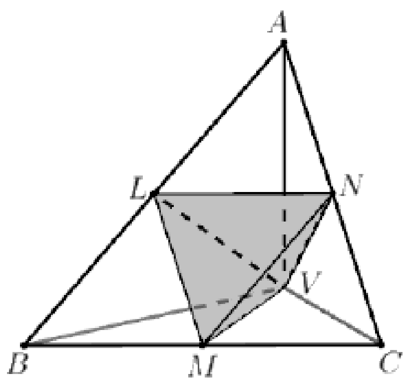
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia – Problema – 7 - 28 aprile 2021 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia dato il tetraedro $ABCV$. Le facce ABV, BCV e CAV sono triangoli rettangoli in V. Siano L, M, N i punti medi degli spigoli AB, BC e AC rispettivamente.
Provare che nel tetraedro $LMNV$ la somma degli angoli $M\widehat{V}N$, $N\widehat{V}L$, $L\widehat{V}M$, con vertici in V, è un angolo piatto.
Motivare la risposta.
[Suggerimento: si consiglia eventualmente di costruire un modello materiale della figura, anche usando un software di geometria].



Commento
Abbiamo ricevuto quattro risposte, tutte provenienti da classi di Licei Scientifici.
Il problema poneva un quesito relativo a un tetraedro trirettangolo e a un particolare tetraedro "iscritto" nel precedente.
Tutte le soluzioni arrivate sono sostanzialmente corrette. Nella seconda soluzione viene utilizzato il concetto di tetraedro isoscele (poco noto) e comunque non essenziale per la risoluzione del problema.

Abbiamo ricevuto soluzioni (nell'ordine in cui sono arrivate) da studenti delle seguenti scuole:
- Liceo Scientifico "Antonio Banfi", Vimercate (MB)
- ISIS "Arturo Malignani"- Liceo scientifico, Udine
- IISS Liceo Scientifico "Charles Darwin", Roma
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara

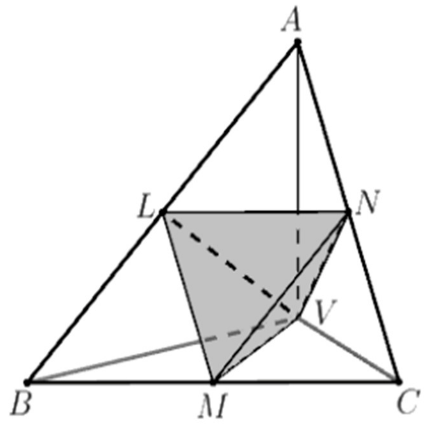
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione proposta da Rebecca Maria Rivolta 2E, Liceo Scientifico tradizionale "Antonio Banfi", Vimercate (MB)

Hp:
ABV, BCV, CAV triangoli rettangoli (in V)
AL=LB
BM=MC
AN=NC

Th:
MVN+NVL+LVM=180°



Dim:

Considero il triangolo MVN, esso ha
- NV che è la metà di AC per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo siccome, per hp, CAV è rettangolo e N è punto medio dell'ipotenusa AC.
- MV che è la metà di BC per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo, siccome, per hp BCV è rettangolo e M è punto medio dell'ipotenusa BC.
- MN che è la metà di AB per la conseguenza del piccolo Teorema di Talete nei triangoli, applicato al triangolo ABC, visto che M è il punto medio di BC e N è il punto medio di AC per hp.

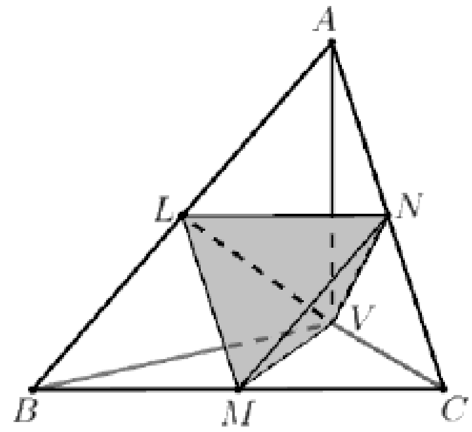
Considero il triangolo LVN, esso ha:
- LN che è la metà di BC per la conseguenza del piccolo Teorema di Talete nei triangoli, applicato al triangolo ABC, visto che N è il punto medio di AC e L è il punto medio di AB per hp.
- NV che è la metà di AC per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo siccome, per hp, CAV è rettangolo e N è il punto medio di AC (come anche precedentemente detto)
- LV che è la metà di AB per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo, siccome, per hp ABV è rettangolo e L è punto medio di AB.

Considero il triangolo LVM, esso ha:
- MV che è la metà di BC per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo, siccome, per hp BCV è rettangolo e M è punto medio dell'ipotenusa BC (come anche precedentemente detto)
- LM che è metà di AC per la conseguenza del piccolo teorema di Talete nei triangoli, applicato al triangolo ABC, dato che L è il punto medio di AB e M di BC per hp.
- LV che è la metà di AB per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo, siccome, per hp ABV è rettangolo e L è punto medio dell'ipotenusa AB (come anche precedentemente detto)

Pertanto, i triangoli sono tutti congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli e in particolare dalla congruenza tra i triangoli LVN e MVN si ottiene che l'angolo NVL è congruente all'angolo MNV (perché angoli corrispondenti in triangoli congruenti). Inoltre dalla congruenza dei triangoli LVM e MVN si ricava che l'angolo LVM è congruente all'angolo NMV (perché angoli corrispondenti in triangoli congruenti).

Dato che la somma di MVN + MNV + NMV è un angolo piatto, perché angoli interni del triangolo MNV, allora, per somma di angoli congruenti, anche MVN + NVL + LVM è uguale a un angolo piatto, c.v.d.

2) Soluzione proposta da Gaia Padrini, Liceo Scientifico Scienze Applicate, classe 2a, sez.D, ISIS "Arturo Malignani", Udine

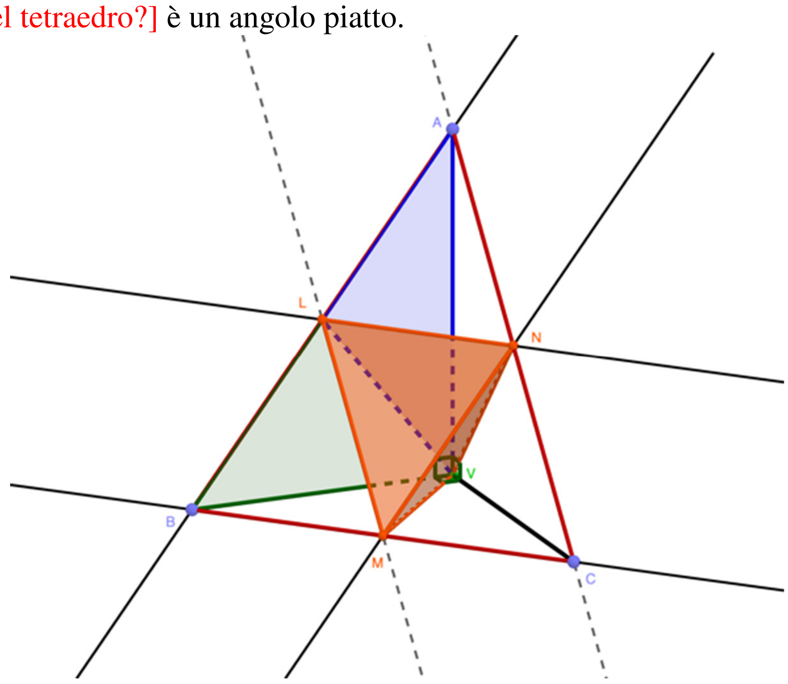


Ipotesi: Δ ABV, Δ BCV, ΔCAV rettangoli
$AL \cong LB$; $BM \cong MC$; $AN \cong NC$

Tesi: $\angle MVN + \angle NVL + \angle LVM = 180°$

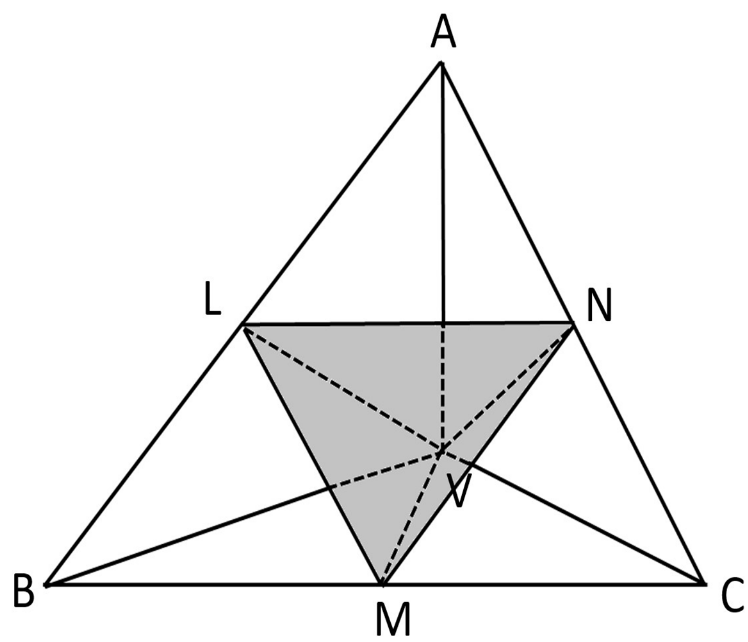
Prendo in considerazione [[la definizione]] [questa non può essere la definizione di tetraedro isoscele, che viene richiamata più sotto, ma eventualmente una sua proprietà caratteristica] [corrige: la proprietà]: **un tetraedro è isoscele se e solo se la somma dei tre angoli piani uscenti da ognuno dei suoi vertici è un angolo piatto.** [comunque questa definizione non serviva]
Se dimostro che il tetraedro LMNV è isoscele ho dimostrato la [[mia]] tesi.

Procedimento:
Prendo in considerazione il lato del tetraedro dato dove c'è il triangolo ABC.
Il triangolo LNM è [[mediano]] [mediale] del triangolo ABC, ho quindi che LN//BC e NM//AB; ciò genera il parallelogramma LNMB dove LN=BM e LB=NM.
Il triangolo AVB è rettangolo per ipotesi, la mediana VL è mediana dell'ipotenusa AB quindi VL=AL=LB.
Allora VL=NM.
Lo stesso ragionamento si applica per il triangolo AVC e il parallelogramma LNCM quindi VN=LM e per il triangolo BVC e il parallelogramma LNMB dove VM=LN.
Questo definisce che il tetraedro LNMV è isoscele: un tetraedro si dice isoscele se ogni spigolo ha la stessa lunghezza del suo spigolo opposto [un'altra definizione che non serviva dare] => VL spigolo opposto NM; VN spigolo opposto LM; VM spigolo opposto LN.
Le facce di un tetraedro isoscele sono uguali [congruenti] allora la somma dei tre angoli uscenti da un qualunque vertice [del tetraedro?] è un angolo piatto.



3) Soluzione proposta da Daniele Salvatori, IV liceo scientifico, IISS Darwin, Roma

Sia dato il tetraedro $ABCV$. Le facce ABV, BCV e CAV sono triangoli rettangoli in V. Siano L, M, N i punti medi degli spigoli [AB, BC e CD] [[$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$]] rispettivamente. Provare che nel tetraedro $LMNV$ la somma degli angoli $M\hat{V}N$, $N\hat{V}L$, $L\hat{V}M$, con vertici in V , è un angolo piatto. Motivare la risposta. *[Suggerimento: si consiglia eventualmente di costruire un modello materiale della figura, anche usando un software di geometria]*



Ipotesi:
$A\hat{V}B = 90°$; $B\hat{V}C = 90°$; $C\hat{V}A = 90°$.
$\overline{AL} = \overline{LB}$; $\overline{BM} = \overline{MC}$; $\overline{CN} = \overline{NA}$.

Tesi:
$M\hat{V}N + N\hat{V}L + L\hat{V}M = 180°$

Dimostrazione:
Vediamo sul piano una delle facce del tetraedro, ad esempio la faccia [[*AVC*]] *[AVB]*, che, per ipotesi, è un triangolo rettangolo.

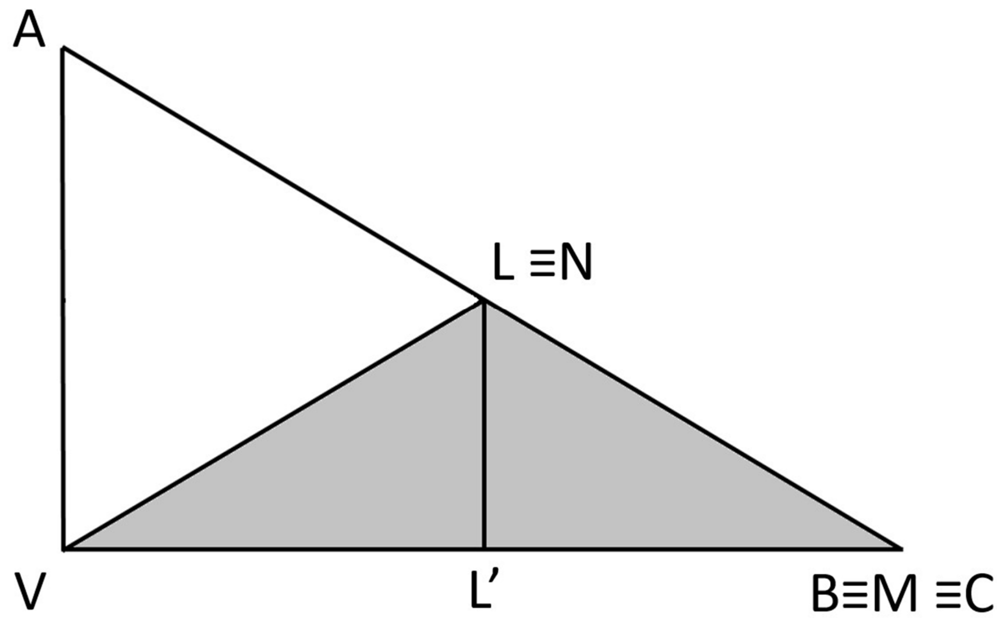
Da L, conduciamo la parallela al lato AV che intersecherà il lato $\overline{VB}$ nel punto L'. Il triangolo $LL'B$ è simile al triangolo AVB poiché i due hanno gli angoli uguali tra loro. Infatti, l'angolo $A\hat{B}V$ è in comune, sono entrambi rettangoli per costruzione ($A\hat{V}B = L\widehat{L'}B = 90°$) e, poiché la somma [degli angoli] è sempre pari a 180° per entrambi, si avrà anche l'uguaglianza $V\hat{A}B = L'\hat{L}B$. (L'uguaglianza degli angoli $V\hat{A}B$ e $L'\hat{L}B$ può anche essere dimostrata dal fatto che le due rette per AV e LL', parallele per costruzione, sono tagliate dalla trasversale per AB. Quindi i due angoli sono corrispondenti e quindi congruenti.)

Per il teorema di Talete, viste le due rette per AB e VB, tagliate dalle due rette parallele per AV e LL', si può scrivere:

$\overline{AL}$: $\overline{LB}$=$\overline{VL'}$: $\overline{L'B}$

Poiché $\overline{AL}$=$\overline{LB}$ per ipotesi, allora $\overline{VL'}$=$\overline{L'B}$. Quindi $\overline{LL'}$ è una mediana del triangolo VLB.

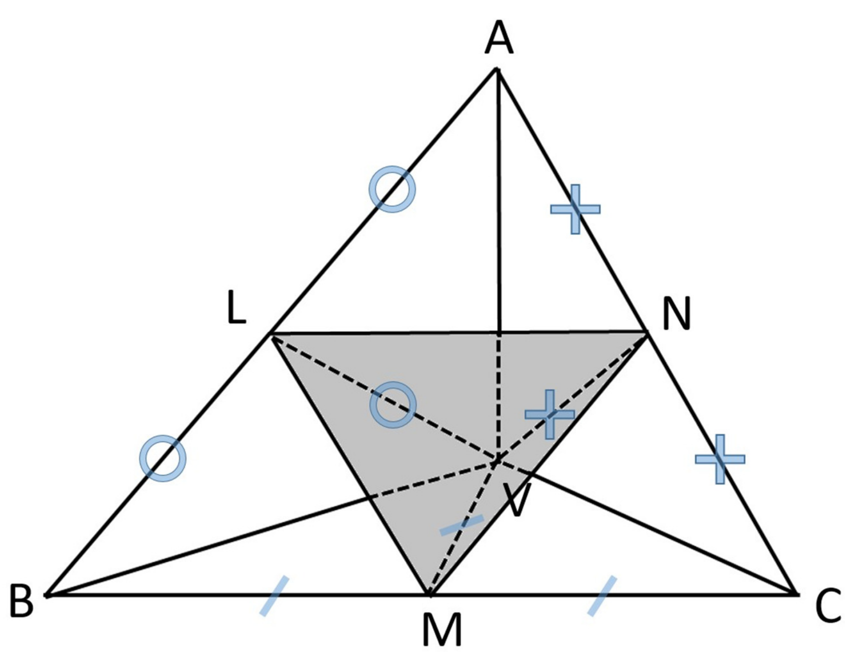
Ma allora, il triangolo VLB ha l'altezza $\overline{LL'}$ (per nostra costruzione) coincidente con la mediana. Quindi il triangolo suddetto è isoscele e cioè $\overline{VL}$ =$\overline{LB}$(=$\overline{LA}$).



Lo stesso ragionamento si potrà fare anche per gli altri due triangoli rettangoli del tetraedro, risultando:

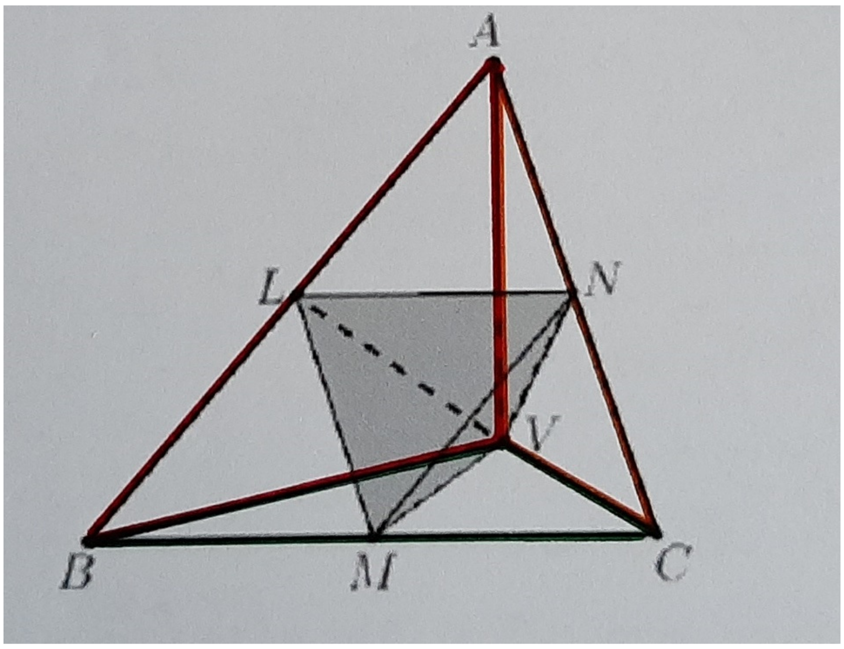
$$\overline{MV} = \overline{MC}\,(= \overline{MB})$$
$$\overline{NV} = \overline{NC}\,(= \overline{AN}).$$

In definitiva, con le precedenti uguaglianze si dimostra che:
il triangolo LVM è uguale al triangolo LBM (avendo il lato $\overline{LM}$ in comune e gli altri due uguali);
il triangolo MVN è uguale al triangolo NCM (avendo il lato $\overline{MN}$ in comune e gli altri due uguali);
il triangolo LVN è uguale al triangolo LAN (avendo il lato $\overline{LN}$ in comune e gli altri due uguali)
come indicato nella seguente figura.



(In pratica, i triangoli LBM, NCM e LAN sono “ripiegati” per chiudersi nel tetraedro $LMNV$!)
Osservando la figura, si ha
$L\hat{V}M = L\hat{B}M$;
$L\hat{V}N = L\hat{A}N$;
$M\hat{V}N = N\hat{C}M$.
Poiché per il triangolo ABC si ha $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ (somma degli angoli interni), allora dalle uguaglianze scritte sopra:
$L\hat{V}M + L\hat{V}N + M\hat{V}N = 180°$, c.v.d.

4) Soluzione proposta da Emanuele Cavuta, Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara, classe 3^G



I triangoli ABV, BVC e CVA hanno, per costruzione, le seguenti congruenze:
AL = LB
BM = MC
AN = NC
Inoltre, essendo rettangoli in V, tali triangoli possono considerarsi inscritti in una semicirconferenza ed il punto medio di ciascuna ipotenusa è equidistante dai vertici dell'ipotenusa stessa e dai vertici dell'angolo retto. Pertanto:
AL = LB = LV
BM = MC = MV
AN = NC = NV
Considerando poi queste coppie di triangoli ALN e VLN, BLM e VLM, CMN e VMN si ha che:
per il terzo criterio di uguaglianza (dei triangoli) essi hanno un lato in comune e due lati uguali, sulla base delle uguaglianze sopra riportate. In particolare, la coppia di triangoli ALN e VLN ha:
LN in comune;
AL = LV e VN = AN
La coppia di triangoli BLM e VLM ha:
LM in comune;
LV = LB e BM = MV
La coppia di triangoli CMN e VMN ha:
MN in comune;
NV = NC e MV = MC
Inoltre, risultano vere anche le seguenti affermazioni:
l'angolo in V della faccia VLN = all'angolo in A del triangolo ALN;
l'angolo in V della faccia VLM = all'angolo in B del triangolo BLM;
l'angolo in V della faccia VMN = all'angolo in C del triangolo CMN.
Gli angoli in A, B e C sono angoli interni della faccia/triangolo ABC, la cui somma misura un angolo piatto, che esprime, pertanto, anche la misura della somma dei tre angoli in V considerati.