (SI)

IPOTESI:

- ABCD QUADRATO
- P PUNTO SU AD TALE CHE $\widehat{APB} = 60°$
- Q PUNTO SU CD TALE CHE $\widehat{QPD} = 60°$

TESI: $\widehat{QBP} = 45°$



DIMOSTRAZIONE:

Come prima cosa osserviamo che $\widehat{BPQ} = 60°$; infatti $\widehat{BPQ} = 180° - (60° + 60°) = 60°$.

Ora tracciamo l'altezza BH relativa alla base PQ del triangolo PBQ.

Consideriamo i triangoli PHB e ABP, essi hanno:

- PB in comune;

- $\widehat{PAB} = 90°$ e $\widehat{BHP} = 90°$ perché $\widehat{PAB}$ è angolo del quadrato e BH è perpendicolare a PQ per costruzione.

- $\widehat{APB} = 60°$ e $\widehat{BPH} = 60°$ per ipotesi

Quindi i due triangoli sono congruenti per il criterio di congruenza generalizzato dei triangoli rettangoli.

In particolare abbiamo $AB \cong HB$ perché lati corrispondenti in triangoli congruenti, ma dato che

$AB \cong BC$ perchè lati di un quadrato, allora $AB \cong HB \cong BC$.

Ora consideriamo i triangoli HBQ e BCQ, essi hanno:

- BQ in comune,

- $\widehat{BHQ} \cong \widehat{BCQ}$ $perch$è $entrambi\ angoli\ retti$,

- $BH \cong BC$ per quanto dimostrato prima,

quindi i due triangoli sono congruenti per il criterio di congruenza generalizzato dei triangoli rettangoli, in particolare abbiamo $\widehat{HBQ} \cong \widehat{CBQ}$.

Tornando ai triangoli ABP e PHB, essi hanno gli angoli $\widehat{ABP}$ e $\widehat{PBH}$ di 30° perché la somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi è di 180°, quindi

$\widehat{ABP} = 180° - 90° - 60° = 30°$ e $\widehat{PBH} = 30°$.

Sappiamo che l'angolo ABC è di 90° dato che è un angolo al vertice di un quadrato e sottraendo a questo angolo gli angoli $\widehat{ABP}$ e $\widehat{PBH}$ si ottiene $\widehat{\mathrm{HBC}}$.

Quindi $\widehat{\mathrm{HBC}} = 90° - 30° - 30° = 30°$.

Ma $\widehat{\mathrm{HBC}}$ è la somma degli angoli $\widehat{HBQ}$ e $\widehat{QBC}$ che prima abbiamo dimostrato essere congruenti.

Quindi abbiamo che 2 $\widehat{HBQ} = 30°$ e di conseguenza $\widehat{HBQ} = 15°$.

L'angolo $\widehat{PBQ}$ è la somma degli angoli $\widehat{PBH}$ e $\widehat{HBQ}$, quindi $\widehat{PBQ} = 30° + 15° = 45°$.

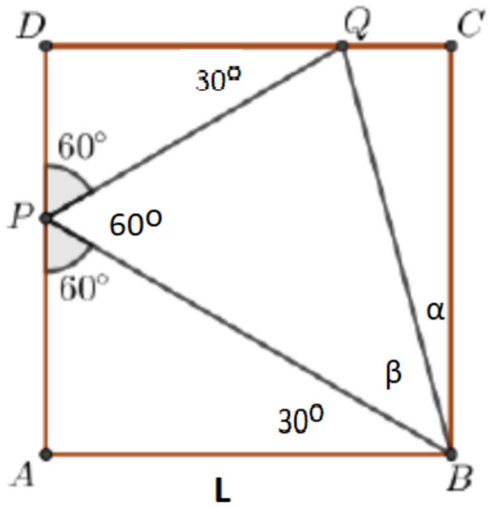
11) Soluzione inviata da Florin Pirciu, Classe: 1° superiore-Sezione: E - Scuola: Liceo Scientifico Galileo Galilei, Alessandria (AL)

[[…]]
La soluzione viene omessa.

[Soluzione confusa e a tratti incomprensibile con figure troppo piccole e quasi sovrapposte. Già nell'ipotesi c'è un errore perché dire che i lati del poligono sono congruenti vuol dire che il quadrilatero è un rombo e non necessariamente un quadrato, come da ipotesi.]

12) Soluzione inviata da FRANZONI GIULIO - I R - Liceo Scientifico A. Roiti - Ferrara

SOLUZIONE



SOLUZIONE

Indico con L il lato del quadrato ABCD.
Il triangolo rettangolo ABP, avendo un angolo di 60° è la metà di un triangolo equilatero quindi

$$L = \sqrt{PB^2 - PA^2} = \sqrt{PB^2 - \left(\frac{PB}{2}\right)^2} = \frac{PB}{2} \cdot \sqrt{3}$$

da cui

$$PB = \frac{2L}{\sqrt{3}} \quad \text{e } PA = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Poi calcolo

$$PD = L - PA = L - \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Noto che i triangoli PAB e [[PBQ]] [PDQ] sono simili avendo i 3 angoli uguali quindi vale la:
PD : PA = DQ : AB da cui

$$DQ = \frac{(PD \cdot AB)}{PA} = L \cdot \sqrt{3} - L$$

e

$$QC = L - DQ = L \cdot (2 - \sqrt{3})$$

detto α l'angolo CBQ e *β* l’angolo QBP si ha che

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{QC}{BC}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{L.(2-\sqrt{3})}{L}\right) = 15^o$
e

$\beta = 90 - 30 - \alpha = 45^o$.