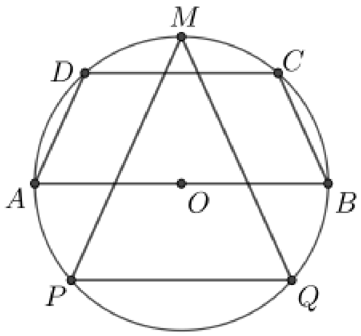
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *[(Edwin A. Abbott)](Edwin A. Abbott)*

Flatlandia – Problema – 8 – 29 marzo 2021 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia $ABCD$ un trapezio (isoscele) inscritto in una circonferenza, la cui base maggiore AB sia un diametro. Dal punto medio M della semicirconferenza contenente il trapezio condurre le rette parallele ai lati obliqui di $ABCD$ fino ad incontrare la circonferenza in P, Q (vedi figura).
Dimostrare che il triangolo (isoscele) PQM è equivalente al trapezio $ABCD$.
Motivare la risposta.



Commento

Abbiamo ricevuto sei risposte provenienti tutte da classi di liceo scientifico (seconda, terza e quinta).
Data una circonferenza e una sua semicirconferenza, il problema poneva un quesito relativo all'equivalenza tra il trapezio isoscele inscritto nella semicirconferenza e il triangolo isoscele ottenuto tracciando, dal punto medio della semicirconferenza, le parallele ai lati obliqui del trapezio fino ad incontrare la circonferenza.
Il problema si prestava molto bene ad essere trattato usando la equiscomponibilità delle figure piane, cosa che effettivamente in alcune risoluzioni è stata fatta. In altre si è invece preferito usare la trigonometria giungendo si ad una conclusione corretta, ma al termine di "numerosi" passaggi.

Sono pervenute risposte da studenti delle seguenti scuole:
- Liceo Scientifico internazionale "Aristosseno" Taranto
- ISIS Liceo Scientifico Scienze Applicate "A. Malignani", Udine
- Liceo "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)
- Liceo Scientifico "G.B. Benedetti", Venezia
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara (2 soluzioni).

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

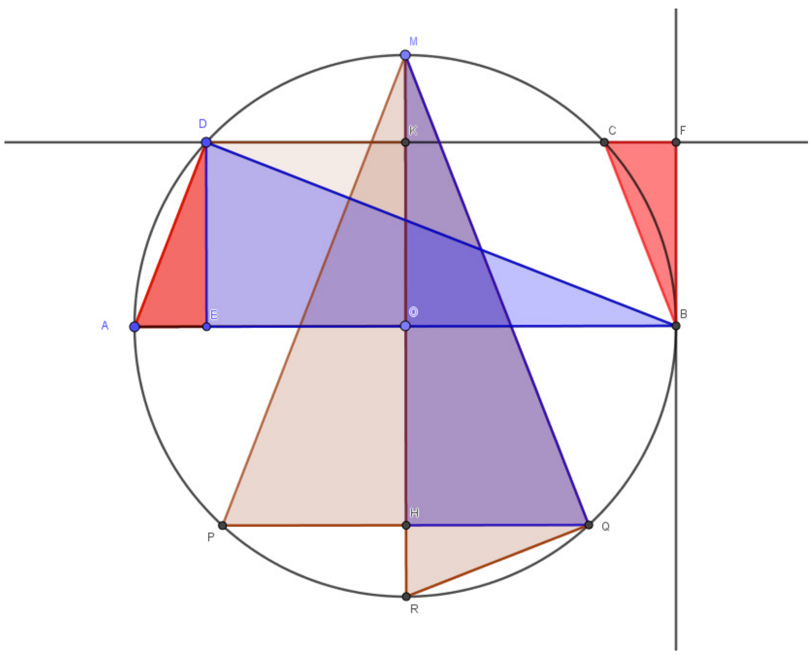
Soluzioni arrivate (in ordine di arrivo)

1) Soluzione proposta dalla classe 3^B Liceo Scientifico internazionale "Aristosseno" Taranto

Tracciamo una delle altezze DE del trapezio e poi dal suo vertice B tracciamo la perpendicolare alla retta della base minore CD indicando con F il punto intersezione.

Notiamo che i triangoli rettangoli ADE e CBF sono congruenti essendo congruenti le loro ipotenuse AD e BC , lati [obliqui] del trapezio isoscele, e gli angoli $A\widehat{D}E$e $C\widehat{B}F$ che sono complementari degli angoli (congruenti fra loro) adiacenti alla base maggiore del trapezio ABCD che è isoscele. Questi due triangoli rettangoli essendo congruenti sono anche equivalenti e perciò possiamo concludere che il trapezio ABCD è equivalente al rettangolo EBFD, poiché [ABCD è] composto dal trapezio EBCD e dal triangolo ADE [mentre il rettangolo EBFD è] composto dallo stesso trapezio EBCD e dal triangolo CBF equivalente al triangolo ADE. Sappiamo poi che le diagonali di un rettangolo sono congruenti e dividono ogni rettangolo in due triangoli congruenti ed equivalenti e possiamo concludere che l'area del trapezio è uguale al doppio dell'area di ciascuno di questi due triangoli, ad esempio del triangolo DEB.

Passando ora a considerare il triangolo PQM, essendo M il punto medio dell'arco AB, la sua altezza MH è la retta di un diametro (MR) perpendicolare alla base PQ del triangolo. I triangoli rettangoli ADB e MQR sono congruenti perché i due angoli $D\hat{A}B$ e $M\hat{P}Q$ sono angoli che hanno i lati paralleli e di ugual verso (DA e MP sono paralleli come anche AB e PQ) e quindi congruenti ; essi insistono su DB e MQ che sono corde congruenti nonché cateti dei due suddetti triangoli. Dalla congruenza di tali triangoli segue la congruenza delle rispettive altezze relative alle ipotenuse, cioè DE e HQ ,per cui i triangoli DEB e MHQ saranno anch'essi congruenti e quindi equivalenti .Ma l'area del triangolo isoscele PQM è doppia dell'area del triangolo MHQ (perché l'altezza divide il triangolo isoscele in due triangoli congruenti) come quella del trapezio ABCD è doppia di quella del triangolo DEB ed essendo DEB e MHQ equivalenti saranno equivalenti anche il trapezio e il triangolo.

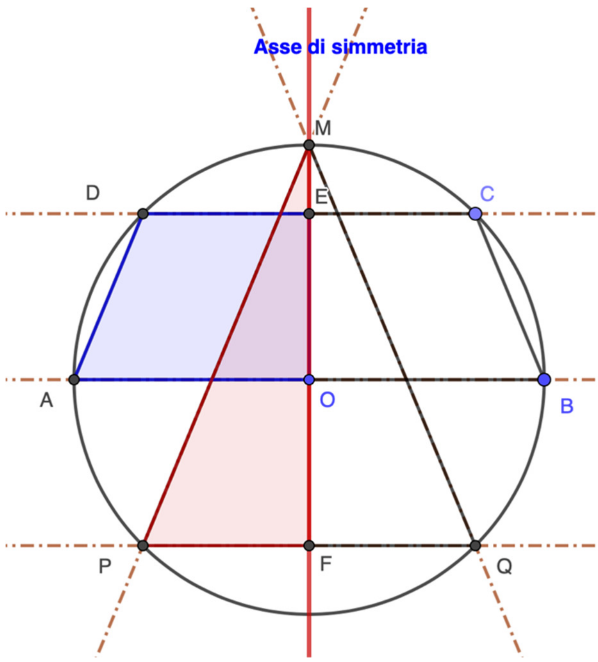


2) Soluzione proposta da Gaia Padrini, classe 2^D, Liceo Scientifico Scienze Applicate, ISIS "Arturo Malignani", Udine

Ipotesi:
ABCD trapezio isoscele
PQM triangolo isoscele
Tesi:
Area ABCD ≡ Area PQM

Dimostrazione:

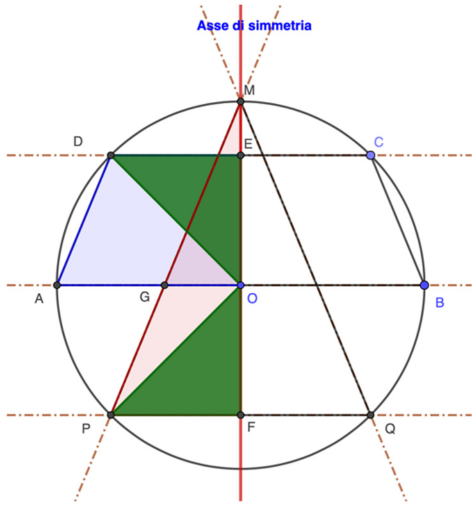
Si tracci la retta passante per i punti M e O ⊥ ad AB, essa è asse di simmetria della figura in quanto M è punto medio della semicirconferenza con centro in O che circoscrive entrambe le figure geometriche.
Si considerino il trapezio rettangolo AOED ed il triangolo rettangolo PFM e si consideri il seguente teorema: un trapezio è equivalente a un triangolo avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza la stessa altezza.



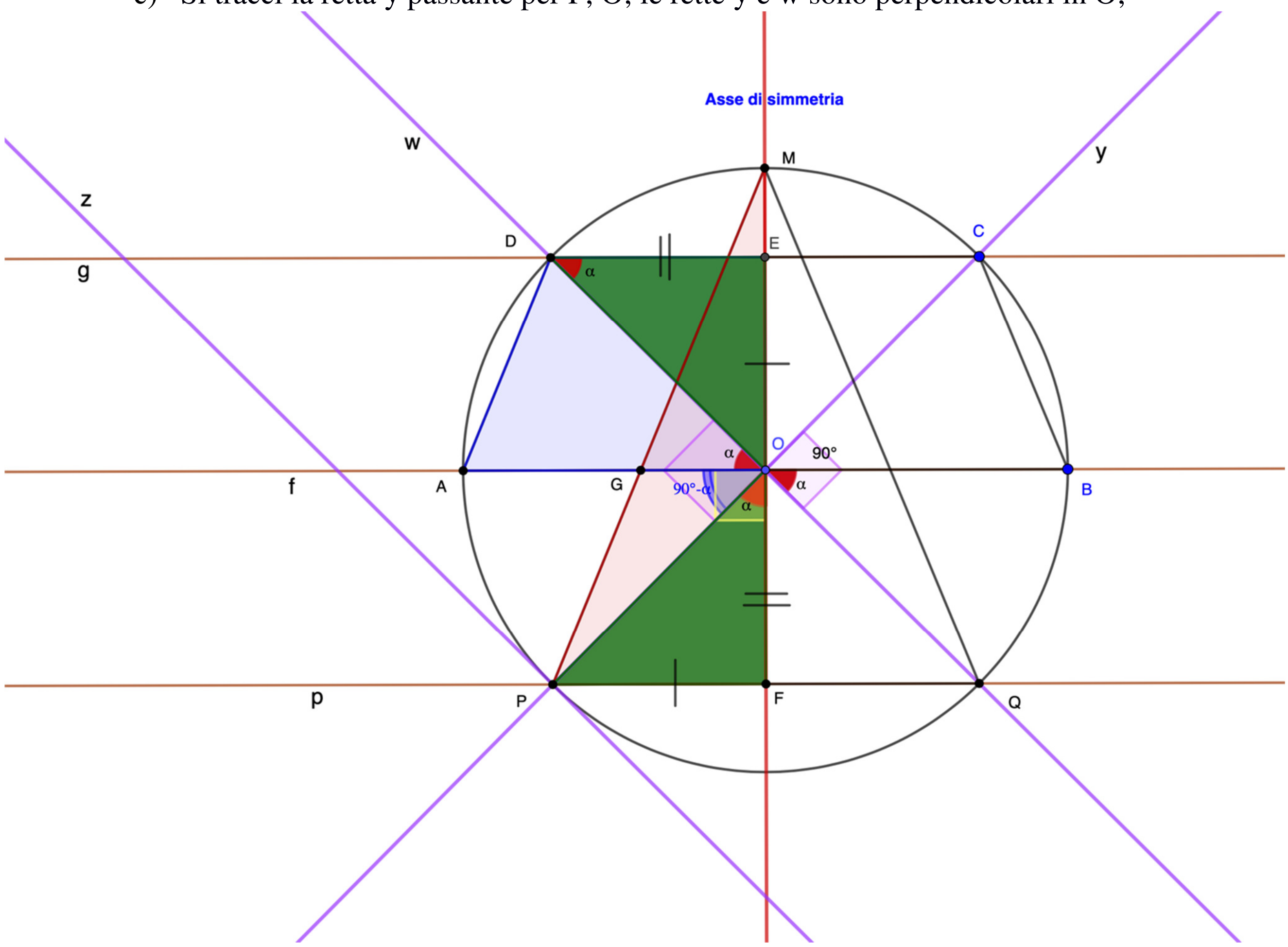
Dimostrare che l'altezza EO è congruente a PF.

Abbiamo detto che:
Il segmento PF è altezza del triangolo rettangolo PFM e il segmento EO è altezza del trapezio rettangolo AOED.

1) Si tracci la diagonale DO del trapezio AOED e la diagonale PO del trapezio PFOG;
2) Si considerino i triangoli DEO e POF:
   - DO ≡ PO in quanto raggi della circonferenza con centro O; sono ipotenusa dei due triangoli;
   - ∠ E = 90°   ∠ F = 90°;



- Troviamo gli angoli acuti congruenti (∠ ODE ≡ ∠ POF)
  a) Si tracci la retta w che passa per i punti D e O essa taglia le rette parallele g ed f, creando l'angolo ∠ ODE = α; l'angolo ∠ QOB è corrispondente e uguale a α;
  b) Si tracci la retta z parallela alla retta w passante per P e tangente alla circonferenza; essa è perpendicolare al raggio OP per definizione [la perpendicolarità con il raggio OP va dimostrata in quanto la costruzione di z come parallela a w passante per P individua già la retta z]
  c) Si tracci la retta y passante per P, O; le rette y e w sono perpendicolari in O;



Abbiamo che: ∠ DOA è α in quanto è angolo opposto al vertice dell'∠ QOB; ∠ DOP = 90°; ∠ AOP = ∠ DOP - ∠ DOA = 90°- α; ∠ POF = ∠ AOF - (∠ AOP) = 90° - (90°- α) = α;

Per il terzo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli i triangoli DEO e POF sono congruenti.
Le altezze del triangolo rettangolo e del trapezio rettangolo considerati sono congruenti: PF ≡ EO.

Dimostrare che la base del triangolo PFM è congruente alla somma delle basi del trapezio AOED.

La base FM del triangolo PMF è uguale alla somma delle basi del trapezio AOED in quanto OM ≡ AO perché raggio della circonferenza e FO ≡ DE perché lati di triangoli congruenti dimostrato al punto sopra.

Questo ci permette di concludere che le aree del trapezio AOED e del triangolo PFM sono congruenti. Specularmente sono congruenti anche le aree del trapezio BOEC e del triangolo QFM, ciò implica che l'area del triangolo isoscele PQM e l'area del trapezio rettangolo ABCD sono congruenti.

3) Soluzione proposta da Vera Silvestri, Classe 5^B, Liceo Scientifico "G.B. Benedetti", Venezia

[Manca la figura …]

Si divida il trapezio nei tre triangoli *AOD*, *DOC*, *BOC*. Poiché la costruzione è simmetrica rispetto alla retta OM si ha che $S(AOD)=S(BOC)$ dove *S* (*P*) indica l'area del poligono *P*.

Chiamando *x* l'angolo AÔD e *r* il raggio OA della circonferenza, per il teorema della corda, applicato con l'angolo al centro, $d(AD)=2r\sin(\frac{x}{2})$ dove *d* (*l*) indica la misura del segmento *l*.

[[……… Usando la formula di Erone

$$S(AOD)=\frac{\sqrt{(r+r+2r\sin(\frac{x}{2}))(r+r-2r\sin(\frac{x}{2}))(r+2r\sin(\frac{x}{2})-r)(r+2r\sin(\frac{x}{2})-r)}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{(2r+2r\sin(\frac{x}{2}))(2r-2r\sin(\frac{x}{2}))(4r^2\sin^2(\frac{x}{2}))}}{4}$$

$$=\frac{2r\sin(\frac{x}{2})\sqrt{4r^2-4r^2\sin^2(\frac{x}{2})}}{4}=\frac{4r^2\sin(\frac{x}{2})\sqrt{1-\sin^2(\frac{x}{2})}}{4}=\frac{4r^2\sin(\frac{x}{2})\sqrt{\cos^2(\frac{x}{2})}}{4}$$

$$=\frac{4r^2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{4}=\frac{2r^2\sin(x)}{4}=\frac{r^2\sin(x)}{2}$$ ….]]

[Utilizzando comunque la trigonometria, si poteva usare la formula per trovare l'area di un triangolo che dice "Area=1/2 del prodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso".]

Il procedimento è analogo per *DOC*: sostituendo a *x* l'angolo $\widehat{DOC}=\pi-2x$ nella terzultima espressione si ottiene

$$S(DOC)=\frac{4r^2\sin(\frac{\pi-2x}{2})\cos(\frac{\pi-2x}{2})}{4}=r^2\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cos(\frac{\pi}{2}-x)=r^2\cos(x)\sin(x)$$

L'area del trapezio è quindi

$$S(ABCD)=2S(AOD)+S(DOC)=2\frac{r^2\sin(x)}{2}+r^2\cos(x)\sin(x)=r^2\sin(x)(1+\cos(x))$$

Gli angoli [OAD] [[OAT]] e MPQ sono congruenti in quanto individuati da due coppie di rette rispettivamente parallele [e concordi]. Poiché *AOD* e *PMQ* sono isosceli anche gli angoli ODA e MQP hanno la stessa ampiezza. Di conseguenza *AOD* e *PMQ* sono simili e hanno in particolare gli angoli $AOD=x=PMQ$.

Sempre per il teorema della corda, ma applicato questa volta con l'angolo alla circonferenza, $d(PQ)=2r\sin(x)$ e $d(PM)=2r\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}) = 2r\cos(\frac{x}{2})$.

[[Come sopra, si poteva usare la formula dell’area di un triangolo per via trigonometrica]]

Usando ancora la formula di Erone si trova

$$S(PMQ)=\frac{\sqrt{(4r\cos(\frac{x}{2})+2r\sin(x))(4r\cos(\frac{x}{2})-2r\sin(x))(4r^2\sin^2(x))}}{4}$$

$$=\frac{2r\sin(x)\sqrt{16r^2\cos^2(\frac{x}{2})-4r^2\sin^2(x)}}{4}=\frac{4r^2\sin(x)\sqrt{4\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(x)}}{4}$$

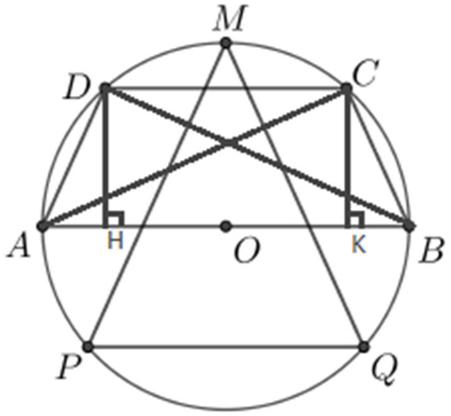
$$=r^2\sin(x)\sqrt{(2+2\cos(x))-(1-\cos^2(x))} = r^2\sin(x)\sqrt{\cos^2(x)+2\cos(x)+1}$$

$$=r^2\sin(x)\sqrt{(1+\cos(x))^2} = r^2\sin(x)(1+\cos(x))$$

Le espressioni (in funzione dell'angolo x) delle aree di trapezio e triangolo coincidono, dunque i due poligoni sono equivalenti.

4) Soluzione proposta da Francesco Salvalaggio, Classe 3^A, Liceo "Giorgione"-Liceo scientifico, Castelfranco Veneto (TV)

Innanzitutto, tracciamo le altezze del trapezio rispetto alla base maggiore AB. Esse sono rispettivamente DH e CK. Consideriamo i triangoli DHB e ACK.



L'obiettivo per il momento è dimostrare che la somma delle aree di DHB e ACK è uguale all'area del trapezio ABCD.
Quindi:

$$A_{DHB} + A_{ACK} = A_{ABCD}.$$

Se l'equazione sarà verificata, allora dimostreremo quanto scritto in precedenza.
L'area del triangolo è data dalla formula:

$$A_{triangolo} = \frac{Bh}{2}$$

Mentre l'area del trapezio corrisponde a:

$$A_{trapezio} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Quindi possiamo sostituire le formule delle aree nell'equazione evidenziata in rosso.

$$\frac{BH \cdot DH}{2} + \frac{AK \cdot CK}{2} = \frac{(AB + DC) \cdot DH}{2}$$

Però DH è congruente a CK (sono distanze tra due rette parallele per ipotesi, che quindi sono sempre congruenti). Quindi possiamo scrivere:

$$\frac{BH \cdot DH}{2} + \frac{AK \cdot DH}{2} = \frac{(AB + DC) \cdot DH}{2}$$

Possiamo utilizzare il secondo principio di equivalenza per semplificare ulteriormente l'equazione:

$$BH + AK = AB + DC$$

È possibile osservare che:

$$BH = AB - AH$$

e:

$$AK = AB - BK$$

Quindi:

$$BH + AK$$

diventa:

$$AB - AH + AB - BK = 2AB - AH - BK$$

È possibile operare un processo analogo con la somma delle basi del trapezio: la base minore corrisponde alla base maggiore dalla quale vengono sottratti i segmenti AH e BK.
Quindi:

$$AB + DC = AB + AB - AH - BK = 2AB - AH - BK$$

Riprendiamo l'equazione evidenziata in giallo e sostituiamo quanto trovato:

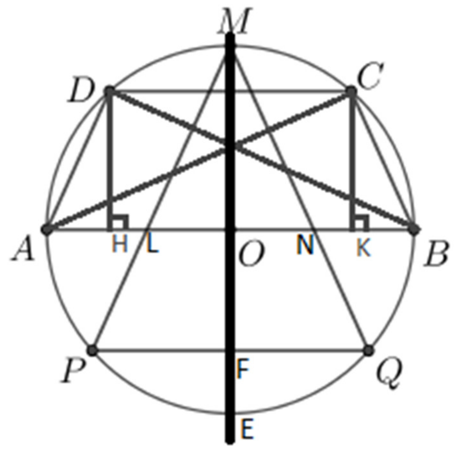
$$BH + AK = AB + DC$$

Diventa:

$$2AB - AH - BK = 2AB - AH - BK$$

<u>Essa è un'identità, che dimostra pertanto l'uguaglianza da cui eravamo partiti.</u>

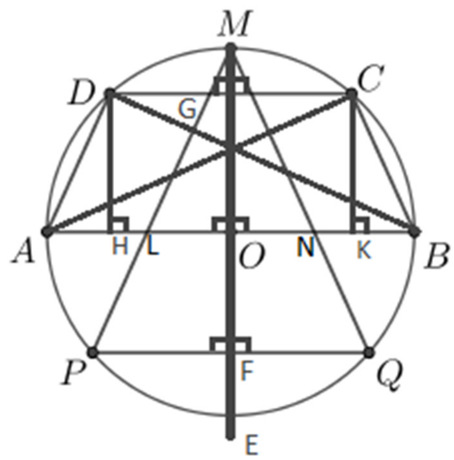
M è il punto medio dell'arco DC. Tracciando quindi la perpendicolare al segmento DC passante per M otteniamo l'asse del segmento DC (perpendicolare ad esso e passante per il suo punto medio). Esso, per teorema, passa per il centro O (l'asse di una corda passa sempre per il centro, è quindi un diametro della circonferenza).



$M\hat{L}N \cong D\hat{A}L$ (angoli corrispondenti di rette parallele tagliate da una trasversale) $M\hat{N}L \cong A\hat{B}C$ (angoli corrispondenti di rette parallele tagliate da una trasversale). Siccome $D\hat{A}L \cong A\hat{B}C$ (trapezio isoscele per ipotesi), anche $M\hat{L}N \cong M\hat{N}L$ (proprietà transitiva). Quindi il triangolo MLN è isoscele ed MO, essendo perpendicolare a LN (siccome è perpendicolare a DC è perpendicolare anche ad AB, essendo quest'ultimo parallelo a DC per ipotesi) è anche bisettrice di $P\hat{M}Q$. Quindi $P\hat{M}F \cong Q\hat{M}F$.

Adesso passiamo al triangolo PMQ.

$P\hat{M}F \cong Q\hat{M}F$ (dimostrazione precedente). Quindi MF è la bisettrice del triangolo PMQ rispetto al vertice M. PMQ è un triangolo isoscele per ipotesi, e sappiamo che in un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo formato dai due lati congruenti è anche mediana e altezza. A noi in particolar modo interessa il fatto che MF è altezza, in modo da poter dire che PQ è parallelo ad AB e parallelo a DC e che MF è perpendicolare a PQ.

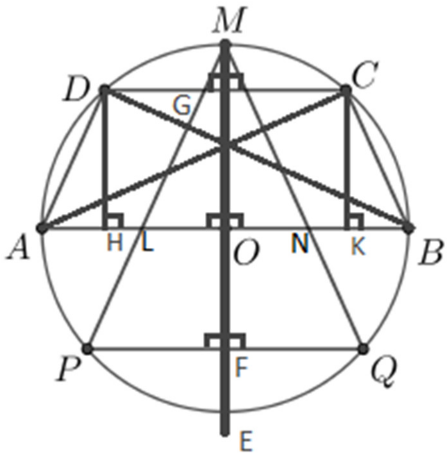


$A\hat{D}B \cong L\hat{G}B$ (angoli corrispondenti di rette parallele tagliate da una trasversale). ADB $\cong \frac{\pi}{2}$, poiché è un triangolo inscritto in una circonferenza avente il lato più lungo coincidente con il diametro della circonferenza stessa. Quindi anche $L\hat{G}B \cong \frac{\pi}{2}$ (proprietà transitiva).

$P\widehat{M}F \cong A\widehat{B}D$ (angoli aventi i lati perpendicolari tra loro e il vertice di ciascun angolo esterno all'altro angolo ($L\widehat{G}B$ e $A\widehat{O}M$ sono angoli retti per dimostrazione precedente).
Consideriamo quindi i triangoli ADB e PEM.1) AB ≅ ME (diametri della stessa circonferenza);

2) $A\widehat{D}B \cong E\widehat{P}M$ (sono entrambi retti, poiché sono entrambi angoli relativi all'ipotenusa di triangoli inscritti nella circonferenza e aventi il lato più lungo (ipotenusa) coincidente con un diametro della circonferenza),

3)$A\widehat{B}D \cong P\widehat{M}F$ (dimostrazione precedente).
I due triangoli ADB e PEM sono quindi congruenti per il secondo criterio di congruenza generalizzato. In particolare, DB ≅ PM.



Consideriamo quindi i triangoli HDB e PFM. 1) DB ≅ PM (dimostrazione precedente);
2) $A\widehat{B}D \cong P\widehat{M}F$ (dimostrazione precedente);3) $D\widehat{H}B \cong P\widehat{F}M$ (rispettivamente per costruzione e dimostrazione precedente).
Quindi, per il secondo criterio di congruenza generalizzato, i triangoli DHB e PFM sono congruenti.
Ora torniamo un po' indietro, concentrandoci sui triangoli DHB e ACK.
1) DH ≅ CK (distanze tra due rette parallele)
2) HB ≅ AK (differenza di segmenti rispettivamente congruenti: AB è in comune, mentre AH e BK sono congruenti perché sono le proiezioni sullo stesso segmento (AB) di due lati aventi per ipotesi la stessa lunghezza e la stessa inclinazione rispetto ad AB);
3) $D\widehat{H}K \cong A\widehat{K}C$ (per costruzione).
I due triangoli DHB e ACK sono congruenti per il primo criterio di congruenza.
Significa che la somma delle loro aree, che indichiamo con $A_{DHB} + A_{ACK}$ può essere espressa come:

$$2A_{DHB}$$

Oppure anche:

$$2A_{ACK}$$

Essendo i due triangoli congruenti.
Siccome, per dimostrazione precedente:

$$A_{ABCD} = A_{DHB} + A_{ACK}$$

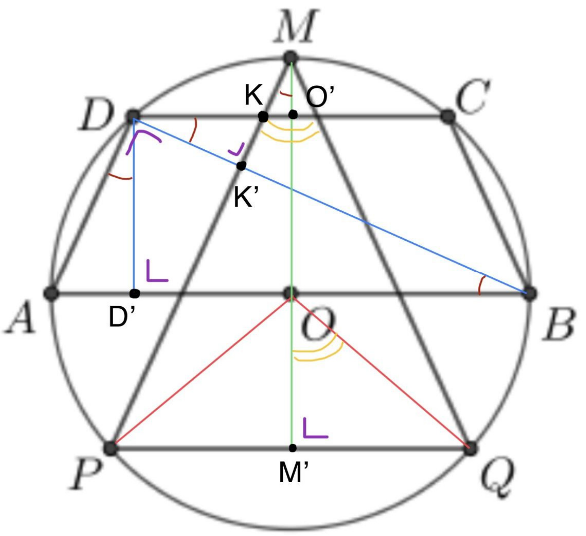
Possiamo dire che:

$$A_{ABCD} = 2A_{DHB}$$

Teniamo per un attimo da parte questa equazione, considerando i triangoli PMF e FMQ.
1) $M\widehat{P}F \cong M\widehat{Q}F$ (per ipotesi);
2) $M\widehat{F}P \cong M\widehat{F}Q$ (dimostrazione precedente);
3) MF in comune
Quindi i triangoli PMF e FMQ sono congruenti per il secondo criterio di congruenza generalizzato.
La somma delle loro aree è quindi esprimibile come:

$$2A_{PMF}$$
Oppure come:
$$2A_{QMF}$$
Per dimostrazione precedente, i triangoli DHB e PMF sono congruenti. Quindi possiamo dire, per la proprietà transitiva, che:
$$2A_{DHB} = 2A_{PMF}$$
Inoltre:
$$2A_{PMF} = A_{PMQ}$$
Dunque, possiamo riscrivere:
$$2A_{DHB} = A_{PMQ}$$
Quindi, sostituendo nell'equazione evidenziata in verde, otteniamo:
$$A_{ABCD} = A_{PMQ}$$
c.v.d

5) Soluzione proposta da Davide Giardini, Classe 5H, Liceo Scientifico Galilei, Pescara



Consideriamo il triangolo isoscele PMQ.
Dal punto M facciamo partire la mediana $\overline{MM'}$ che dividerà PMQ in due triangoli rettangoli congruenti. Tracciamo inoltre i raggi $\overline{OQ} = \overline{OP} = r$.

L'angolo alla circonferenza $P\hat{M}Q$ e l'angolo al centro $P\hat{O}Q$ insistono sulla stessa corda $\overline{PQ}$, di conseguenza $P\hat{O}Q = 2 \cdot P\hat{M}Q$.

Consideriamo i triangoli rettangoli $M'MQ$ e $M'OQ$.
Essendo l'angolo $M'\hat{M}Q = \frac{P\hat{M}Q}{2}$ e l'angolo $M'\hat{O}Q = \frac{P\hat{O}Q}{2}$,
$M'\hat{O}Q = 2 \cdot M'\hat{M}Q$. Poniamo $M'\hat{M}Q = x$, quindi $M'\hat{O}Q = 2x$.

Consideriamo il triangolo rettangolo $M'OQ$.

- $\overline{M'Q} = \overline{OQ}sen(M'\hat{O}Q) = rsen(2x)$ quindi $\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{M'Q} = 2rsen(2x)$
- $\overline{OM'} = \overline{OQ}cos(M'\hat{O}Q) = rcos(2x)$, quindi $\overline{MM'} = \overline{OM} + \overline{OM'} = r + rcos(2x) = r[1 + cos(2x)]$

Consideriamo il triangolo PMQ.
L'area di PMQ sarà

$$A(PMQ) = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{MM'}}{2} = \frac{2rsen(2x) \cdot r(1 + cos(2x))}{2} = r^2 \cdot sen(2x) \cdot [1 + cos(2x)]$$

Poniamo ora alcuni punti per il prossimo svolgimento, chiameremo quindi:

- K il punto di intersezione di $\overline{DC}$ con $\overline{MP}$;
- O' il punto di intersezione di $\overline{DC}$ con $\overline{MM'}$;
- K' il punto di intersezione di $\overline{DB}$ con $\overline{MP}$;

- D' la proiezione del punto del punto D sul diametro $\overline{AB}$.

Consideriamo il triangolo ADB (una volta tracciato $\overline{DB}$). Esso sarà rettangolo in $\hat{D}$ poiché l'angolo alla circonferenza $A\hat{D}B$ insiste sul diametro della circonferenza.
Essendo $\overline{AD}$ e $\overline{PM}$ paralleli per ipotesi, se $\overline{DB}$ è perpendicolare ad $\overline{AD}$ sarà perpendicolare anche a $\overline{PM}$.

Consideriamo i triangoli $KO'M$ e DKK':

- l'angolo $M\hat{O'}K = D\hat{K'}K = \frac{\pi}{2}$ come dimostrato;
- l'angolo $D\hat{K}K' = M\hat{K}O'$perché opposti al vertice.

I triangoli presi in considerazione sono simili con $K'\hat{D}K = K\hat{M}O' = x$.

Consideriamo le due parallele $\overline{AB}//\overline{CD}$(essendo $ABCD$ un trapezio) tagliate dalla secante $\overline{DB}$.
$\hat{C}DB = \hat{D}BA = x$ perché angoli alterni interni.

Consideriamo i triangoli rettangoli ADB e ADD':

- $D\hat{A}B$ angolo in comune;
- angolo $A\hat{D'}D = A\hat{D}B = \frac{\pi}{2}$.

Di conseguenza l'angolo $A\hat{B}D = A\hat{D}D' = x$.

- $\overline{AD} = \overline{AB} \cdot sen(A\hat{B}D) = 2rsen(x)$;
- $\overline{AD'} = \overline{AD} \cdot sen(A\hat{D}D') = 2rsen(x) \cdot sen(x) = 2rsen^2(x)$.

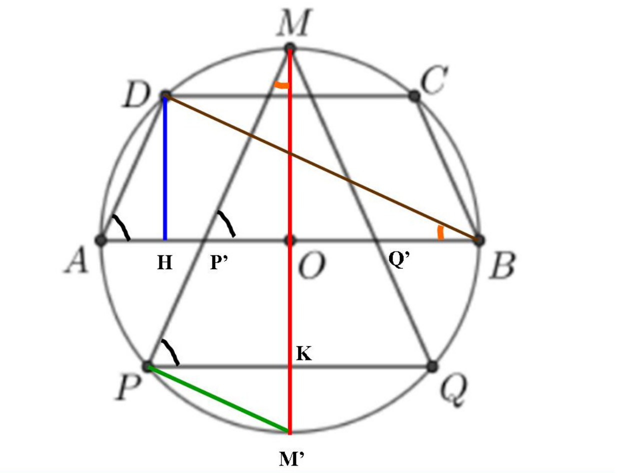
Consideriamo il trapezio isoscele $ABCD$:

- $$\begin{aligned}\overline{DC} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AD'} &= 2r - 4rsen^2(x) = 2r[1 - 2sen^2(x)] = \\ &= 2r[cos^2(x) + sen^2(x) - 2sen^2(x)] = \\ &= 2r[cos^2(x) - sen^2(x)] = \\ &= 2r \cdot cos(2x);\end{aligned}$$
- $\overline{AB} = 2r$ per ipotesi;
- $\overline{DD'} = \overline{AD} \cdot cos(A\hat{D}D') = 2rsen(x)cos(x) = r \cdot sen(2x)$

L'area di $ABCD$ sarà:
$A(ABCD) == \frac{(\overline{DC}+\overline{AB})\cdot\overline{DD'}}{2} = \frac{[2rcos(2x)+2r]\cdot rsen(2x)}{2} = r^2 \cdot sen(2x) \cdot [1 + cos(2x)]$

$A(PQM) = A(ABCD) = r^2 \cdot sen(2x) \cdot [1 + cos(2x)]$. c.v.d.

6) Soluzione proposta da Emanuele Cavuta, Classe 3G, Liceo Scientifico Galilei, Pescara



Ipotesi:
AD //MP
BC // MQ
PMQ triangolo isoscele

Per dimostrare l'equivalenza del trapezio ABCD con il triangolo MPQ, è necessario calcolare l'area del triangolo e verificare che il suo valore sia uguale all'area del trapezio.

Si osservi che le rette delle due corde $\overline{AB}$ (diametro) e $\overline{PQ}$ sono parallele tra loro, poiché entrambe le rette sono perpendicolari allo stesso diametro $\overline{MM'}$ e ciò è provato dalla proprietà secondo cui un diametro che divide in due parti uguali una qualsiasi corda, risulta perpendicolare ad essa (il diametro $\overline{MM'}$ divide in due parti uguali sia $\overline{AB}$ che $\overline{PQ}$).

Inoltre per essere $\overline{AD}//\overline{MP}$, si ha:

$D\hat{A}B = M\hat{P}'Q'$, in quanto angoli corrispondenti rispetto alle due parallele tagliate dalla trasversale $\overline{AB}$ (con P' e Q' ho indicato i punti in cui il diametro $\overline{AB}$ interseca i segmenti $\overline{MP}$ e $\overline{MQ}$).

Analogamente, per essere $\overline{AB}//\overline{PQ}$, si ha:

$M\hat{P}Q = M\hat{P}'Q'$ in quanto angoli corrispondenti rispetto alle due parallele tagliate dalla trasversale $\overline{PM}$.

Quindi i tre angoli $D\hat{A}B$, $M\hat{P}Q$ e $M\hat{P}'Q'$ sono uguali.

Si osservino ora i triangoli rettangoli ADB (retto in $\hat{D}$) e PKM (retto in $\hat{K}$, dove K indica il punto medio di $\overline{PQ}$). [[Errata: Essi sono rettangoli perché inscritti in una semicirconferenza.]] [Corrige: Solo ADB]

Tali triangoli, avendo uno dei due angoli acuti uguale ($D\hat{A}B = M\hat{P}K$), avranno anche l'altro angolo acuto uguale ($A\hat{B}D = P\hat{M}K$).
Quest'ultima uguaglianza consente di affermare che i due triangoli rettangoli ADB e M'PM sono uguali, avendo l'ipotenusa uguale (i due diametri AB e MM') ed un angolo acuto uguale (ABD e PMM').
La congruenza di questi triangoli consente di scrivere queste uguaglianze di segmenti:

$\overline{PK} = \overline{DH}$ [altezze relative all'ipotenusa]

$\overline{MK} = \overline{HB}$ [proiezioni dei cateti sull'ipotenusa]

A conclusione della dimostrazione geometrica si è arrivati a dimostrare la congruenza dei due triangoli DHB e PKM, da cui segue:

A (DHB) = A (PKM)

Per dimostrare l'equivalenza tra il trapezio ABCD ed il triangolo PMQ, basterà dimostrare che:

A (AHD)+ A (BCD) = A (DHB)

A (AHD)+ A (BCD) = $\frac{\overline{AH}\times\overline{DH}}{2} + \frac{\overline{DC}\times\overline{DH}}{2} = \frac{\overline{DH}(\overline{AH}+\overline{DC})}{2} = \frac{\overline{DH}\times\overline{HB}}{2} = A(DHB)$

Essendo $\overline{AH}+\overline{DC} = \overline{HB}$, sulla base delle congruenze dei segmenti $\overline{AH}$ e $\overline{H'B}$, nonché dei segmenti $\overline{DC}$ e $\overline{HH'}$. [Nella figura manca H']