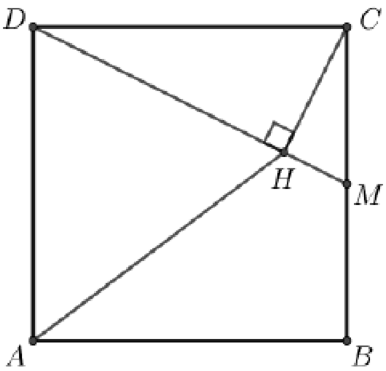
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia – Problema – 5 - 26 ottobre 2020 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Dato il quadrato $ABCD$, sia M il punto medio del lato BC. Tracciato il segmento DM e detto H il piede della perpendicolare condotta da C su DM, provare che il triangolo AHD è isoscele (vedi figura).
Motivare la risposta.



Commento

Abbiamo ricevuto sei risposte, prevalentemente da classi terze di Licei Scientifici e ITIS.
Il problema poneva un quesito relativo a un triangolo ricavato, mediante semplici costruzioni, all'interno di un quadrato. Occorreva dimostrare che tale triangolo è isoscele.
Le risposte giunte sono nella sostanza corrette e si dividono in due filoni, entrambi validi. Chi procede in maniera sintetica, ottenendo, con un ragionamento, la congruenza di due lati del triangolo, chi invece, posto L la misura del lato del quadrato, arriva a provare quanto richiesto calcolando le misure dei lati AD e AH e constatando che essi sono congruenti.

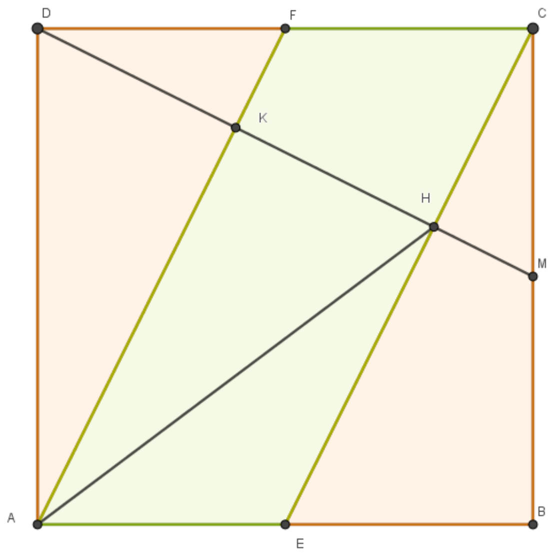
Sono pervenute risposte da studenti delle seguenti scuole:

- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)
- Liceo "Bruno - Franchetti", Mestre-Venezia
- Liceo Scientifico "G. Alessi" Perugia
- Liceo Scientifico "G.B. Morgagni", Roma
- ITIS "Galileo Galilei", Roma
- ITIS "Michele Giua", Cagliari

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

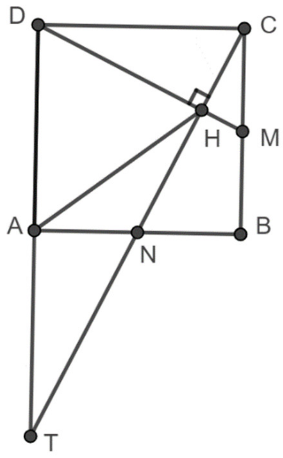
Soluzioni arrivate

1) Soluzione proposta dalla classe 3B del liceo scientifico internazionale, Liceo “Aristosseno” di Taranto



Prolunghiamo il segmento CH fino ad incontrare il lato AB del quadrato nel punto E. Tracciamo poi dal vertice A la perpendicolare al segmento DM, che incontra DM nel punto K e il lato CD nel punto F .
Il quadrilatero AECF è un parallelogramma poiché ha i lati opposti paralleli a due a due (CF parallelo ad AE perché sono sui lati CD ed AB del quadrato e AF parallelo a CE perché sono due segmenti di rette perpendicolari alla stessa retta di DM). Quindi AE è congruente a CF e CE ad AF.
I triangoli BCE e DAF sono congruenti avendo i cateti BC e AD congruenti (lati opposti del quadrato) e le ipotenuse CE e AF congruenti.
Anche i triangoli rettangoli CBE e CDM sono congruenti per avere i cateti CB e CD congruenti perché lati del quadrato, e gli angoli acuti BCE e CDM congruenti perché complementari dello stesso angolo DCH . Per la proprietà transitiva della congruenza i tre triangoli BCE, CDM e DAF sono congruenti fra loro e avendo congruenti i cateti minori sarà BE congruente a DF e anche a CM che è la metà del lato CB. Quindi i punti E ed F sono punti medi dei lati AB e CD del quadrato.
Il corollario del teorema di Talete applicato al triangolo DHC ci consente di affermare che, essendo DF congruente ad FC così anche DK è congruente a KH e quindi il segmento AK che è l’altezza relativa alla base [DH] [[AH]] del triangolo DAH è anche mediana. Questo ci assicura che il triangolo DAH è isoscele [sulla base DH].

2) Soluzione proposta da Martina Scappin, 3BSO, Liceo "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)



IPOTESI: ABCD quadrato; CM ≅ MB; CH ⊥ DM
TESI: AHD triangolo isoscele (AD ≅ AH)

DIMOSTRAZIONE:
Prolungo i segmenti CH e DA e chiamo: CN ∩ AB = {N}; CT ∩ DT = {T}

- Considero i triangoli MCD e NBC essi hanno:

Gli angoli: $C\hat{D}M \cong M\hat{C}H$ perché complementari di uno stesso angolo (DMC)
CB ≅ DC perché lati del quadrato
Gli angoli $N\hat{B}C \cong M\hat{C}D \cong 90°$ perché angoli del quadrato
=>i triangoli MCD ≅ NBC per criterio di congruenza dei triangoli rettangoli
In particolare: NB ≅ CM ≅ l/2 [lato del quadrato]

- Considero i triangoli NBC e NAT essi hanno:

gli angoli $N\hat{A}T \cong N\hat{B}C \cong 90°$ perché alterni interni delle rette parallele DT e CB tagliate dalla trasversale AB
gli angoli $T\hat{N}A \cong C\hat{N}B$ perché opposti al vertice
AN ≅ NB ≅ l/2 [lato del quadrato] per dimostrazione precedente
=> i triangoli NBC ≅ ATN per criterio di congruenza dei triangoli rettangoli
In particolare: AT ≅ CB.

- Considero il triangolo HDT esso ha:

l'angolo $T\hat{H}D \cong 90°$ perché CH ⊥ DM per ipotesi
DA ≅ AT per proprietà transitiva: DA ≅ CB perché lati del quadrato; AT ≅ CB per dimostrazione precedente;
=> DA ≅ AT
AH mediana => DA ≅ AT ≅ AH per proprietà del triangolo rettangolo
In particolare: AD ≅ AH
=> il triangolo AHD è isoscele per definizione. Cvd

3) Soluzione proposta da: Molaro Lorenzo, Cimarosto Sofia, Ferrari Alberta, Favaretto Giovanni, Greggio Alvise, Bovo Rachele, Chiaro Matteo, Classe: 2^G, Istituto di Istruzione Superiore – Liceo Scientifico "Bruno-Franchetti", sede "G.Bruno", Mestre (VE)

DIMOSTRAZIONE

Ipotesi: AB≅BC≅CD≅AD

BM≅MC

CH⊥DM

Tesi: FĤA ADF(an.)

SVOLGIMENTO:

0. Per impossibilità tecniche i triangoli sono rappresentati da un semplice accostamento di maiuscole (i vertici dello stesso), gli angoli, ove possibile da un accento circonflesso, o da un insieme di lettere maiuscole seguito dalla scritta "(an.)"

1. Traccio da A il segmento ⊥ a DM e pongo F al piede della perpendicolare. Prolungo AF fino al segmento DC e pongo K all'intersezione.

2. Considero le rette passanti per AK e CH, tagliate da quella passante per DM, esse sono:

AK ⊥ DH *per costruzione* }

DH ⊥ CH *per ipotesi* } [➡] AK // CH

3. Traccio da K il segmento ⊥ a CH e pongo E al piede della perpendicolare.

➡ KÊH ≅ KÊC ≅ π/2

4. Traccio il segmento che unisce K e H e considero le rette passanti per AK e CH e l'incidente passante per KH

AK // CH *per 2.* } angoli interi alterni: AKH(an.) KĤC

5. Considero i segmenti KE, CH, DM, essi sono:

KE ⊥ CH *per costruzione* }

CH ⊥ DM *per ipotesi* } [➡]KE // DM

6. Considero le rette passanti per KE e DM e l'incidente KH

KE // DM *per 5.* } angoli alterni interni: FĤK □ EKH(an.)

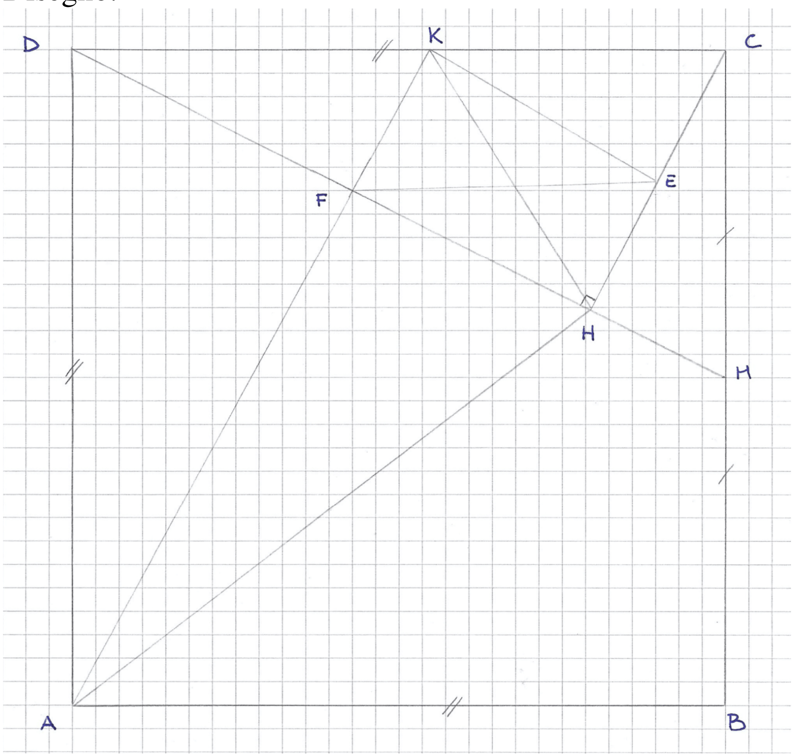
7. Considero KHF e KHE, essi hanno:
KH *in comune* }
FĤK □ EKH(an.) *per 6.* }
KÊH ≅ KFH(an.) ≅ π/2 } 2° criterio di equivalenza dei triangoli ➡
[punto 4] [[FKH(tr.) □ KĤE *sottrazione angoli congruenti]]* } ➡ KHF ≅ KHE, in particolare
KF ≅ HE

8. Traccio FE e considero FKE e HEK, essi hanno:
KE *in comune* }
[KF] [[KE]] ≅ HE *per 7.* } 1° criterio di equivalenza dei triangoli ➡
FKE(an.) ≅ KÊH ≅ π/2 } ➡ FKE ≅ HEK

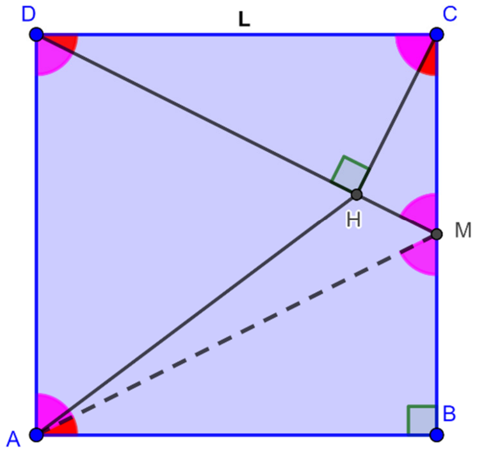
9. Considero DKF e FKE, essi hanno:
KF *in comune* }
FKE(an.) ≅ [KFD] [[KFH]](an.) ≅ π/2 } 2° criteri di equivalenza dei triangoli ➡
[quali sono le rette parallele ?] [[KFE ≅ FKD *angoli interni interni* } ➡ DKF ≅ FKE]]

[[….]]

Disegno:



4) Soluzione proposta da Mario Solinas, Classe 3L, Liceo scientifico "G. Alessi", Perugia.



Ipotesi:

- ABCD è un quadrato
- M è il punto medio di BC
- DM è il segmento che congiunge il vertice D con il punto M
- H è il piede della perpendicolare condotta da C su DM

Tesi:

- AHD è un triangolo isoscele

Dimostrazione:

-Inizialmente indichiamo, per convenzione, con **L** il lato DC del quadrato ABCD (come si può notare in figura) e tracciamo poi il segmento tratteggiato AM che congiunge il vertice A con il punto M.

- I triangoli ABM e CDM sono rettangoli rispettivamente in B e C. Essi sono inoltre congruenti per il primo criterio di congruenza in quanto hanno:

- AB=DC= **L** (in quanto lati del quadrato ABCD)
- A$\hat{B}$M= D$\hat{C}$M (in quanto entrambi retti)
- MB=CM = $\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{2}}$ (perché M è il punto medio di BC)

-In particolare **AM=DM.** Essendo quest'ultimi ipotenuse dei due triangoli rettangoli e congruenti ABM e CDM, possiamo entrambi esprimerli in funzione di **L** applicando il teorema di Pitagora :

$$\mathbf{AM=DM=}\sqrt{L^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5L^2}{4}} = \frac{L\sqrt{5}}{2}$$

-Consideriamo in seguito il triangolo AMD; esso risulta isoscele su base AD perché **AM=DM.**

In particolare **M$\hat{A}$D = A$\hat{D}$M.**

-Prendiamo ora in considerazione il triangolo CDM rettangolo in C. Notiamo che CH è l'altezza relativa all'ipotenusa DM. Possiamo dunque applicare il primo teorema di Euclide per trovare la misura di DH in funzione di **L:**

$$DC^2 = \mathbf{DH} \times \mathbf{DM}$$

$$\downarrow$$

$$L^2 = DH \times \frac{L\sqrt{5}}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{DH}= \frac{2L\sqrt{5}}{5}$$

- Successivamente consideriamo i triangoli AHD e AMD; essi sono simili per il secondo criterio di similitudine in quanto hanno:

  - **DH:AD=AD:AM (2 lati proporzionali)**

$$\downarrow$$

$$\frac{2L\sqrt{5}}{5} : L = L : \frac{L\sqrt{5}}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

  - **M$\hat{A}$D = A$\hat{D}$H** (A$\hat{D}$M= A$\hat{D}$H, M$\hat{A}$D= A$\hat{D}$M per dimostrazione precedente)

- In particolare otteniamo che:

$$\mathbf{DH:AD=AD:AM=AH:DM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

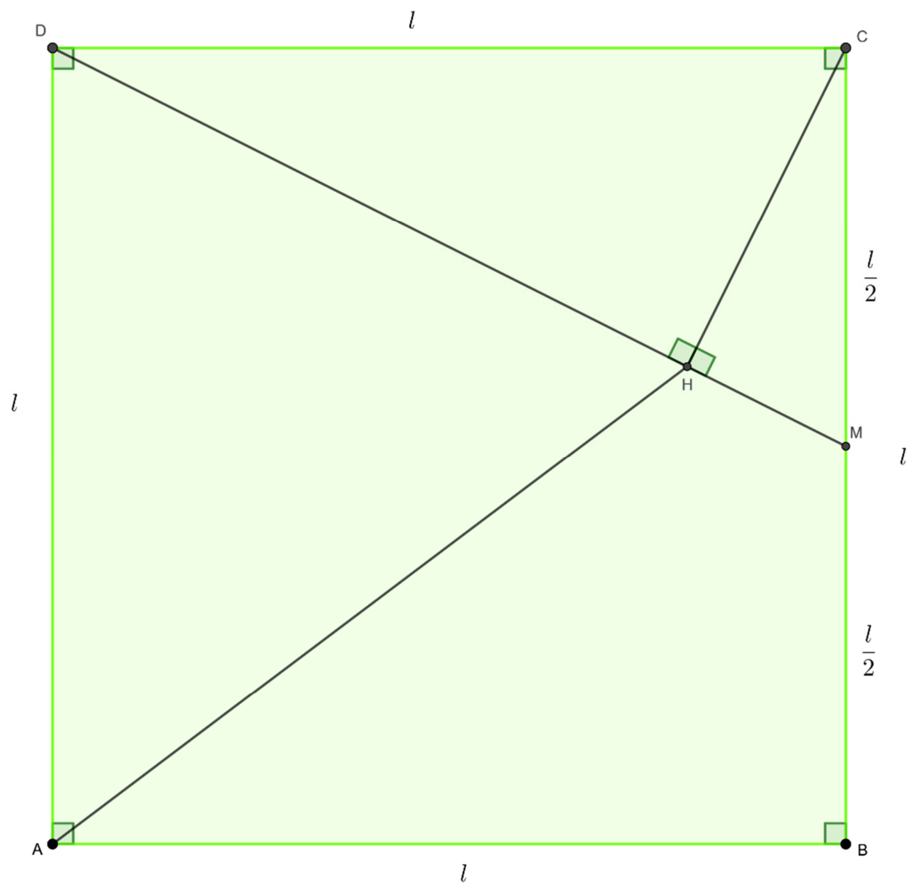
- Segue quindi:

$$\frac{AH}{DM} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times DM \rightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{L\sqrt{5}}{2} \rightarrow AH = \frac{10}{10} L \rightarrow AH = L$$

- **Consideriamo infine il triangolo AHD, esso risulta isoscele su base DH perché AH=AD=L**

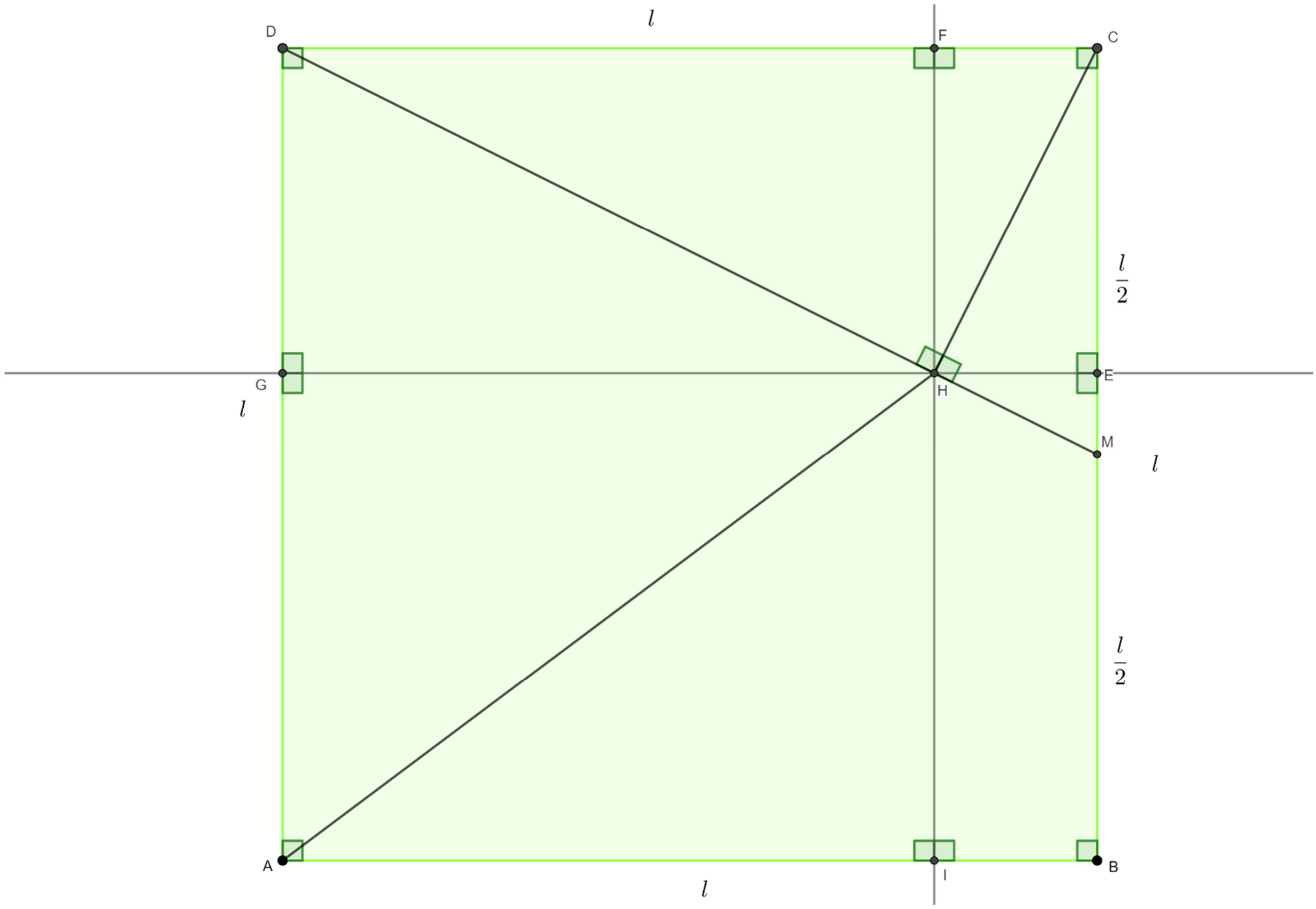
CVD

5) Soluzione proposta da Leonardo Schiesaro, Classe 3C, Liceo Scientifico "Morgagni", Roma



Costruzione preliminare

Si traccino le due rette passanti per H e perpendicolari ai lati del quadrato ABCD. Si chiamino E, F, G e I i punti dove tali rette intersecano rispettivamente BC, CD, DA e AB.



Chiamiamo l il lato del quadrato. Dal momento che M è il punto medio di BC, $CM = \frac{BC}{2} = \frac{l}{2}$.
Poiché il triangolo CDM è rettangolo in $\hat{C}$ (tutti gli angoli interni di un quadrato sono retti), si può utilizzare il teorema di Pitagora per ricavare l'ipotenusa DM:

$$DM = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}l^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}l$$

A questo punto si può ottenere l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo CDM:

$$CH = \frac{C \cdot c}{i} = \frac{CD \cdot CM}{DM} = \frac{l \cdot \frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}l} = \frac{l}{\sqrt{5}}$$

Si prendano ora in considerazione i due triangoli CDH e CHM, rettangoli rispettivamente in $C\widehat{H}D$ e $C\widehat{H}M$ per ipotesi. È possibile ricavare i cateti sconosciuti di questi due triangoli con il teorema di Pitagora:

$$DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}l^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}l$$

$$HM = \sqrt{CM^2 - CH^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{5}} = \sqrt{\frac{l^2}{20}} = \frac{l}{2\sqrt{5}}$$

HF e HE sono rispettivamente le altezze relative all'ipotenusa dei triangoli rettangoli CHD e CHM, poiché per costruzione HF è perpendicolare a CD e HE è perpendicolare a BC. Si trovano in maniera analoga a come si è ottenuto CH:

$$HF = \frac{C \cdot c}{i} = \frac{DH \cdot CH}{CD} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}} l \cdot \frac{l}{\sqrt{5}}}{l} = \frac{2}{5} l$$

$$HE = \frac{C \cdot c}{i} = \frac{CH \cdot HM}{CM} = \frac{\frac{l}{\sqrt{5}} \cdot \frac{l}{2\sqrt{5}}}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{5} l$$

Dal momento che CDGE e BCFI sono dei rettangoli (hanno entrambi quattro angoli retti), i loro lati sono congruenti a due a due:

$EG = CD = l$

$FI = BC = l$

Ne deriva che:

$GH = EG - HE = l - \frac{1}{5} l = \frac{4}{5} l$

$HI = FI - HF = l - \frac{2}{5} l = \frac{3}{5} l$

$AG = HI = \frac{3}{5} l$ (poiché AIHG è un rettangolo)

Per il teorema di Pitagora, AH, l'ipotenusa del triangolo rettangolo AGH (per costruzione), è uguale a:

$$AH = \sqrt{GH^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{5} l\right)^2 + \left(\frac{3}{5} l\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} l^2 + \frac{9}{25} l^2} = \sqrt{\frac{25}{25} l^2} = \sqrt{l^2} = l$$

Per ipotesi $AD = l$. Quindi $AD = AH = l$. Ne consegue, per l'inverso di un corollario del teorema del triangolo isoscele, che il triangolo AHD è isoscele sulla base DH.

6) Soluzione proposta da:
Giuseppe Marasco, 3ª T - ITIS “Galileo Galilei”, Roma
Alessio Gusai, 3ª I - ITIS “Michele Giua”, Cagliari

Hp:
ABCD = quadrato
M = punto medio BC
HC = altezza MDC relativa a DM

Th:
Triangolo ADH = isoscele

Dimostrazione:
Traccio il segmento che va dal vertice A al punto medio di DC (che chiameremo N).
Il segmento AN è parallelo a CH perché:
Partiamo dimostrando che i triangoli CDH e ADN sono simili. Possiamo farlo perché entrambi sono simili al triangolo CDM. CDH lo è in quanto uno dei due triangolo ricavati dividendo CDM tramite l’altezza relativa all’ipotenusa di quest’ultimo, quindi per il primo teorema di Euclide, i due triangoli sono simili per il secondo criterio di similitudine dei triangoli; ADN lo è invece perché ha per costruzione i cateti e l’angolo tra essi compreso congruenti a quelli di CDM, rendendoli quindi congruenti. [Ragionamento sostanzialmente corretto, ma un po’ confuso; bastava ragionare sugli angoli]
Avendo dimostrato questo, possiamo quindi dire che anche ADN e CDM sono simili tra loro. Questo comporta anche che i loro angoli siano uguali.
Perciò anche gli angoli HCD e AND saranno uguali, rendendo i due segmenti CH e AN paralleli.

Detto questo, possiamo affermare che AF è l’altezza relativa a DH del triangolo ADH, poiché AN ∥ CH e sono attraversati da uno stesso segmento, quindi gli angoli in F saranno uguali a quelli in H, per cui tutti di 90°.

Adesso possiamo dimostrare che l’altezza AF è anche mediana, questo perché DF = CH, per il fatto che sono entrambi altezze di triangoli congruenti relative allo stesso lato; DH invece, per il primo teorema di Euclide [applicato a quale triangolo?] è uguale a 2 volte CH.
Dunque, essendo DH = 2CH, e DF = CH se ne deduce che FH è uguale a HC, e quindi anche a DF.
Perciò l’altezza AF divide la base DH in due parti uguali, di conseguenza è sia altezza sia mediana, quindi il triangolo ADH è isoscele [sulla base DH].