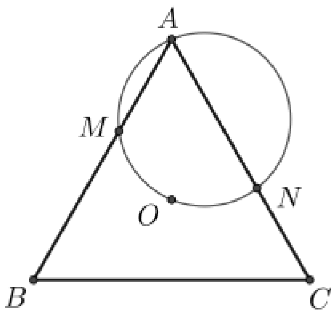
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia – Problema – 3 - 24 novembre 2020 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Dato un triangolo equilatero ABC, sia O il suo baricentro. Tracciata una circonferenza passante per O e per A, che intersechi i lati AB ed AC, siano M ed N le intersezioni (diverse da A) di tale circonferenza rispettivamente con AB e AC. Provare che AM è congruente a CN (vedi figura).
Motivare la risposta.



Commento

Abbiamo ricevuto sei risposte, prevalentemente da classi terze e quarte di Licei Scientifici.
Il problema poneva un quesito relativo a due segmenti ottenuti dall'intersezione di un triangolo equilatero con una circonferenza passante per un suo vertice e per il suo baricentro. Uno di questi segmenti è una corda della circonferenza mentre l'altro è la differenza tra un lato del triangolo equilatero e un'altra corda della circonferenza.
Delle risposte giunte quattro sono sostanzialmente corrette, mentre due sono errate. Una è viziata dal fatto che lo studente svolge la dimostrazione nel caso particolare in cui ha costruito la figura e non nel caso generale; l'altra (che usa la geometria analitica) contiene degli errori di calcolo.

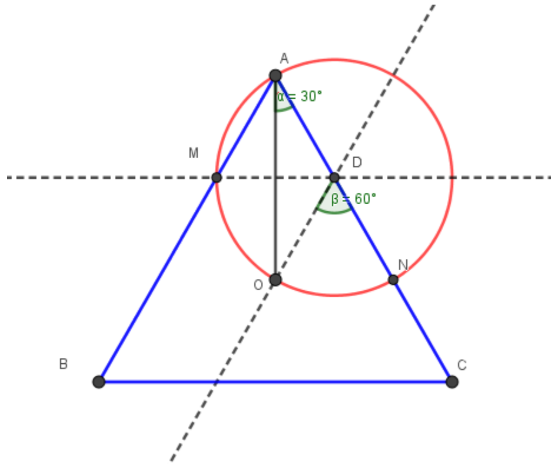
Sono pervenute risposte da studenti delle seguenti scuole:

- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "Tullio Levi-Civita", Roma – 2 soluzioni
- Liceo "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)
- Liceo Scientifico "G. Alessi" Perugia
- Liceo scientifico "Barsanti e Matteucci", Viareggio (LU)
-

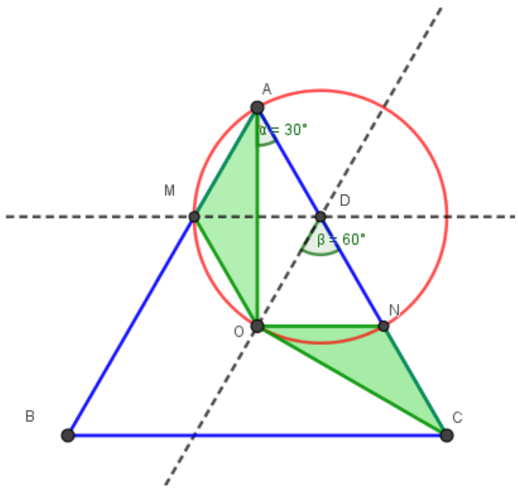
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione proposta dalla classe 3B del Liceo Scientifico internazionale "Aristosseno" di Taranto



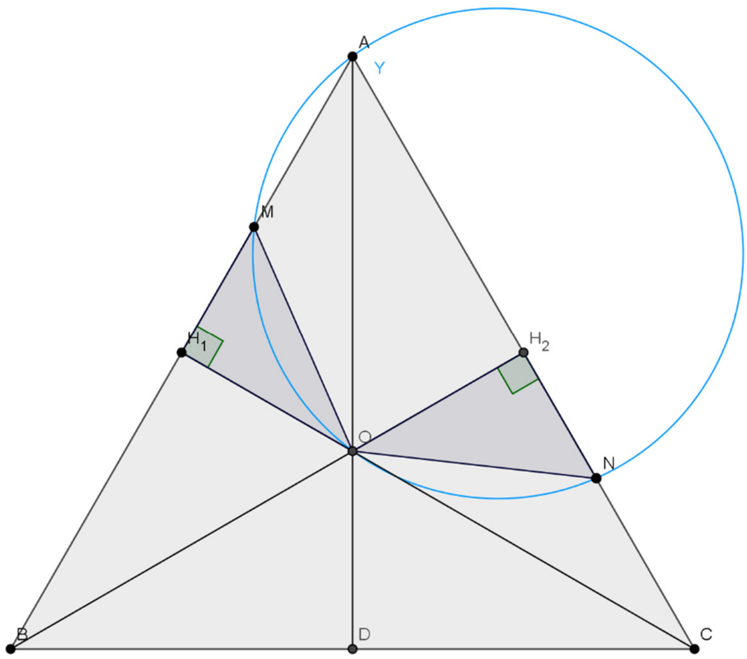
Per costruire la circonferenza che passa per i punti O ed A e che interseca i lati AB e AC del triangolo osserviamo che il centro di questa circonferenza appartiene all'asse del segmento AO ; inoltre l'angolo $B\hat{A}C$ del triangolo deve individuare un angolo alla circonferenza di ampiezza 60° e l'angolo $O\hat{A}C$ ha ampiezza 30° perché le mediane di un triangolo equilatero sono anche bisettrici degli angoli interni .
L' angolo al centro corrispondente all'angolo $O\hat{A}C$ dovrà avere ampiezza doppia, quindi la sua ampiezza sarà pari a 60°. Tracciamo allora dal punto O la parallela al lato AB; il punto d'incontro D di questa retta con l'asse delle corda AO è sul lato AC del triangolo ed è il centro della circonferenza passante per i punti O ed A e che interseca in M ed N i lati AB e AC del triangolo.
[Questa è una delle infinite circonferenze soddisfacente ai requisiti del problema. La dimostrazione della proprietà del testo andava invece fatta non su questo caso particolare, ma in generale. Il seguito è errato.]
[[…]]



2) Soluzione proposta da Francesca Polignano, 4°A, Liceo scientifico matematico "Tullio Levi Civita", Roma

Hp: ABC triangolo equilatero
O baricentro
A, M, N, O ϵ Y

Tesi: AM≅NC

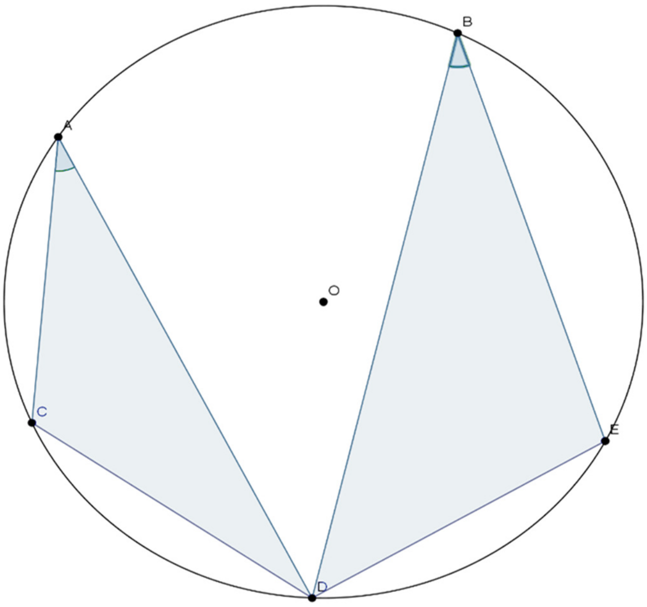


Dimostrazione:

- **Consideriamo i triangoli MH_1O e NH_2O** [non si dice cosa indicano H_1 e H_2 …]
  - **Sappiamo che gli angoli MH_1O e NH_2O sono rettangoli e perciò congruenti, poiché nei triangoli equilateri le mediane coincidono con le altezze e le bisettrici;**
  - **$H_1O \cong H_2O$ poiché sono le altezze dei triangoli AOB e AOC, i quali sono congruenti per *ALA*** [???]**, ovvero AB≅AC poiché il triangolo ABC è equilatero; gli angoli ABO≅BAO≅ACO≅CAO poiché, come già detto, le mediane coincidono con le bisettrici;** [e quindi ?]
  - **MO≅NO poiché sono due corde appartenenti alla circonferenza Y, sulle quali insistono due angoli congruenti, MAO e NAO.**

[Questa dim. non era necessaria] **[[Dimostrazione del teorema che afferma che se due angoli alla circonferenza sono congruenti, le due corde sulle quali insistono sono congruenti a loro volta:**

Hp:
CAD≅DBE
Tesi: CD≅DE



Dimostrazione:

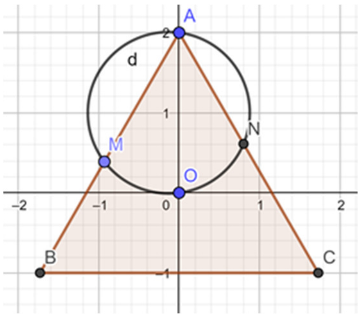
- **Considero i triangoli COD e DOE**
  - **CO≅DO≅EO poiché raggi di una stessa circonferenza;**
  - **COD≅2*α*; facendo è l'angolo al centro che insiste sullo stesso arco di CAD(≅α); facendo un ragionamento analogo DOE≅2*α*, perciò COD≅DOE.**

→ **Per *LAL* i triangoli COD e DOE sono congruenti, quindi CD≅DE]]**

Detto questo possiamo dire che per *LLA* [???] MH_1O e NH_2O sono congruenti e di conseguenza
$MH_1 \cong NH_2$.

Sappiamo per ipotesi che $AH_1 \cong CH_2 \rightarrow MH_1+AM \cong NH_2+NC$, ma avendo dimostrato che
$MH_1 \cong NH_2 \rightarrow AM \cong NC$.

3) Soluzione proposta da Anna Bertolo, Alice Codato, Nicolò Dal Bello, Martina Scappin, 3BSO Liceo "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)



IPOTESI: AB≅BC≅AC, O=baricentro AB ∩ d= M, AC ∩ d=N, d∩A e O [cosa indica d ?] [se d è la circonferenza, ci sono evidenti errori di scrittura. Nella figura non serviva il quadrettato sullo sfondo.]

TESI: AM ≅ NC

DIMOSTRAZIONE ANALITICA:

1. Pongo il baricentro O sull'origine degli assi e il punto A di coordinate: A(0;2). La scelta di assegnare la $y_A = 2$ non è restrittiva perché ho scelto come unità di misura del sistema di assi la distanza OA / 2. Con questa scelta le ordinate di B e C sono -1 perché in un triangolo il baricentro divide le mediane in due parti tali che quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

2. Determino le coordinate dei punti B e C:

Dato che ho posto il baricentro O di coordinate O(0;0), data l'osservazione precedente e dato che il lato BC è // all'asse x troviamo l'equazione della retta BC: y= -1.

Dato che OA≅OB≅OC possiamo calcolare le ascisse di B e C:

OB= $\sqrt{(x_O - x_B)^2 + (y_O - y_B)^2}$ che poniamo =OA = 2 perché le mediane del triangolo equilatero sono congruenti

$x_O^2 + x_B^2 - 2x_O x_B + y_O^2 + y_B^2 - 2y_O y_B = 4$

$x_B^2 - 2x_O x_B = 4 - x_O^2 - y_O^2 - y_B^2 + 2y_O y_B$

Sostituisco

$x_B^2 - 2 * 0 * x_B = 4 - 0 - 0 - 1 + 0$

$x_B = -\sqrt{3}$

Essendo il punto C simmetrico rispetto all'asse y la sua ascissa sarà: $\sqrt{3}$

1. Ora ricaviamo le equazioni dei lati AC e AB:

$$\frac{y - y_C}{y_A - y_C} = \frac{x - x_C}{x_A - x_C}$$

$$\frac{y + 1}{2 + 1} = \frac{x - \sqrt{3}}{0 - \sqrt{3}}$$

$$\frac{y + 1}{3} = \frac{x - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$$

$$\frac{y + 1}{3} = \frac{x}{-\sqrt{3}} + 1$$

$$y + 1 = \frac{3x}{-\sqrt{3}} + 3$$

$$y + 1 = \frac{3x}{-\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 3$$

$$y = \frac{3\sqrt{3}x}{-3} + 2$$

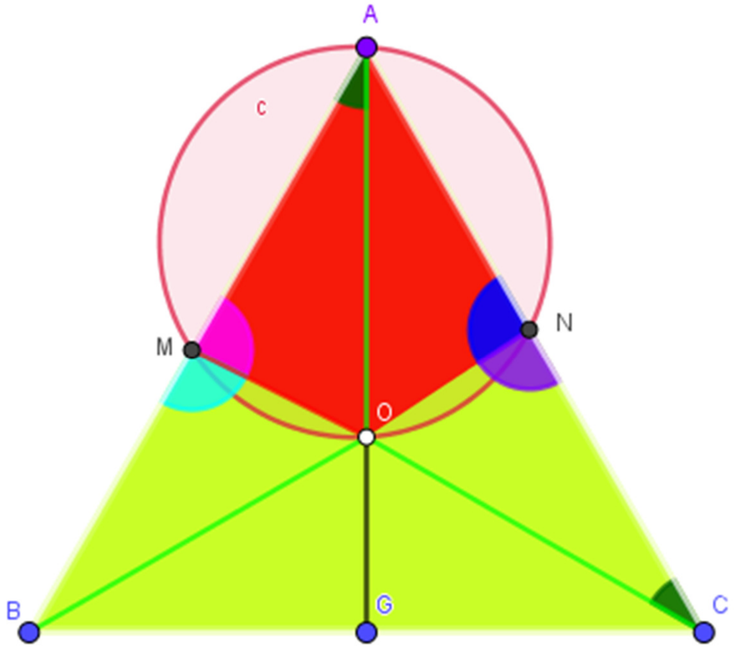
$$AC: y = -\sqrt{3}x + 2$$

osservo che AB ha il coefficiente angolare opposto di AC, quindi la sua equazione sarà:

AB: y = $\sqrt{3}x + 2$.

3. Calcolo l'equazione della circonferenza sostituendo il punto A [le coordinate del punto A] nell'equazione $x^2+y^2+ax+by=0$ (la circonferenza interseca l'origine quindi il termine noto =0): sostituisco le coordinate di [A(0,2)] e ottengo: [corrige: 0+4+0+2b=0 => b=-2]
[[errata: 0+4-0-4b=0 => b= 1; doveva trovare b=-2; il seguito è errato]]: coordinata y del centro della circonferenza
[[….]]

4) Soluzione proposta da Mario Solinas, Classe 3L, Liceo scientifico "G. Alessi", Perugia



<u>Ipotesi:</u>

- **ABC è un triangolo equilatero**
- **O è il baricentro di ABC**
- **c è una circonferenza passante per A e O.**
- **c $\cap$ AB= M (con A $\neq$ M)**
- **c $\cap$ AC= N (con A $\neq$ N)**

<u>Tesi:</u>

- **<u>AM≅CN</u>**

<u>Dimostrazione:</u>

- Consideriamo inizialmente il nostro triangolo equilatero: O risulta essere, per ipotesi, il suo baricentro .
  Una nota proprietà del triangolo equilatero afferma che l'ortocentro, il baricentro, l'incentro e il circocentro coincidono.

Dunque O oltre ad essere il punto di intersezione delle mediane(baricentro), è anche il punto di intersezione delle altezze (ortocentro), delle bisettrici (incentro) e degli assi (circocentro) del triangolo ABC.

- Tracciamo poi dal vertice A il segmento passante per O che interseca BC in [un] punto chiamato G. Il segmento AG, per costruzione, coincide con la mediana e l'altezza relative a BC e anche con la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$ (altezza , mediana e bisettrice devono appartenere alla retta passante per A e O , alla quale appartiene lo stesso AG).
  Poiché ciascun angolo del triangolo equilatero ABC misura 60° , ne segue che $\mathbf{\underline{B\hat{A}G} \cong C\hat{A}G \cong 30°}$**.**

- In seguito congiungiamo il vertice B e il vertice C con il punto O e otteniamo rispettivamente i segmenti BO e CO: Essi, per costruzione, appartengono alle due bisettrici degli angoli $A\hat{B}G$ e $A\hat{C}G$, il cui punto di intersezione è O. **Segue che $\underline{A\hat{C}O \cong 30°.}$**

- Consideriamo ora la circonferenza c: I punti A, M, O, N appartengono, per ipotesi, ad essa. **Congiungiamo M con O e O con N, e otteniamo così il quadrilatero AMON. Esso risulta essere inscritto nella circonferenza c , perché tutti i suoi vertici appartengono a quest'ultima.**

- Per il teorema relativo all'inservibilità di un quadrilatero, gli angoli opposti del quadrilatero AMON sono supplementari: $\mathbf{A\hat{M}O + A\hat{N}O \cong 180\ °}$

- Consideriamo, in seguito, gli angoli **$A\hat{M}B$ e $A\hat{N}C$: essi sono di 180 °** perché i punti A,M,B e A,N,C risultano essere allineati. Perciò otteniamo:

$$\mathbf{A\hat{M}O + B\hat{M}O \cong 180° \text{ e } A\hat{N}O + C\hat{N}O \cong 180°}$$

- Da ciò segue che **$\underline{A\hat{M}O \cong C\hat{N}O}$ e $B\hat{M}O \cong A\hat{N}O$** ($A\hat{M}O \cong 180° - A\hat{N}O$; $C\hat{N}O \cong 180\ ° - A\hat{N}O$; $B\hat{M}O \cong 180\ ° - A\hat{M}O$; $A\hat{N}O \cong 180\ ° - A\hat{M}O$).

- Prendiamo in considerazione poi il triangolo AOC: esso ha **C$\hat{A}$O** $(\mathbf{C\hat{A}G}) \cong$ **A$\hat{C}$O** $\cong$**30°** **,** dunque è isoscele su base AC. Ciò significa che **AO≅OC.**

- **Consideriamo infine triangoli AMO e CNO, essi sono congruenti per il secondo criterio di congruenza generalizzato in quanto hanno:**

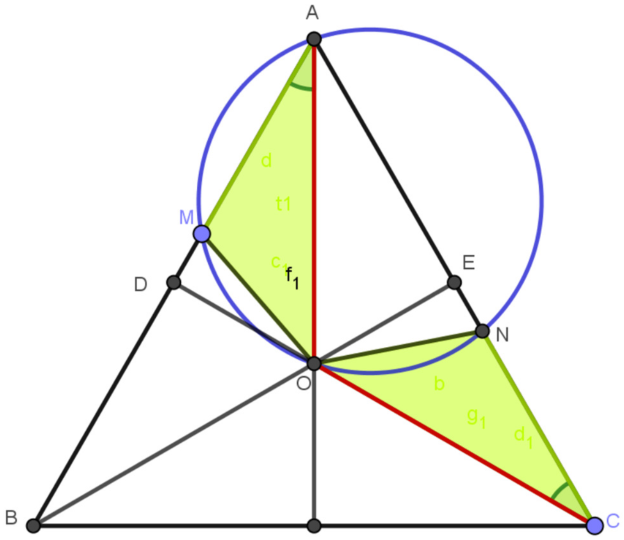
  - **AO≅OC** (per dimostrazione precedente)
  - **A$\hat{M}$O≅C$\hat{N}$O** (per quanto detto precedentemente)
  - **M$\hat{A}$O≅O$\hat{C}$N≅ 30°** (M$\hat{A}$O ≅ B$\hat{A}$G≅ 30° ; O$\hat{C}$N ≅A$\hat{C}$O ≅30°)

- **In particolare AM≅CN .**

C.V.D.

[La figura è stata eseguita in un caso particolare. Era preferibile usare quella data nel testo].

5) Soluzione proposta da Carola Colonnelli, 4^A, Liceo scientifico "Tullio Levi-Civita", Roma



$\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ perché mediane di un triangolo equilatero.

In quanto mediane, l'ortocentro O divide i due segmenti considerati in due parti, di cui una è il doppio dell'altra: $\overline{BO} \equiv 2\overline{OE}$ e anche $\overline{CO} \equiv 2\overline{OD}$

Allora $\overline{OE} \equiv \overline{OD}$

Considero ora gli angoli $M\hat{A}O$ e $E\hat{A}O$

essendo un triangolo equilatero l'altezza è anche bisettrice quindi i due angoli saranno congruenti $M\hat{A}O \equiv E\hat{A}O$.

Gli angoli appena considerati sono anche angoli alla circonferenza ed, essendo tali, evidenzieranno su di essa due archi tra loro congruenti

$\overline{NO} \equiv \overline{MO}$ → risulteranno quindi congruenti anche le rispettive corde $\overline{NO} \equiv \overline{MO}$

Considero ora i due triangoli i $\triangle$DOM e $\triangle$NOE

per le dimostrazioni precedenti hanno due lati congruenti $\overline{OE} \equiv \overline{OD}$ e $\overline{NO} \equiv \overline{MO}$.

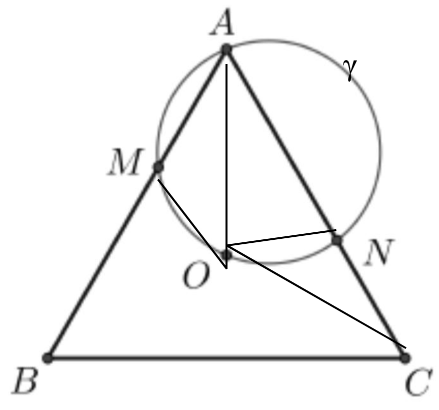
Essendo $\overline{OE}$ e $\overline{OD}$ segmenti delle altezze (le mediane $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$) avremo che [gli] angoli $O\hat{E}N \equiv O\hat{D}M = 90°$.

Per un criterio di congruenza dei triangoli rettangoli, secondo il quale due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno un cateto e l'ipotenusa congruenti, avremo che [[DOM = NOE .Essendo i due triangoli congruenti, risulteranno congruenti anche i due cateti]] $\overline{DM} \equiv \overline{NE}$

Sappiamo inoltre che $\overline{DA} \equiv \overline{EC}$ in quanto $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ sono mediane. Risulta quindi che, per [differenza] [[sottrazione]] di segmenti congruenti:

$$\boxed{\overline{MA} \equiv \overline{NC}}$$

6) Soluzione proposta da Margherita Zucchelli, III D, Liceo scientifico "Barsanti e Matteucci", Viareggio (LU)



IPOTESI:
ABC= triangolo equilatero
O= baricentro ABC
γ= circonferenza passante per A e O
M e N= intersezioni di γ e rispettivamente dei lati AB e AC
TESI:
AM≅CN

∠AOC≅120° perché nel triangolo equilatero le mediane sono anche bisettrici, quindi OAC+OCA=60°
Chiamo P il centro di γ [nella figura P non c'è].
∠ MPN perché angolo al centro corrispondente all'angolo MAN alla circonferenza che misura 60°
∠ MON = 120° perché [corrige: supplementare] [[errata: esplementare]] dell'angolo alla circonferenza associato a MPN (120°)
∠ MOA ≅ CON perché differenze di angoli congruenti (120°-NOA)
∠ MAO ≅ NCO perché [metà] [[sottomultipli]] di angoli congruenti [[sono congruenti]], entrambi gli angoli misurano 60°/2 perché AO e CO sono anche bisettrici
AO ≅ CO perché ABC è un triangolo equilatero, quindi il baricentro coincide con il circocentro
Triangoli MAO ≅ CON per il II criterio di congruenza
AM ≅ CN perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.