FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

Flatlandia – Problema 10 – 30 aprile 2022 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

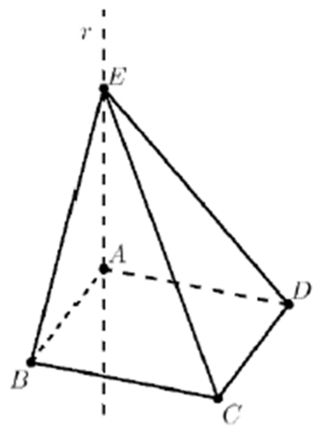
Sia $ABCD$ un quadrato.

a) Nel punto A condurre la retta r perpendicolare al piano del quadrato. Detto E un punto qualunque della retta r, diverso da A (vedi figura), dimostrare che la superficie laterale della piramide $ABCDE$ è formata da due coppie di triangoli rettangoli congruenti.

b) Se il segmento AE è congruente al lato del quadrato, di misura 1, determinare la superficie totale e il volume della piramide $ABCDE$.

c) Mostrare che con tre piramidi congruenti a quella descritta nel precedente punto b) è possibile formare un cubo.

Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto 8 risposte, tutte da classi di Liceo scientifico.

Il problema chiedeva di costruire una piramide e di dimostrare che la superficie laterale è formata da due coppie di triangoli rettangoli congruenti. Nella seconda parte occorreva esaminare un caso particolare di questa piramide e nella terza parte si chiedeva di verificare che, disponendo in modo opportuno tre piramidi congruenti a questa, è possibile ottenere un cubo.

Le risposte arrivate sono tutte sostanzialmente corrette. L'unica cosa da notare è che il "Teorema di Pitagora" è un risultato valido solo nei triangoli rettangoli, mentre per provare che un triangolo, noti i suoi lati, è rettangolo si usa "l'inverso del Teorema di Pitagora", ossia "se la somma dei quadrati dei lati minori è uguale al quadrato del lato maggiore (la cosiddetta "relazione pitagorica"), allora il triangolo è rettangolo e il lato maggiore ne è l'ipotenusa" .

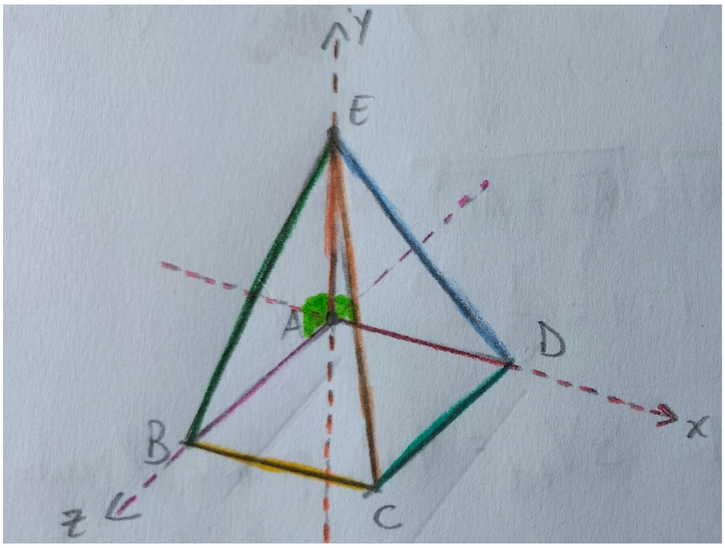
Sono arrivate risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):

- Liceo Scientifico "Carlo Jucci", Rieti
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria
- I.I.S. "Majorana-Corner", Mirano (VE)
- I.I.S. "A. Badoni", Liceo Scientifico, Lecco
- Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento
- Liceo Scientifico "Barsanti e Matteucci", Viareggio (LU), 2 soluzioni
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara.

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione inviata da Gabriele Scopel, classe II sezione B, Liceo Scientifico "Carlo Jucci" di Rieti



Punto a)

- Dimostrare che $ABE \cong ADE$
  1. $AB \cong AD$ per ipotesi;
  2. $AE \cong AE$;
  3. $BAE = DAE = \frac{\pi}{2}$ per ipotesi

  $\Rightarrow ABE \cong ADE$ per il secondo criterio di congruenza
  $\Rightarrow BE \cong DE$
- Dimostrare che $BCE \cong DCE$
  1. $BC \cong DC$ per ipotesi;
  2. $BE \cong DE$ per precedente dimostrazione;
  3. $EC \cong EC$

  $\Rightarrow BCE \cong DCE$ per il terzo criterio di congruenza

QED

Punto b)

$$AB = BC = CD = DA = AE = 1\,u \Rightarrow BE = DE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{2}\,u$$

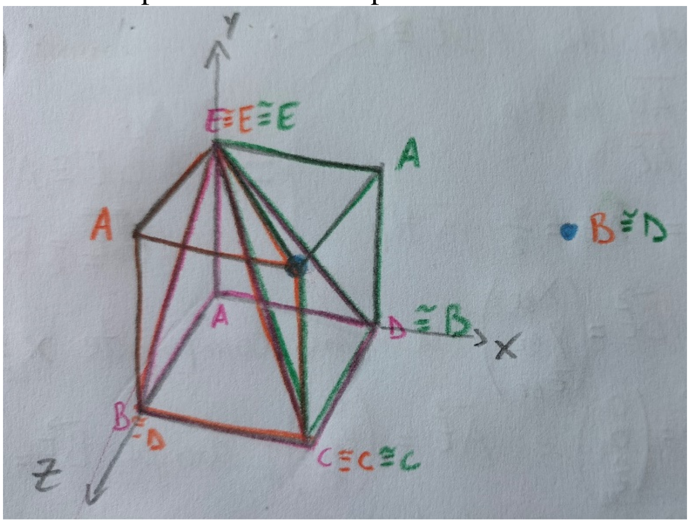
$$S_{tot} = S_l + S_b = 2(S_{ABE} + S_{EBC}) + S_{ABCD} = 2\left(\frac{1\times 1}{2} + \frac{1\times\sqrt{2}}{2}\right) + 1^2 = (2+\sqrt{2})\, u^2$$

[Bisognerebbe prima provare che EBC e EDC sono triangoli rettangoli]

$$V_{tot} = \frac{1}{3} S_b \times h = \frac{1}{3} 1^2 \times 1 = \frac{1}{3}\, u^3$$

Punto c)

Innanzi tutto, si verifica che $3V_{tot} = 1\, u^3$, quindi il cubo ha lato $1\, u$.
Per comporre il cubo è necessario sovrapporre le facce triangolari non isosceli (BEC e DEC) di due piramidi, in modo che la prima delle due coincida con la seconda. Un procedimento analogo per incastrare la terza piramide alle due precedenti.

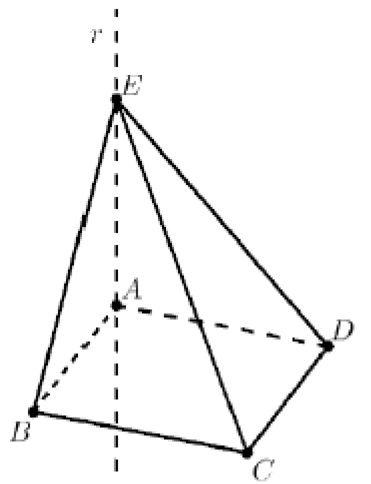


Si può altrimenti impostare un sistema di coordinate che abbia l'origine nel vertice A di una delle tre piramidi, e che abbia come versori $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ rispettivamente i vettori $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}$ (di lunghezza unitaria per ipotesi). La prima piramide si dispone con $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. La seconda avrà il vertice $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, la base $ABCD \parallel xy$ e il vertice $C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Analogamente, la terza avrà il vertice $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, la base $ABCD \parallel yz$ e il vertice $C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Se tutto è fatto bene, dovrebbe risultare $EC \cong EC \cong EC$.

Le tre piramidi formano ora un cubo di lato unitario; a seguito le coordinate dei vari vertici delle piramidi (e quindi del cubo):

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} A$	$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} C, C, C$
$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} D, B$	$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} A$
$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} E, E, E$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} B, D$
$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} B, D$	
$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} A$	

2) Soluzione inviata da Andrea Papillo, Carlo Garau, Sofia Caiazza e Giada Pieri, 1B - Liceo potenziato di Matematica, Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria (AL).



Ipotesi:
ABCD è un quadrato;
la retta r è perpendicolare al piano
Tesi (punto a):

1) $EAD \cong EAB$ triangoli rettangoli
2) $EBC \cong EDC$ triangoli rettangoli

Dimostrazione

1) Si tratta di triangoli rettangoli in quanto $EA \perp ABCD$;
   AB=AD e EA è in comune perciò in base ai criteri di congruenza possiamo affermare che siano due triangoli congruenti.
2) Sono due triangoli congruenti per il terzo criterio di congruenza in quanto:
   a. EC è in comune;
   b. BC e CD sono lati del quadrato di base;
   c. sappiamo che ED e EB sono lati dei due precedenti triangoli.

   Il triangolo EBC è rettangolo (e quindi anche EDC a esso congruente) per l'inverso del teorema di Pitagora: detti l il lato del quadrato di base e h l'altezza della piramide si ha che:

$$\overline{EC}^2 = \left(l\sqrt{2}\right)^2 + h^2 = 2l^2 + h^2$$
$$\overline{BC^2} = l^2$$
$$\overline{EB^2} = l^2 + h^2$$

Pertanto:

$$\overline{BC^2} + \overline{EB^2} = 2l^2 + h^2 = \overline{EC}^2$$

Punto b: per ipotesi $h = AE = AB = l = 1$

$$S = l^2 + 2\left(\frac{1}{2}lh\right) + 2\left(\frac{1}{2}l\sqrt{l^2 + h^2}\right) = 1 + 1 + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}.$$
$$V = \frac{1}{3}l^2h = \frac{1}{3}$$

Punto c:

Si riporta la costruzione grafica mediante simmetria planare

Figura 1: ricostruzione della piramide

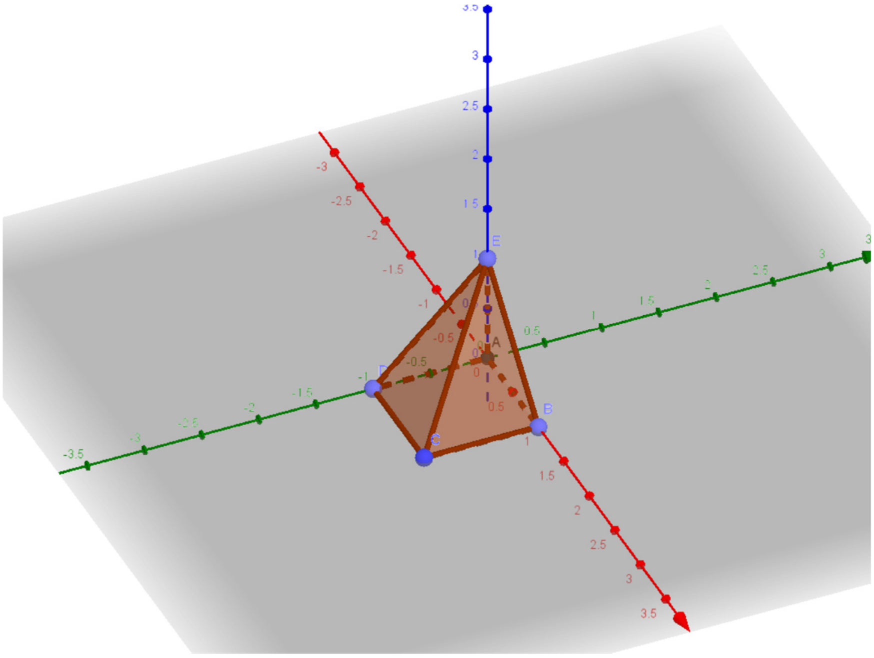


Figura 2: prima simmetria planare della figura di partenza rispetto alla faccia ECD

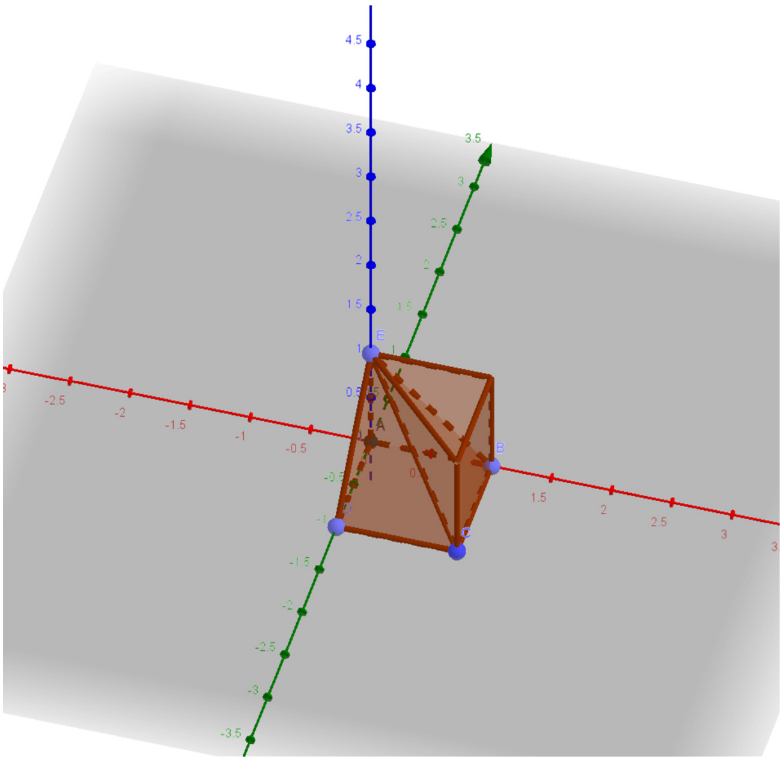
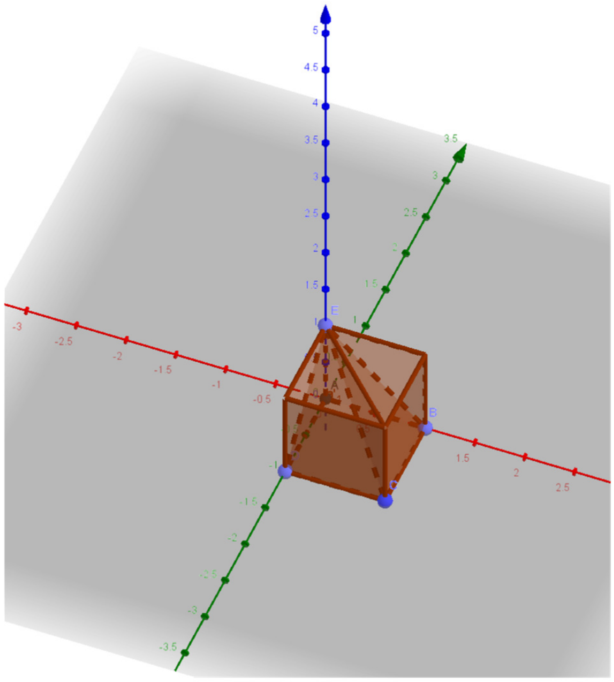
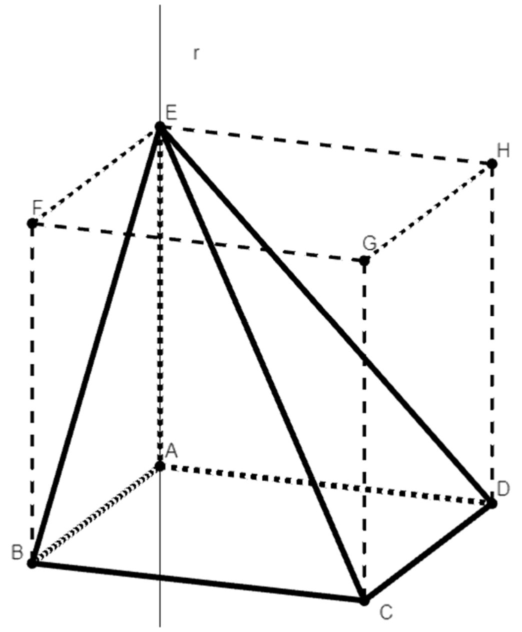


Figura 3: seconda simmetria planare della figura di partenza rispetto alla faccia EBC che completa la figura costruendo un cubo



3) Soluzione inviata da Aldo Coletta, classe 3C, Liceo Scientifico “G. Rummo”, Benevento (BN)



Ipotesi:

- ABCD è un quadrato
- E ∈ r
- r ⊥ piano di ABCD

Richieste:
a) Dimostrare che le facce laterali della piramide ABCDE sono triangoli rettangoli a due a due congruenti.
b) Calcolare superficie totale e volume della piramide ABCDE per $\overline{AE}$=$\overline{AB}$=$\overline{BC}$=$\overline{CD}$=$\overline{AD}$=1.
c) Dimostrare che con tre piramidi congruenti a quella prima descritta, è possibile formare un cubo.

Dimostrazione:
a) Consideriamo i triangoli EAB e EAD. Essi sono rettangoli in quanto $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ ⊥ $\overline{EA}$ per costruzione. Inoltre essi hanno: $\overline{EA}$ in comune, $\overline{AB}$=$\overline{AD}$ per ipotesi ed $\overline{EB}$=$\overline{ED}$ essendo $\overline{EB}$ = $\sqrt{AE^2+AB^2}$, $\overline{ED}$ = $\sqrt{AE^2+AD^2}$ ma $\overline{AD}$=$\overline{AB}$ per ipotesi. Per il terzo criterio di congruenza dei triangoli dunque EAB≅EAD [erano sufficienti i due cateti congruenti].
Prendiamo ora in considerazione il triangolo EBC. Il segmento $\overline{BC}$ è per costruzione, perpendicolare ad $\overline{AB}$. Essendo il vertice E appartenente alla retta perpendicolare al piano ABC e passante per A, la sua posizione sulla retta, non determinerà alcun tipo di variazione all’angolo $\widehat{EBC}$, che manterrà il valore costante di 90°, ma inciderà sull’ampiezza dell’angolo $\widehat{EBA}$ (che al caso limite $\widehat{EBA}$=0°, porta all’identificazione di E con A e quindi una conferma e un chiarimento dell’effettiva perpendicolarità tra i due segmenti $\overline{EB}$ e $\overline{BC}$). In altri termini $\widehat{EBC}$ = 90° essendo la retta BC perpendicolare al piano EBA [non molto chiaro !].
Discorso analogo vale sul triangolo EDC.
A questo punto non resta che dimostrare la congruenza tra EBC ed ECD.
Come affermato prima $\overline{EB}$=$\overline{ED}$, $\overline{BC}$=$\overline{CD}$ per ipotesi, inoltre i triangoli hanno $\overline{EC}$ in comune. Per il terzo criterio di congruenza dei triangoli dunque ECB ≅ECD.

b) Consideriamo ora $\overline{AE}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}=1$.
Per il calcolo della superficie totale possiamo sfruttare quanto dimostrato in precedenza e definirla come

$S_{TOT} = S_{ABCD} + 2 * S_{ABE} + 2 * S_{EBC}$

$S_{ABCD} = AB^2 = 1^2 = 1$

$S_{ABE} = \frac{AB^2}{2}$ (essendo $\overline{AB}=\overline{AE}$) $= \frac{1}{2}$

$S_{EBC} = \frac{BC*EB}{2} = \frac{BC*\sqrt{AB^2+AE^2}}{2} = \frac{BC*\sqrt{2AB^2}}{2} = \frac{BC*AB\sqrt{2}}{2} = \frac{1*1\sqrt{2}}{2}$

$S_{TOT} = 1 + 2 * \frac{1}{2} + 2 * \frac{1*1\sqrt{2}}{2} = 1+1+1\sqrt{2} = 2+\sqrt{2}$

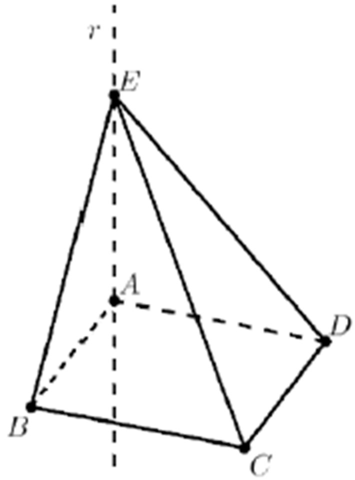
Per il calcolo del volume totale invece possiamo usare la classica formula generale per le piramidi, che in effetti troverà dimostrazione (per questo caso specifico) nel punto successivo.

$V_{TOT} = \frac{S_{ABCD} * AE}{3} = \frac{1*1}{3} = \frac{1}{3}$

c) Immaginiamo di costruire un solido partendo dalla piramide data. Definiamo dunque il piano parallelo al piano ABCD e passante per E. Alzando poi i punti i B, C e D perpendicolarmente al piano iniziale, essi incontrano il nuovo piano nei punti F, G ed H. Il solido così costruito, sarà un cubo, avendo come base un quadrato (ABCD) e un'altezza pari al lato del quadrato stesso. Consideriamo ora però la piramide di base GCDH con vertice E. Essa è in effetti congruente alla piramide iniziale, avendo stessa base (ABCD ≅ CDGH essendo quadrati con stesso lato), stessa altezza ($\overline{EH} = \overline{AD} = \overline{AE}$ per costruzione), e vertice sulla retta perpendicolare al piano di base e passante per uno dei vertici della base stessa. Lo stesso ragionamento vale con la piramide di base FBCG e vertice E. Ecco che quindi con tre piramidi congruenti e rispettanti le condizioni date, è possibile costruire un cubo.

CVD.

4)Soluzione proposta da Michele Gini e Gabriele Scaggiante, classe 4C, Liceo scientifico corso ordinamentale, I.I.S. "Majorana-Corner", Mirano (VE).



Svolgimento:

a) I triangoli EAB e EAD hanno il lato EA in comune e AB e AD congruenti in quanto lati del quadrato di base. I triangoli EAB ed EAD hanno inoltre due angoli congruenti, EÂD e EÂB. Tali angoli sono entrambi retti in quanto la retta r è perpendicolare al piano del quadrato, e forma dunque degli angoli retti con tutte le rette del piano passanti per il piede A della perpendicolare. BA e AD passano per il piede A della perpendicolare r al piano del quadrato, quindi AB e AD sono perpendicolari ad AE. Dunque $E\hat{A}B$ e $E\hat{A}D$ sono retti e congruenti.

Il triangolo EAB e il triangolo EAD sono dunque congruenti per il [primo] [[secondo]] criterio di congruenza dei triangoli. Sono anche due triangoli rettangoli, in quanto $E\hat{A}B$ e $E\hat{A}D$ sono angoli retti.

I triangoli EBC e ECD hanno i lati BC e CD congruenti in quanto lati del quadrato ABCD, EC in comune e BE congruente a ED in quanto lati corrispondenti dei triangoli congruenti EAB e EAD. I due triangoli EBC ed ECD hanno tutti i lati congruenti e sono quindi a loro volta congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli.

Dobbiamo inoltre dimostrare che i due triangoli, EBC ed ECD, sono rettangoli e in particolare che l'angolo $E\hat{B}C$, congruente a $E\hat{D}C$, è un angolo retto.

Proponiamo due possibili metodi per svolgere questa dimostrazione.

1° metodo

Siccome EAB è un triangolo rettangolo, con $E\hat{A}B$ retto, secondo quanto dimostrato precedentemente, si ha che AB è perpendicolare ad AE. Inoltre BC è perpendicolare ad AB poiché $A\hat{B}C$ è retto in quanto angolo del quadrato ABCD. Per il teorema delle tre perpendicolari risulta quindi che BC è perpendicolare al piano individuato da AB e AE, ovvero il piano ABE.

Quindi, siccome BC è perpendicolare al piano ABE, e siccome BE giace sul piano ABE e passa per il piede B della perpendicolare BC al piano stesso, si ha che BC è perpendicolare a BE. Abbiamo pertanto dimostrato che il triangolo EBC è rettangolo, poiché EB e BC sono perpendicolari e quindi l'angolo $E\hat{B}C$ è retto.

Siccome il triangolo EDC è congruente a EBC, anche EDC è un triangolo rettangolo.

Abbiamo dunque dimostrato che la superficie laterale della piramide ABCDE è costituita da due coppie di triangoli rettangoli tra loro congruenti.

2° metodo

In alternativa, è possibile dimostrare che nel triangolo EBC vale [corrige: la relazione pitagorica] [[errata: il teorema di Pitagora]] e che quindi il triangolo EBC è rettangolo.
Detta l la misura del lato del quadrato ABCD (quindi $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = l$) ed h la misura di AE (quindi $\overline{AE} = h$), calcoliamo le misure di alcuni segmenti.
Calcoliamo la misura della diagonale AC del quadrato: $\overline{AC} = \overline{AB}\sqrt{2} = l\sqrt{2}$.

Considerando il triangolo rettangolo EAB calcoliamo quindi il quadrato della misura del segmento EB (che è l'ipotenusa del triangolo) con il teorema di Pitagora.
$\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 = l^2 + h^2$

AC è perpendicolare a AE poiché AC passa per il piede A della perpendicolare r al piano del quadrato ABCD, cui la diagonale AC appartiene. Quindi l'angolo $E\hat{A}C$ è retto e dunque il triangolo EAC è rettangolo. Usiamo allora il teorema di Pitagora per calcolare la misura di EC. $\overline{EC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AE}^2 = (l\sqrt{2})^2 + h^2 = 2l^2 + h^2$

Consideriamo ora il triangolo EBC e verifichiamo se vale [corrige: la relazione pitagorica] [[errata: il teorema di Pitagora]].
Deve essere: $\overline{BC}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{EC}^2$
Sostituiamo i valori precedentemente trovati delle misure di questi tre lati e verifichiamo se vale il teorema di Pitagora.
$l^2 + (h^2 + l^2) = 2l^2 + h^2 \rightarrow l^2 + h^2 + l^2 = 2l^2 + h^2 \rightarrow\ 2l^2 + h^2 = 2l^2 + h^2$
L'uguaglianza è vera, pertanto è verificata [la relazione pitagorica] [[il teorema di Pitagora]] e il triangolo EBC è rettangolo.
Siccome EDC è congruente a EBC, anche EDC è un triangolo rettangolo.

Abbiamo dunque dimostrato che la superficie laterale della piramide ABCDE è costituita da due coppie di triangoli rettangoli tra loro congruenti.

b) La superficie totale della piramide è data dalla somma dell'area di base e dell'area della superficie laterale.
Per calcolare la superficie laterale della piramide, non essendo questa retta, dobbiamo necessariamente calcolare la somma delle aree di ciascuna faccia della piramide. Possiamo tuttavia sfruttare il fatto che la superficie laterale della piramide ABCDE è costituita da due coppie di triangoli rettangoli tra loro congruenti.
L'area del triangolo ABE vale $A_{ABE} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AE}}{2} = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, ed è pari all'area del triangolo ADE, essendo i due triangoli congruenti.

Per calcolare l'area del triangolo EBC abbiamo bisogno di trovarne l'altezza, che abbiamo dimostrato essere BE, in quanto EBC è un triangolo rettangolo, con $E\hat{B}C$ retto. BE è anche ipotenusa del triangolo rettangolo ABE, e può dunque essere calcolata utilizzando il teorema di Pitagora:

$\overline{\mathrm{BE}} = \sqrt{\overline{AB^2} + \overline{\mathrm{AE}^2}} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Pertanto l'area del triangolo EBC equivale a $A_{EBC} = \frac{\overline{\mathrm{BC}} \cdot \overline{\mathrm{BE}}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ed è pari all'area del triangolo EDC in quanto i due triangoli sono congruenti.

La superficie totale della piramide è data dalla somma delle aree delle singole facce:

$$S_{tot} = A_b + A_{ABE} + A_{ADE} + A_{EBC} + A_{ECD} = A_b + 2 \cdot A_{ABE} + 2 \cdot A_{EBC} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

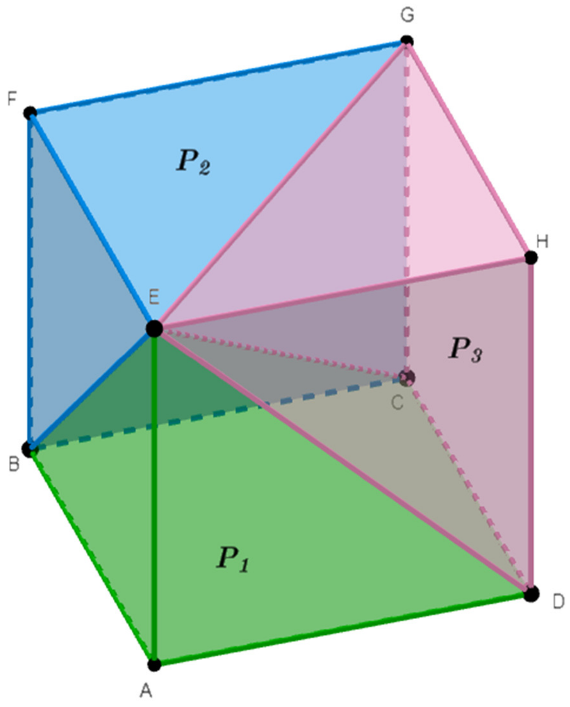
$$S_{tot} = 1 + 1 + \sqrt{2}$$

$$S_{tot} = 2 + \sqrt{2}$$

Per calcolare il volume della piramide, possiamo utilizzare la formula $V_p = \frac{A_b \cdot h}{3}$, dove A_b è l'area del poligono di base (ovvero il quadrato ABCD, di lato di misura 1) e h l'altezza della piramide (anch'essa di misura 1). Si ottiene dunque:

$$V_p = \frac{1^2 \cdot 1}{3} = \frac{1 \cdot 1}{3} = \frac{1}{3}$$

c) Oltre alla piramide ABCDE (di base ABCD) di partenza, consideriamo le due piramidi BCGFE (di base BCGF) e la piramide CDHGE (di base CDHG) ad essa congruenti, con spigolo del quadrato di base di misura 1 e altezza di misura 1.



Le basi delle tre piramidi sono dei quadrati congruenti, in quanto le tre piramidi sono tra loro congruenti [in modo diretto]. Anche le altezze delle tre piramidi sono tra loro congruenti.
Chiamiamo P_1 la piramide ABCDE (in verde nel disegno), P_2 la piramide BCGFE (in azzurro nel disegno), e P_3 la piramide CDHGE (in rosa nel disegno).
Dobbiamo dimostrare che con le tre piramidi P_1, P_2e P_3 è possibile formare un cubo.

Sovrapponiamo le facce BEC delle piramidi P_1e P_2; poi sovrapponiamo le facce CED delle piramidi P_1e P_3. In tal modo vengono a coincidere anche le facce CEG delle piramidi P_2e P_3.

Abbiamo ottenuto la figura solida ABCDEFGH, che ha 6 facce.

Le facce ABCD, BCGF e CDHG sono quadrati tra loro congruenti in quanto facce di base delle piramidi congruenti P_1, P_2e P_3.

Dobbiamo dimostrare che le facce ABFE, la faccia ADHE e la faccia EFGH sono quadrati tra loro congruenti e sono congruenti alle altre 3 facce di cui si è appena dimostrata la congruenza.
Per dimostrare ciò, dobbiamo dimostrare che i quattro lati sono congruenti e che i 4 angoli sono retti.

Consideriamo la faccia ADHE; sappiamo che i lati AD e DH valgono uno e sono congruenti in quanto lati di base delle piramidi P_1e P_3; anche i lati AE e AH valgono uno e sono congruenti in quanto altezze delle piramidi P_1e P_3. Quindi i lati del quadrilatero ADHE sono tutti congruenti e di misura 1.
Dobbiamo ora dimostrare che gli angoli sono retti. Sappiamo che gli angoli $E\hat{A}D$ e $E\widehat{H}D$ sono retti in quanto le altezze delle due piramidi sono perpendicolari ai piani di base (confronta dimostrazioni precedenti). Anche gli altri due angoli della figura ADHE sono retti in quanto somma di due angoli di 45°, infatti i triangoli EAD ed EDH sono triangoli rettangoli isosceli e hanno dunque angoli alla base di 45°. Quindi ADHE è un quadrato, poiché ha 4 lati congruenti, di misura 1, e 4 angoli retti.

Facciamo analoghi ragionamenti per le facce ABFE e EFGH. Sono tutte quadrati tra loro congruenti e con il lato di misura 1.

Dimostriamo inoltre che i piani su cui giacciono facce contigue sono tra loro perpendicolari. Consideriamo il diedro individuato dai piani ABCD e CDGH. I due piani sono tra loro perpendicolari se la sezione normale del diedro è un angolo retto. La sezione normale è l'angolo individuato da un piano perpendicolare allo spigolo del diedro. Possiamo per questo utilizzare il piano BCGF. L'angolo individuato da questo piano sul diedro è l'angolo $B\hat{C}G$. Sappiamo che tale angolo è retto in quanto angolo del quadrato BCGF. Quindi i piani ABCD e CDGH sono tra loro perpendicolari. Analoghi ragionamenti possono essere fatti per tutte le facce contigue.

Il solido ABCDEFGH è quindi formato da 6 facce quadrate tra di loro congruenti; inoltre i piani su cui giacciono le facce contigue sono tra loro perpendicolari. Concludiamo dunque che il solido è un cubo.
Abbiamo quindi dimostrato che con 3 piramidi congruenti a quella descritta nel punto b) è possibile realizzare un cubo.

5) Soluzione proposta da Edoardo Di Manno, 2a E, Liceo Scientifico “Barsanti-Matteucci”, Viareggio (LU)

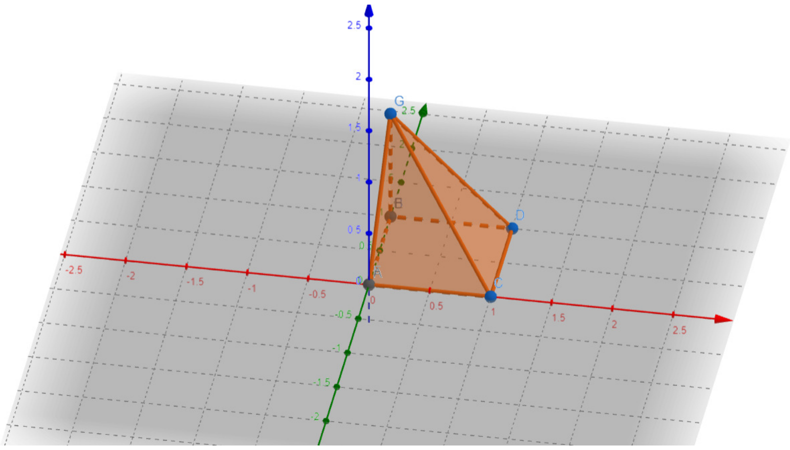
Dimostrazione:
ABCD quadrato
$\overline{AB}$ = x di conseguenza $\overline{AB}$=$\overline{BC}$=$\overline{CD}$=$\overline{DA}$=x
$\overline{AE}$ = l
Applico il teorema di Pitagora al triangolo ABE:
$\overline{EB} = \sqrt{x^2 + l^2}$
Applico il teorema di Pitagora al triangolo ADE:
$\overline{ED} = \sqrt{x^2 + l^2}$
Di conseguenza EB ≅ ED per proprietà transitiva
Considero i triangoli ABE e ADE essi hanno:

- AB ≅ AD perché lati di uno stesso quadrato
- AE in comune
- EB ≅ ED per precedente dimostrazione

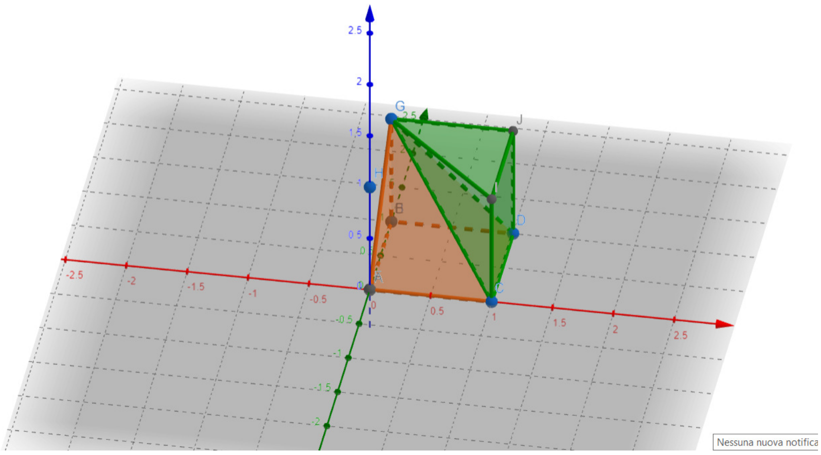
DI conseguenza ABE ≅ ADE per il terzo criterio di congruenza
EB ⊥ BC, poiché BE appartiene al piano passante per AB e perpendicolare al quadrato
Ugualmente si dimostra che ED ⊥ CD
Considero i triangoli EDC e BCE essi hanno:
BC ≅ CD perché lati di uno stesso quadrato
$\widehat{EBC} \cong \widehat{EDC} \cong 90°$ per precedente dimostrazione
EB ≅ ED per precedente dimostrazione
Di conseguenza EDC ≅ BCE per il primo criterio di congruenza.

$\overline{AB}$=$\overline{BC}$=$\overline{CD}$=$\overline{DA}$=$\overline{AE}$=1
Per la formula $\overline{EB} = \sqrt{x^2 + l^2}$ allora $\overline{EB} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
Superfice [totale] [[errata: laterale]]= 2AEAB + 2AEBC + AABCD
2AEAB + 2AEBC + AABCD = 2($\overline{AE}$x$\overline{AB}$):2 + 2($\overline{EB}$x$\overline{BC}$):2 + ($\overline{AB}$x $\overline{AB}$) = 1+$\sqrt{2}$ +1 = 2 + $\sqrt{2}$
V= (AABCD x $\overline{AE}$):3 = 1/3
Poiché il volume di ABCDE è uguale a 1/3 mettendo 3 piramidi congruenti insieme avremo: (1/3) x 3 =1, quindi avremo un solido di volume 1, con base quadrata di superficie 1 e altezza 1. Perciò si tratta di un cubo di lato 1. [occorreva spiegare meglio la congruenza delle 3 piramidi]
Quest’ultimo punto è verificabile anche graficamente con GeoGebra:

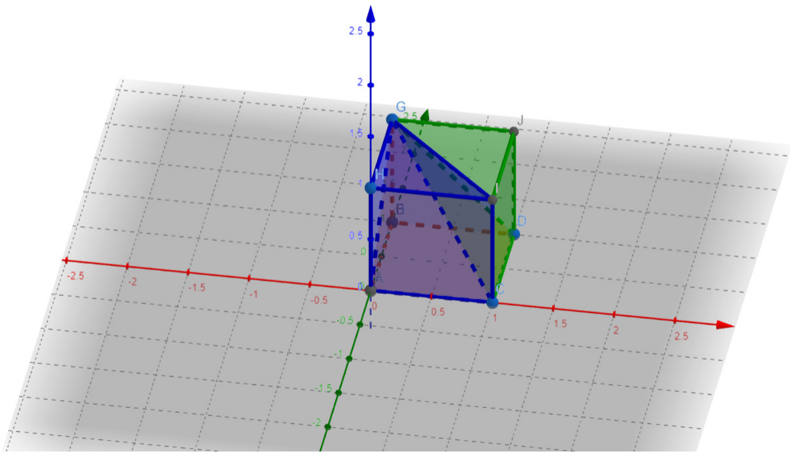
1. Costruisco la piramide come indicato



2. Costruisco una seconda piramide congruente e appoggio un suo lato obliquo su un lato obliquo della prima piramide



3. Sull’altro lato obliquo appoggio il lato obliquo di un’ultima piramide congruente



- Abbiamo quindi, poiché gli angoli sovrapposti sono di 45°, un cubo formato da tre piramidi di volume pari a 1/3

a = Piramide(F, C, D, B, G)
→ 0.33

b = Piramide(C, D, J, I, G)
→ 0.33

c = Piramide(F, H, I, C, G)
→ 0.33

6) Soluzione inviata da Filippo Chiappini, 1D, Liceo Scientifico "Barsanti e Matteucci", Viareggio (LU)

Hp (a):
$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$
$\widehat{ABC} \cong \widehat{BCD} \cong \widehat{CDA} \cong \widehat{DAB}$
$r \perp ABCD$

Hp (b,c):
$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA} \cong \overline{AE} = 1$

Th (a):
$\widehat{EAB} \cong \widehat{EAD} \cong \widehat{EBC} \cong \widehat{EDC} = 90°$
$EAB \cong EAD$
$EBC \cong EDC$

Th (b):
ST=?
V=?

Dimostrazione:
Punto a:
$\widehat{EAB} \cong \widehat{EAD} = 90°$ perché $r \perp ABCD$ per ipotesi
$\widehat{EBC} \cong \widehat{EDC} = 90°$ perché $\widehat{EBC} \cong \widehat{ABC}$, dato che $E, A \in r$ e il vertice (B) e un lato $(\overline{BC})$ sono in comune (deduzione logica); il ragionamento è il medesimo per $\widehat{EDC}$. [poco chiaro !]
$EAB \cong EAD$ perché $\overline{AE}$ è in comune, $\overline{AB} \cong \overline{DA}$ per ipotesi, $\widehat{EAB} \cong \widehat{EAD}$ perché $r \perp ABCD$ (primo criterio di congruenza)
$EBC \cong EDC$ perché $\widehat{EBC} \cong \widehat{EDC} = 90°$, $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ per ipotesi ed $\overline{EC}$ è in comune (criterio di congruenza per i triangoli rettangoli).

Punto b:

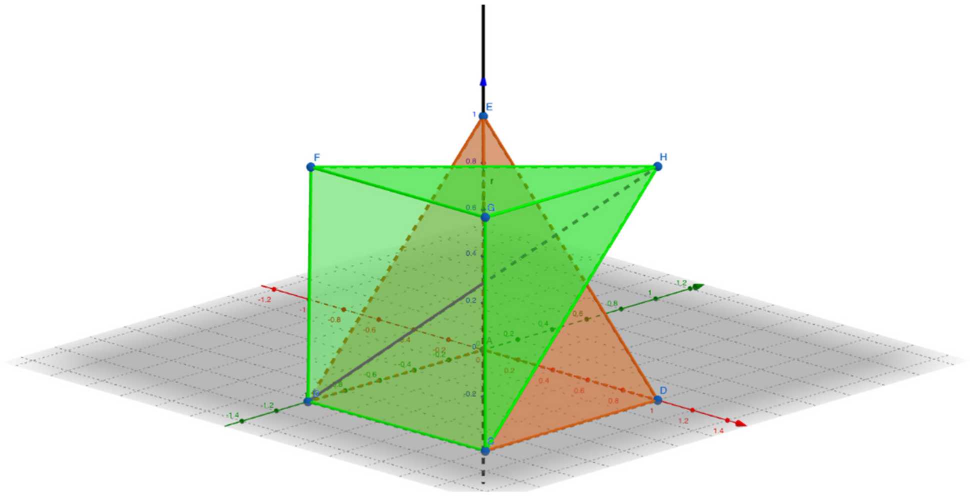
$$ST = A_{ABCD} + 2A_{EAB} + 2A_{EBC} = 1^2 + 2\frac{1 * 1}{2} + 2\frac{\sqrt{1^2 + 1^2} * 1}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$V = \frac{A_{ABCD} * h}{3} = \frac{1*1}{3} = \frac{1}{3}$$

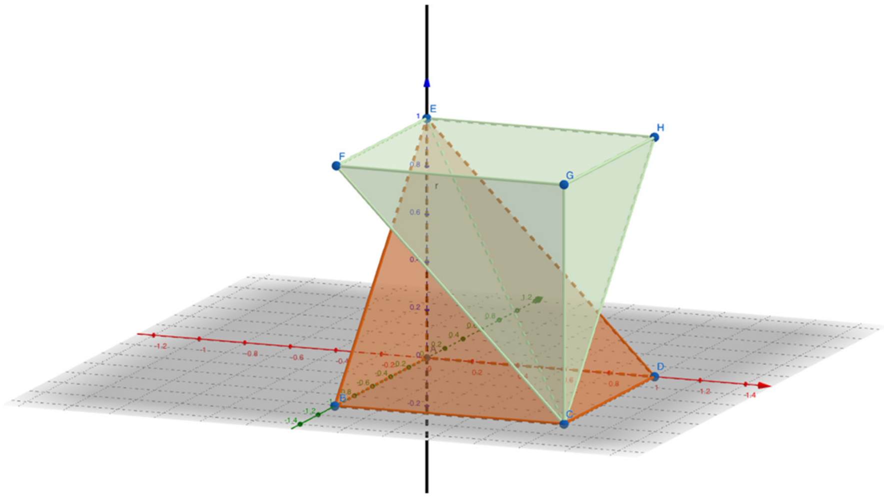
Punto c:
Insieme al disegno realizzato su GeoGebra ho illustrato il ragionamento che mi ha portato alla soluzione:

- Se il cubo è formato da 3 piramidi congruenti alla prima, ha $V = \frac{3*1}{3} = 1$ e spigolo congruente ai lati del quadrato $ABCD$.

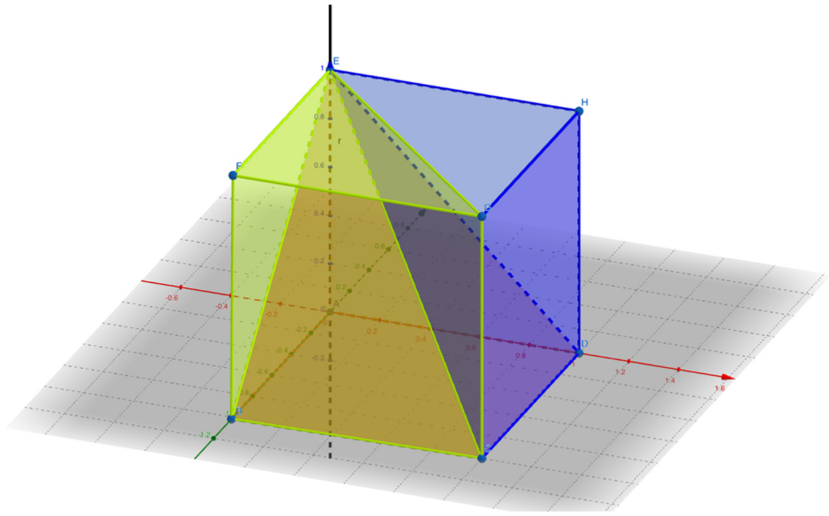
- Di conseguenza, la diagonale del cubo ($\overline{EC}$ in figura) sarà congruente all'ipotenusa di EBC, quindi $\sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Sapendo che le diagonali del cubo sono 4, i segmenti congruenti ad $\overline{EC}$ possono essere ["arrangiati"] in altri 3 modi:



Se il segmento è $\overline{BH}$, non importa come viene costruita la piramide di conseguenza, non è possibile disegnarne una terza; lo stesso vale se il segmento è $\overline{DF}$.
Il segmento non può essere sicuramente $\overline{AG}$, dato che sarebbe incidente ad $\overline{EC}$.
Da questo si deduce che $\overline{EC}$ deve essere comune per tutte e 3 le piramidi.
- Essendo quindi il segmento $\overline{EC}$, le basi delle due piramidi possono essere $FGCB, EFGH, GCDH$.



Se una base è $EFGH$, completata la piramide non c'è spazio per nessun altro quadrato congruente ad $ABCD$, quindi le basi devono essere $FGCB$ e $GCDH$.
- Costruite le piramidi di conseguenza, si ottiene questo:



7) Soluzione proposta da Andrea Donato, Diego Colombo, Classe: 3^A Liceo Scientifico delle Scienze Applicate, I.I.S. “A. Badoni”, Lecco

Dimostrazione

a. Chiamiamo l il lato del quadrato e h la lunghezza di AE.

Consideriamo l’angolo $\widehat{BAE}$: esso è pari a 90° in quanto r, per ipotesi, è perpendicolare al piano su cui giace il quadrato $ABCD$. Per lo stesso motivo, $\widehat{DAE} = 90°$.
In modo analogo dimostriamo che la diagonale $AC \perp AE \Rightarrow \widehat{CAE} = 90°$.

Consideriamo ora i triangoli BAE, DAE e ACE: essi sono tutti triangoli rettangoli. In particolare, i triangoli $BAE\ e\ DAE$ sono congruenti perché aventi due lati e l’angolo compreso congruenti.

Abbiamo quindi che:
- $BE^2 = AB^2 + AE^2 = l^2 + h^2$
- $CE^2 = AC^2 + AE^2 = 2l^2 + h^2$
- $DE^2 = AD^2 + AE^2 = l^2 + h^2$

I triangoli BCE e DCE sono congruenti perché hanno tre lati congruenti.
Osserviamo che su questi due triangoli è confermata [corrige: la relazione pitagorica] [[errata: il teorema di Pitagora]], infatti

$$BE^2 + BC^2 = CE^2 \Rightarrow l^2 + h^2 + l^2 = 2l^2 + h^2$$

la superficie laterale è quindi formata dalla coppia di triangoli rettangoli congruenti BAE, DAE e dalla coppia di triangoli rettangoli congruenti BCE, DCE.

b. Ponendo $l = h = 1$:
- L’area [totale] è l’area del quadrato di base (pari a 1) sommata all’area delle due coppie di triangoli:

$$A_{BCE} = \frac{BC \cdot BE}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{BAE} = \frac{BA \cdot AE}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A_{tot} = A_{ABCD} + 2A_{BAE} + 2A_{BCE} = 1 + 2\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

Le aree di BAE e BCE vanno moltiplicate per due in quanto le aree dei triangoli DAE e DCE sono congruenti a quest’ultime.

- Il volume di una piramide è pari ad un terzo del prodotto tra l’area di base (pari a 1) e l’altezza (1):

$$V = \frac{l^2 \cdot h}{3} = \frac{1}{3}$$

c. Poniamo le piramidi in un sistema di assi cartesiani xyz. [non era necessario usare gli assi

cartesiani]
- Le tre piramidi hanno vertice nello stesso punto $E(0;0;1)$
- La base ABCD della prima piramide è posizionata in modo tale che:

$$A(0;0;0)\ \ B(1;0;0)\ \ C(1;1;0)\ D(0;1;0)$$

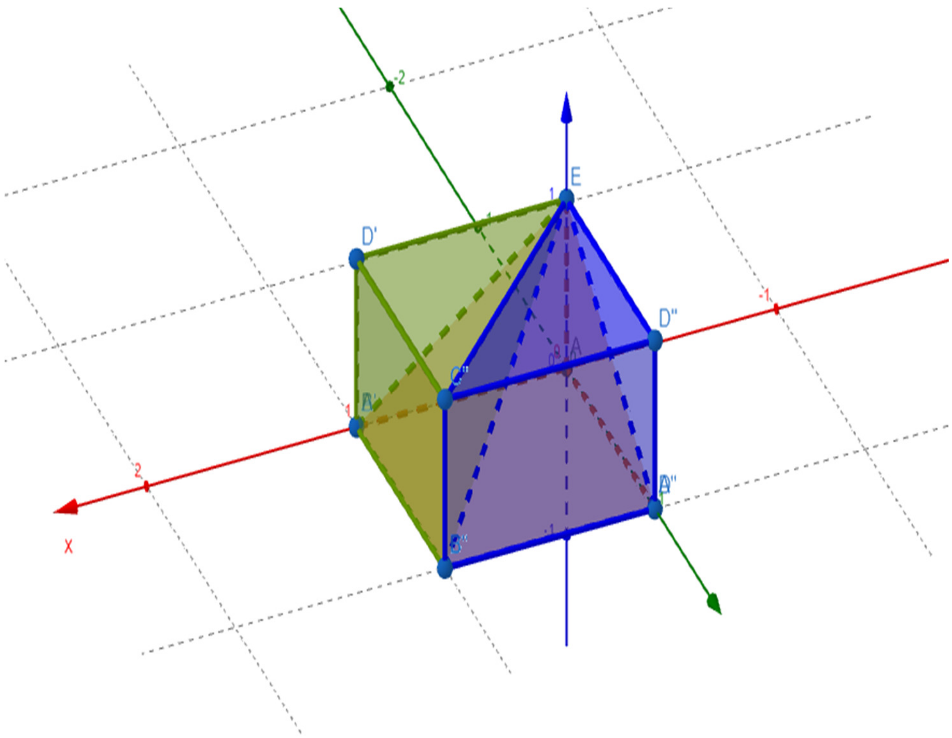
- La base A’B’C’D’ della seconda piramide è posizionata in modo tale che:

$$A'(1;0;0)\ \ B'(1;1;0)\ \ C'(1;1;1)\ D'(1;0;1)$$

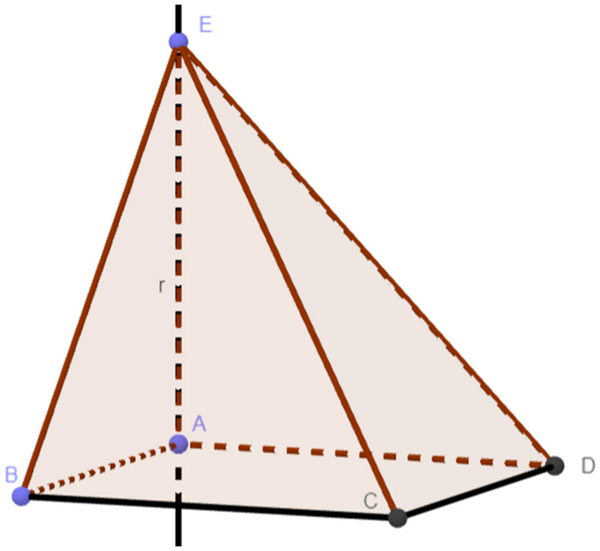
- La base A”B”C”D” della terza piramide è posizionata in modo tale che:

$$A''(0;1;0)\ \ B''(1;1;0)\ \ C''(1;1;1)\ D''(0;1;1)$$

Disponendo le piramidi nel seguente modo si ottiene un cubo.



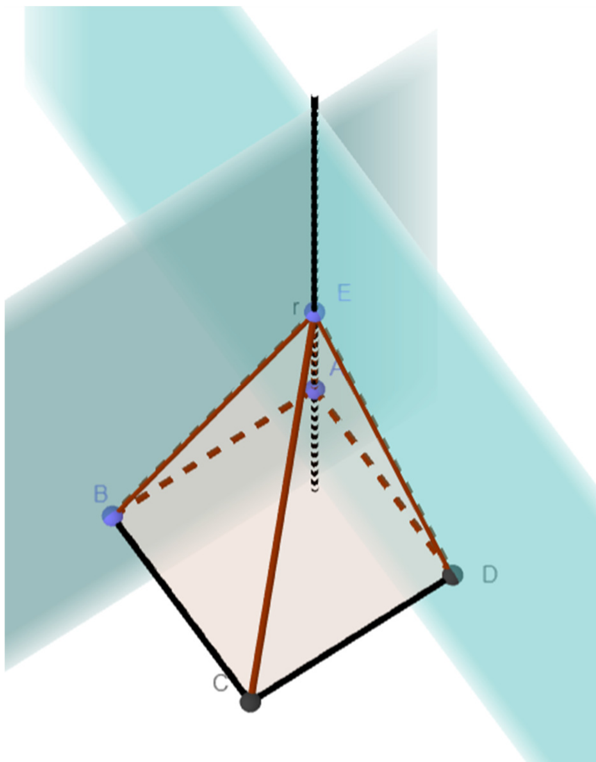
8) Andrea Di Cintio, 2^E, Liceo Scientifico “Galileo Galilei”, Pescara



IPOTESI:
ABCD quadrato
$r \perp ABCD$
$A, E \in r$
Solo per i punti b. e c. : AB≅AE=1u

TESI:
a. ABE ≅ AED, EBC ≅ ECD
b. Superficie totale = ?, [Volume] [[Area]]
   piramide = ? (con AB≅AE=1u)

DIMOSTRAZIONE:
a. Considero i triangoli ABE e ADE:
ABE, ADE triangoli rettangoli per ipotesi (BÂE ≅ DÂE = 90°);
AB ≅ AD per ipotesi (ABCD quadrato);
AE ≅ AE per lato comune;
ABE ≅ ADE per il [primo criterio] [[secondo criterio di congruenza generalizzato]].

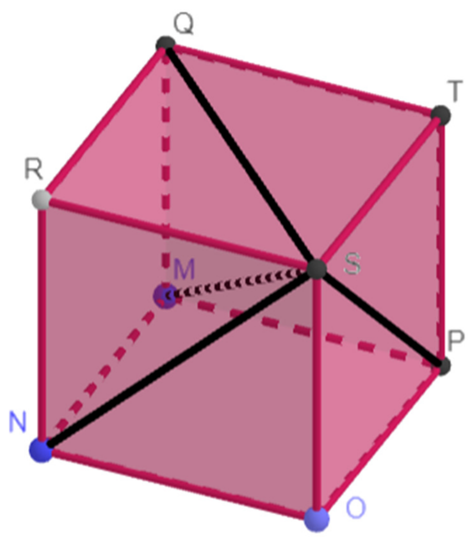


Considero i triangoli BCE e CDE:
Prima di tutto costruisco un piano a cui appartengono 3 punti non allineati: A, B, E;
Faccio lo stesso con i punti A, D, E, ottenendo due piani come in figura.
I due piani sono perpendicolari ai segmenti BC e CD, poiché sono costituiti da 2 dimensioni perpendicolari ai segmenti BC e CD (cioè la dimensione parallela alla retta r e quella parallela al segmento AD per costruzione);
Quindi, dato che i segmenti EB, ED appartengono ai semipiani prima costruiti, possiamo concludere che BCE, CDE sono triangoli rettangoli. [poco chiaro!]

BC ≅ CD per ipotesi (ABCD quadrato);
EC ≅ EC per lato comune;
BCE ≅ CDE per il secondo criterio di congruenza generalizzato.
DUNQUE:

La superficie laterale della piramide è costituita da due coppie di triangoli rettangoli congruenti, ovvero (ABE-ADE) e (BCE-CDE).

c. Per prima cosa costruisco il cubo MNOPQRST e traccio le quattro diagonali a partire dal vertice S: SN, SP, SM, SQ.
A questo punto divido il cubo secondo le diagonali tracciate in tre piramidi: MNRQS, MNOPS e QMPTS.
Esse hanno le basi congruenti, poiché sono quadrati corrispondenti a facce del cubo, e le altezze congruenti, poiché corrispondenti a lati del cubo (per costruzione).
Dunque le tre piramidi sono equivalenti [occorreva dimostrare che sono congruenti!], dato hanno le basi e le altezze relative alle basi congruenti (per il principio di Cavalieri).
E' possibile concludere, quindi, che con tre piramidi aventi come base un quadrato di lato congruente all'altezza delle piramidi e la cui proiezione dell'altezza sulla base ricade su un vertice della stessa (come quello descritto nel punto b.) è possibile formare un cubo.



b. Ritorno a considerare la piramide ABCDE (sapendo che AB ≅ AE = 1u per ipotesi): posso immediatamente calcolare la superficie totale:

$S(ABCDE) = u^2 + 2u^2/2 + 2(\sqrt{(u^2+u^2)}*u/2) = u^2 + u^2 + \sqrt{2}*u^2 = (2+\sqrt{2})u^2$

Inoltre ho dimostrato in precedenza che il volume di una piramide a base quadrata e altezza uguale al lato del quadrato di base, è uguale ad ⅓ del volume di un cubo avente il lato congruente a quello del quadrato di base della piramide.
Perciò posso applicare la seguente formula:
V(ABCDE) = (B*H)/3 = u^2*u/3 = u^3/3