FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia – Problema – 7 - 21 ottobre 2019 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia ABC un triangolo e sia AM la mediana relativa al lato BC. Dimostrare che
(a) AM è minore della semisomma dei lati AB e AC e maggiore della loro semidifferenza;
(b) la somma delle tre mediane è minore del perimetro del triangolo dato;
(c) la somma delle tre mediane è maggiore del semiperimetro del triangolo dato. Dimostrare, anzi, che la somma delle mediane è maggiore dei tre quarti del perimetro del triangolo.

Motivare le risposte.

Commento

Sono arrivate cinque risposte.
Il problema poneva tre quesiti riguardanti tutti le mediane di un triangolo.
Le risposte arrivate sono tutte sostanzialmente corrette e utilizzano le note disuguaglianze tra i lati di un triangolo e la proprietà del baricentro di un triangolo di dividere ogni mediana in due parti delle quali quella che contiene il vertice è doppia dell'altra. Si può infine notare che l'uso del modulo nella differenza di due segmenti si può omettere osservando che ogni lato di un triangolo è maggiore della differenza degli altri due (a maggior ragione se questa fosse negativa).

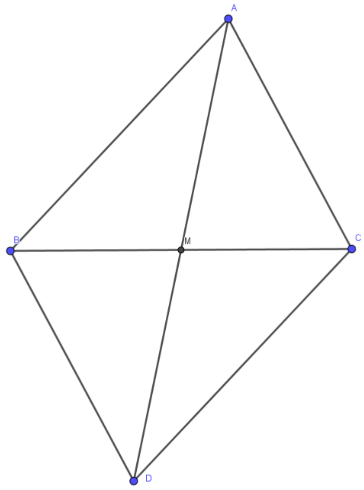
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "A. Pacinotti", Cagliari
- Istituto Superiore "G. Terragni", Olgiate Comasco (CO)
- Liceo Statale "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)
- Liceo "B. Russell", Roma.

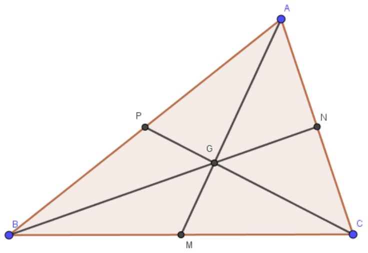
Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione proposta dalla classe 3 H indirizzo Scientifico Liceo "Aristosseno", Taranto
Soluzione proposta dalla classe 2^ B Scientifico Internazionale



(a) Prolunghiamo la mediana AM, dalla parte di M , di un segmento MD congruente ad AM e congiungiamo il punto D con i punti B e C . Il quadrilatero ABDC è un parallelogramma perché le sue diagonali BC e AD si incontrano del loro punto medio M ; perciò BD = AC . Nel triangolo ABD si ha che :AD < AB + BD e quindi 2AM < (AB + AC) da cui AM < (AB + AC)/2 . Nello stesso triangolo ABD risulta : AD > AB -BD e quindi :
2AM > AB-AC da cui AM> (AB-AC)/2.



(b)
Tracciate le tre mediane utilizziamo quanto visto nel punto (a). Dalle disuguaglianze :
AM < (AB + AC)/2 , BN < (AB + BC) /2 , CP < (AC + BC)/2 sommando membro a membro si ottiene :
AM + BN + CP < 2P/2=P cioè la somma delle tre mediane è minore del perimetro P del triangolo ABC.
(c) Nel triangolo ABM : AM > AB – BC/2
Nel triangolo BNC : BN > BC – AC/2
Nel triangolo CPA : CP > AC- AB/2 sommando membro a membro queste tre disuguaglianze si ha :
AM+BN+CP > AB/2 + BC/2 + AC/2 = P/2 = p
cioè la somma delle tre mediane è maggiore del semiperimetro p del triangolo ABC .
(c)ultima parte
Indicato con G il baricentro del triangolo ABC , ricordiamo che questo punto divide ciascuna mediana in due parti di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra per cui la parte di mediana che contiene il vertice è i 2/3 dell'intera mediana.
Nel triangolo AGC : AG + GC > AC per cui 2AM/3 + 2CP/3 > AC
Nel triangolo AGB : AG + GB > AB per cui 2AM/3 + 2BN/3> AB
Nel triangolo BGC : BG + CG [[<]] [>] BC per cui 2BN/3 + 2CP/3 > BC
sommando membro a membro le tre ultime disuguaglianze otteniamo : 4(AM + BN + CP) / 3 > P

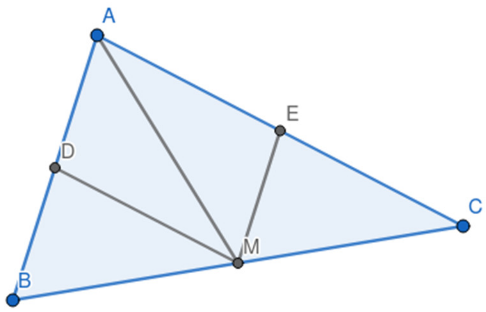
da cui , moltiplicando ambo i membri per ¾ , si ha : AM + BN + CP > 3P/4 e quindi la somma delle tre mediane risulta maggiore dei ¾ del perimetro P del triangolo ABC.

2) Soluzione proposta da Leo Cazzaniga – 2^I – Liceo scientifico "A. Pacinotti" – Cagliari

a)

Ipotesi: $MB \cong MC$

1^ Tesi: $\frac{AC - AB}{2} < AM < \frac{AC + AB}{2}$



Dimostrazione

Siano D ed E rispettivamente i punti medi di AB e AC. Tracciamo i segmenti MD e ME.

I triangoli BDM e ABC hanno:

- l'angolo (ABC) in comune;
- i lati rispettivamente proporzionali, infatti $\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{MB}$, poiché DB e MB sono, rispettivamente, la metà di AB e CB.

I triangoli BDM e ABC sono, pertanto, simili per il 2° criterio di similitudine, poiché hanno un angolo congruente [[e due lati proporzionali]] [e i due lati che lo comprendono proporzionali].

I triangoli EMC e ABC hanno:

- l'angolo (BCA) in comune;
- i lati rispettivamente proporzionali, infatti $\frac{AC}{EC} = \frac{BC}{MC}$, poiché EC e MC sono, rispettivamente, la metà di AC e BC.

I triangoli EMC e ABC sono, pertanto, simili per il 2° criterio di similitudine, poiché hanno un angolo congruente [[e due lati proporzionali]] [e i due lati che lo comprendono proporzionali].

Riassumendo, i triangoli BDM e ABC sono simili, e anche EMC e ABC sono simili. Per la proprietà transitiva, quindi i triangoli BDM, EMC e ABC sono tutti simili.

Si può quindi affermare che $(DMB)^{\cong (ACB)}$, in quanto angoli corrispondenti nei triangoli BDM e ABC, simili per precedente dimostrazione.

Si può inoltre affermare che $(CME)^{\cong (CBA)}$, in quanto angoli corrispondenti nei triangoli EMC e ABC, simili per precedente dimostrazione.

Si osservi che la somma degli angoli (DMB), (DME), (EMC) è un angolo piatto e che anche la somma degli angoli (ABC), (BAC), (BCA) in quanto angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

Allora gli angoli $(DME) \cong \pi - (DMB) - (EMC)$ e $(BAC) \cong \pi - (BCA) - (ABC)$ sono congruenti perché differenze di angoli congruenti.

Nei triangoli BDM e MEC, simili per precedente dimostrazione, $(BDM) \cong (MEC)$ perché corrispondenti nei suddetti triangoli simili. Da ciò si evince che $(ADM) \cong (MEA)$, poiché supplementari di angoli congruenti.

Dunque il quadrilatero AEMD è un parallelogramma, poiché ha gli angoli opposti congruenti ($(DME) \cong (BAC)$ e $(ADM) \cong (MEA)$ per dimostrazioni precedenti).

Allora $AE \cong DM$ e $AD \cong EM$ poiché lati opposti del parallelogramma AEMD.

Poiché in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza, considerando ora il triangolo AEM, si può stabilire che $AE - EM < AM < AE + EM$.

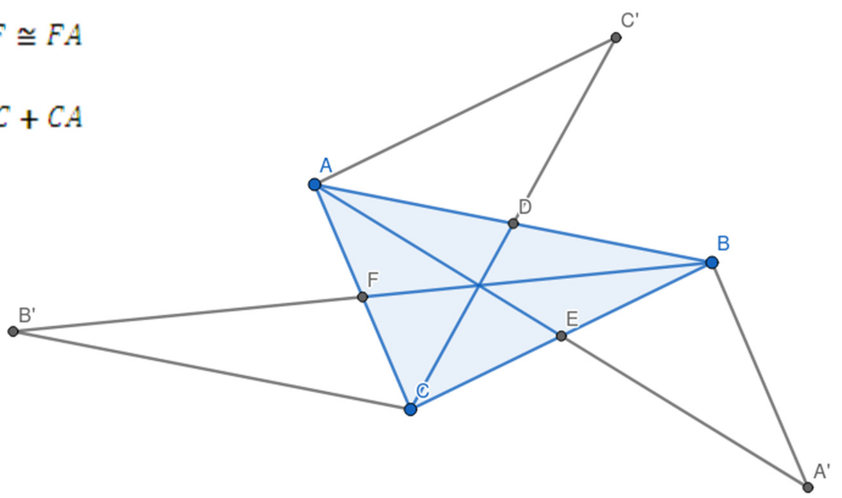
Quindi, essendo AE la metà di AC, ed EM congruente a AD, che è la metà di AB, possiamo riscrivere le disuguaglianze nel seguente modo.

$$\frac{AC}{2} - \frac{AB}{2} < AM < \frac{AC}{2} + \frac{AB}{2}$$

È così dimostrata la prima tesi.

b)
Ipotesi: $AD \cong DB$, $BE \cong EC$, $CF \cong FA$

2^Tesi: $AE + BF + CD < AB + BC + CA$



Prolunghiamo rispettivamente AE, BF e CD, dalla parte dei punti medi, di segmenti tali che $AE \simeq EA'$, $BF \simeq FB'$, $CD \simeq DC'$ e tracciamo i segmenti AC′, BA′, CB′.

I triangoli ADC′ e DCB hanno:

- $AD \cong DB$ per ipotesi;
- $CD \cong DC'$ per costruzione;
- $(ADC')^{\cong(CDB)}$ perché opposti al vertice.

Dunque $ADC' \cong DCB$ per il primo criterio di congruenza.
Da ciò si deduce che $CB \cong AC'$, perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

I triangoli BEA′ e CEA hanno:

- $BE \cong EC$ per ipotesi;
- $AE \cong EA'$ per costruzione;
- $(BEA')^{\cong(AEC)}$ perché opposti al vertice.

Dunque $BEA' \cong CEA$ per il primo criterio di congruenza.
Da ciò si deduce che $AC \cong BA'$, perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

I triangoli CFB′ e BFA hanno:

- $CF \cong FA$ per ipotesi;
- $BF \cong FB'$ per costruzione;
- $(CFB')^{\cong(BFA)}$ perché opposti al vertice.

Dunque $CFB' \cong BFA$ per il primo criterio di congruenza.
Da ciò si deduce che $AB \cong CB'$, perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

Per la disuguaglianza triangolare, possiamo affermare che:
nel triangolo ACC′, $CC' < AC + AC'$, quindi (sostituendo segmenti congruenti) $2CD < AC + CB$.
Nel triangolo BAA′, $AA' < BA + BA'$, quindi (sostituendo segmenti congruenti) $2AE < AB + AC$.
Nel triangolo CBB′, $BB' < CB + CB'$, quindi (sostituendo segmenti congruenti) $2BF < CB + AB$.

Sommando membro a membro le tre [[disequazioni]] [disuguaglianze], otteniamo:

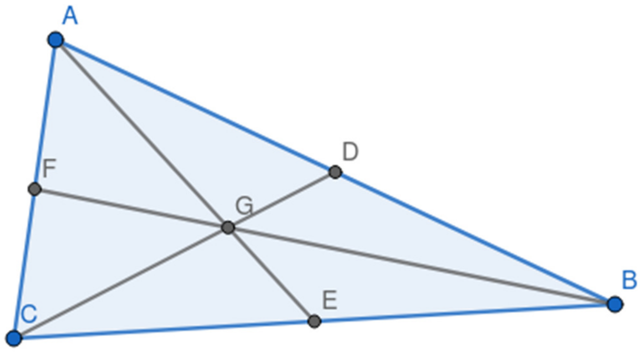
$$2CD + 2AE + 2BF < 2AB + 2CB + 2AC$$

Quindi, dividendo per 2 entrambi i membri, si ottiene $CD + AE + BF < AB + CB + AC$.
È così dimostrata la seconda tesi.

c)

Ipotesi: $AD \cong DB$, $BE \cong EC$, $CF \cong FA$

3^Tesi: $AE + BF + CD > \frac{3}{4}(AB + BC + CA)$



Per la disuguaglianza triangolare, possiamo affermare che:
nel triangolo AGC, $AG + GC > CA$,
nel triangolo CGB, $GC + BG > BC$,
nel triangolo AGB, $BG + AG > AB$.

Sommando membro a membro le tre [[disequazioni]] [disuguaglianze], si ottiene:
$2AG + 2GC + 2BG > AB + BC + CA$

Applicando il teorema della mediana e del baricentro (che afferma "in un triangolo il baricentro divide ogni mediana in due parti, di cui quella con il vertice è il doppio dell'altra"), ricaviamo:
$AG \cong \frac{2}{3}AE$, $GC \cong \frac{2}{3}CD$ e $BG \cong \frac{2}{3}BF$.

Sostituendo queste tre uguaglianze nella [[disequazione]] [disuguaglianza] precedente, si ha:
$2\left(\frac{2}{3}AE + \frac{2}{3}CD + \frac{2}{3}BF\right) > AB + BC + CA$

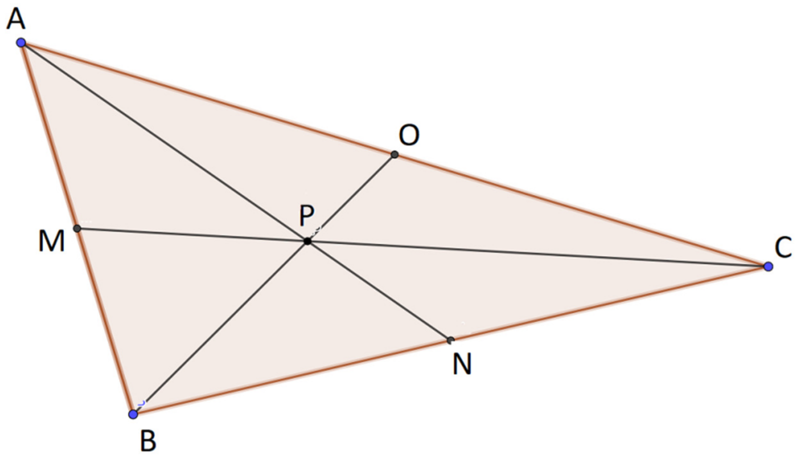
Effettuando un raccoglimento totale al primo membro, otteniamo:
$\frac{4}{3}(AE + CD + BF) > AB + BC + CA$.

Per il secondo principio, dividendo entrambi i membri per $\frac{4}{3}$ si ha infine
$AE + CD + BF > \frac{3}{4}(AB + BC + CA)$.

È così dimostrata anche la terza tesi.

3) Soluzione proposta dalla Classe 2^B Indirizzo Scientifico dell'Istituto Superiore "G. Terragni" di Olgiate Comasco (Co)

Nel corso della dimostrazione indicheremo con p il semiperimetro, con 2p il perimetro, con m la somma delle lunghezze delle tre mediane del triangolo)



IPOTESI

1)$\exists$ ABC **triangolo**

2)$CN \cong NB$ $N \in BC$

3)$AM \cong MB$ $M \in AB$

4) $AO \cong OB$ $O \in AC$ OC e non OB

5)$P \equiv AN \cap CM \cap BO$

Tesi1: $\frac{AB-AC}{2} < AN < \frac{AB+BC}{2}$ **[vista la figura invertire AB e AC e sostituire BC con AC]**

Dimostrazione 1

Prolunghiamo il lato AN di un segmento ND in modo che $AN \cong ND$

Consideriamo i triangoli ANC e BND, [[possiamo dimostrare che]] sono congruenti perché hanno congruenti due lati e l'angolo compreso, perciò hanno congruenti anche i lati AC e BD. Analogamente consideriamo i triangoli ABN e CDN, con motivazioni analoghe alle precedenti possiamo dire che sono congruenti ed in particolare hanno congruenti i lati AB e CD.

Consideriamo il triangolo ABD dall'applicazione delle disuguaglianze triangolari otteniamo:

$CD - AC < AD < AC + CD$ ovvero

$CD - AC < 2AN < AC + CD$

$\frac{CD-AC}{2} < AN < \frac{AC+CD}{2}$ da cui tenendo conto che $AC \cong BD$ e $AB \cong CD$

Arriviamo alla prima parte della tesi

$\frac{AB-AC}{2} < AN < \frac{AB+AC}{2}$

[In tutte le differenze invertire i due termini]

Tesi 2: $CM + BO + AN < 2p$

Dimostrazione 2

Per quanto dimostrato al punto precedente, possiamo scrivere

$$AN < \frac{AB + AC}{2}$$

$$CM < \frac{AC + BC}{2}$$

$$BO < \frac{AB + BC}{2}$$

Da cui sommando membro a membro

$$AN + CM + BO < \frac{AB + AC}{2} + \frac{AC + BC}{2} + \frac{AB + BC}{2}$$

$$\mathbf{AN + CM + BO} < \frac{\mathbf{2AB + 2BC + 2CA}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{AN + CM + BO} < AB + BC + CA$$

$$\rightarrow m < 2p$$

Tesi 3: $AN + \mathbf{CM + BO} > \frac{3}{4(2p)}$ [scritto male]

Dimostrazione 3

[togliere tutti gli uguali]

Sappiamo che il baricentro P divide ciascuna mediana in due parti tali che una è il doppio dell'altra.

$AP = \frac{2}{3}AN;$ $PN = \frac{1}{3}AN$

$AP = \frac{2}{3}AN,$ $BP = \frac{2}{3}BO,$ $\mathbf{CP} = \frac{2}{3}CM$

Per le disuguaglianze triangolari applicate al triangolo ABP sappiamo che:

$AB \leq AP + BP$ e deduciamo

$AB \leq \frac{2}{3}AN + \frac{2}{3}BO$

Applicando le disuguaglianze triangolari al triangolo BCP sappiamo che:

$BC \leq \mathbf{BP} + CP$ e deduciamo

$BC \leq \frac{2}{3}\mathbf{BO} + \frac{2}{3}CM$

$AC \leq \mathbf{AP} + CP$ e deduciamo

$AC \leq \frac{2}{3}\mathbf{AN} + \frac{2}{3}CM$

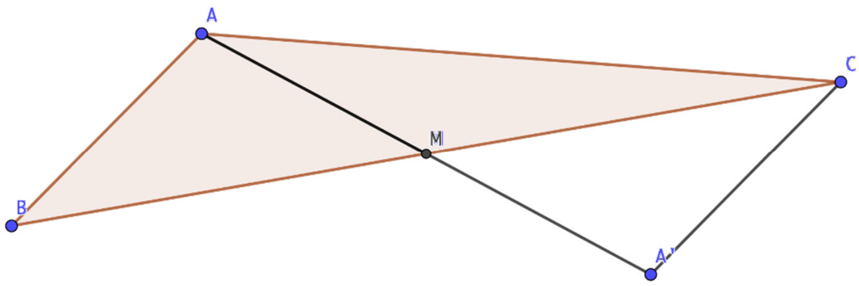
Quindi tra queste tre disuguaglianze sommando membro a membro otteniamo:

$$AB + BC + CA \le \frac{2}{3}AN + \frac{2}{3}BO + \frac{2}{3}CM + \frac{2}{3}AN + \frac{2}{3}CM + \frac{2}{3}BO$$

$$2p \le \frac{4}{3}AN + \frac{4}{3}Bo + \frac{4}{3}CM$$

[[....]]

4) Chiara Stocco, Classe 2^BSO, Liceo Statale "Giorgione" di Castelfranco Veneto (TV)



a)

Sia *A'* il simmetrico di A rispetto ad *M*. Nel quadrilatero *ABA'C* le diagonali si dimezzano quindi è un parallelogramma.

Nel triangolo *AA'C* un lato è minore della somma degli altri due: $AA' < AC + A'C$

ma *AA'* = *2AM* e *A'C* = *AB*

Quindi, sostituendo, $2AM < AC + AB$ -> $AM < \dfrac{AC + AB}{2}$

Analogamente, nel triangolo *AA'C* un lato è maggiore della differenza degli altri due: $AA' > |AC - A'C|$, ma *AA'* = *2AM* e *A'C* = *AB*

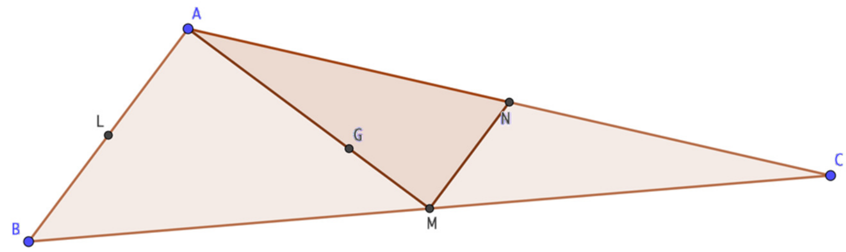
Quindi, sostituendo, $2AM > AC - A'C$ -> $AM > \dfrac{|AC - AB|}{2}$

[esaminando la figura il modulo si può omettere]

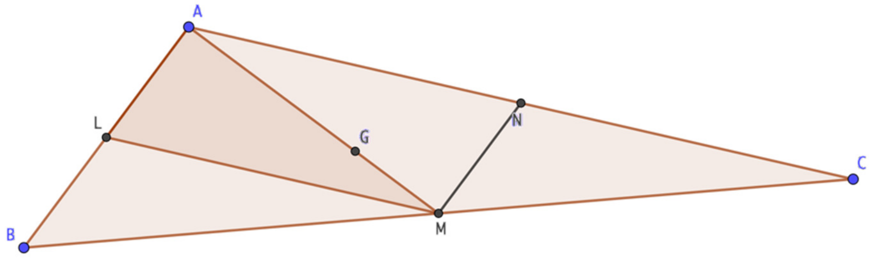
b)

Siano *BN* e *CL* le altre due mediane.

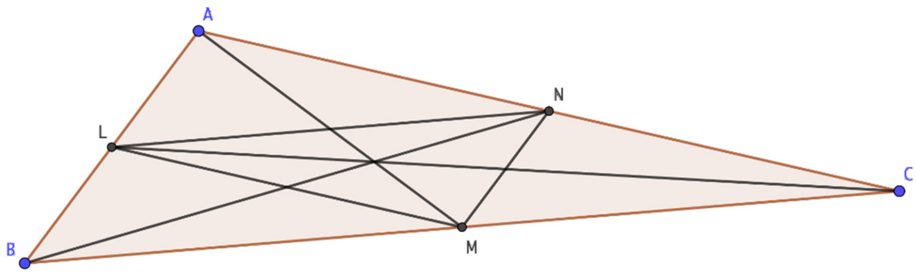
Nel triangolo *ANM: AM < AN+NM*



Nel triangolo *AML: AM < ML+AL*



Nel triangolo *BNM: BN < BM+MN*
Nel triangolo *BLN: BN < BL+LN*
Nel triangolo *LMC: LC < LM+MC*
Nel triangolo *LNC: LC < LN+NC*



Tenendo conto che BM=MC, AL=BL, AN=CN e sommando tutti i termini:
2(AM+BN+LC) < 2*[(AL+BL)+(BM+MC)+(AN+NC)]
e, dividendo per 2: $AM + BN + LC < AB + BC + CA$

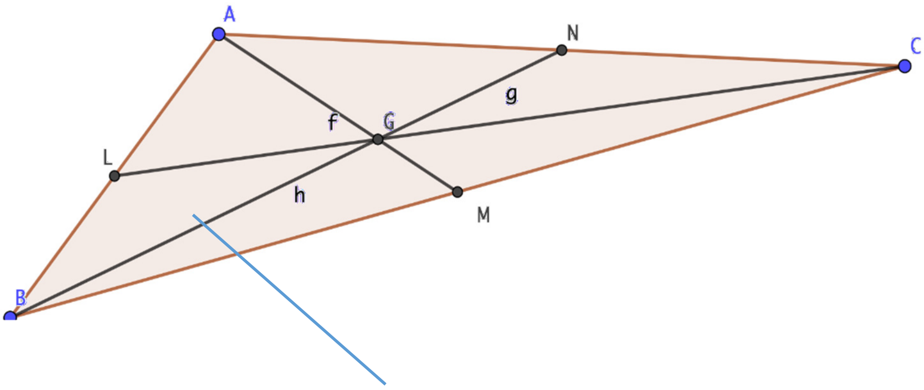
c) prima parte
Nel triangolo *AMC: AM* > |*AC – CM*|
Nel triangolo *AMB: AM* > |*AB – BM*|
Nel triangolo *BNC: BN* > |*BC – CN*|
Nel triangolo *ABN: BN* > |*BA-AN*|
Nel triangolo *BCL: LC* > |*BC – BL*|
Nel triangolo *LAC: LC* > |*AC – AL*|
[come prima i moduli si possono opportunamente trascurare esaminando la figura]
[[Trascurando i moduli (eventualmente discutendo il segno all'interno) e]] Sommando i termini:
2 (AM+BN+LC) > AB + BC + CA
e, dividendo per 2: $AM + BN + LC > \frac{AB + BC + CA}{2}$

c) seconda parte

Nel triangolo ABG: AB < AG+GB

Nel triangolo BCG: BC < GB + GC

Nel triangolo CAG: CA < AG + GC



Sommando i termini:

AB + BC + CA < AG+GB + GB + GC + AG + GC

Poiché, per la proprietà delle mediane in cui il baricentro G divide ogni mediana in due parti in cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra, è $AG = \frac{2}{3}AM$; $CG = \frac{2}{3}CL$; $BG = \frac{2}{3}BN$

Quindi, sostituendo, $AB + BC + CA < 2\left(\frac{2}{3}AM + \frac{2}{3}CL + \frac{2}{3}BN\right)$

[[….]]

5) Paolo Battisti, IV G del Liceo "B. Russell" di Roma

[in base alle regole, questa soluzione non sarebbe accettabile perché proposta da un allievo di una classe IV Liceo scientifico].

HP

1) BM ≅ MC, (AM mediana)

2) CK ≅ KA, (BK mediana)

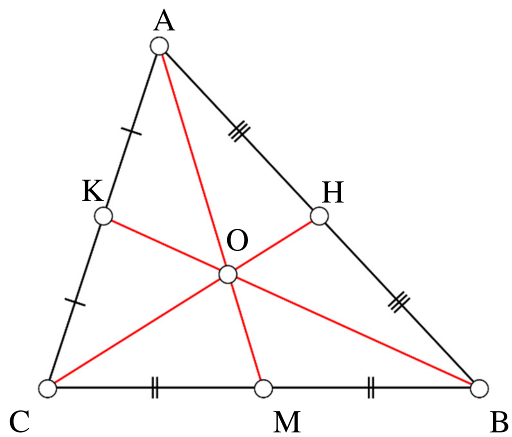
3) AH ≅ HB, (CH mediana)

TH

1) $\frac{1}{2}$ (AC - AB) < AM < $\frac{1}{2}$ (AC + AB)

2) AM + BK + CH < AB + CB + AC

3) AM + BK + CH > $\frac{3}{4}$ (AB + CB + AC)



DIMOSTRAZIONE

TH1

Tracciamo il segmento KM, congiungendo due punti medi. Abbiamo KM ≅ $\frac{1}{2}$ AB **(1)** perché i triangoli CMK e ABC sono simili, poiché hanno un angolo in comune (C) e due lati in proporzione (CM ≅ $\frac{1}{2}$BC e CK ≅ $\frac{1}{2}$AC) per **HP1** e **HP2**.

Prendiamo in considerazione il triangolo KMA e ricordiamo il seguente enunciato: *un lato di un triangolo è minore della somma degli atri due e maggiore della loro differenza* **(2)**, quindi:

AK - KM < AM < AK + KM

Sostituiamo con AK $\cong \frac{1}{2}$AC (per **HP2**) e KM $\cong \frac{1}{2}$AB (come dimostrato precedentemente **(1)**).

Raccogliamo $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\ (AC - AB) < AM < \frac{1}{2}\ (AC + AB)$$

C.V.D.

TH2

Riprendiamo la **TH1**, in particolare la disequazione tra secondo e terzo membro:

$$AM < \frac{1}{2}\ (AC + AB)$$

Analogamente per le altre due mediane:

$$BK < \frac{1}{2}\ (CB + AB)$$

$$CH < \frac{1}{2}\ (AC + CB)$$

Ricordiamo che: *se* $a<b$ *e* $c<d \Rightarrow a + c < b + d$ **(3)**, quindi:

$$AM + BK + CH < \frac{1}{2}\ (AC+AB) + \frac{1}{2}\ (CB+AB) + \frac{1}{2}\ (AC+CB)$$

Svolgendo i calcoli:

$$AM + BK + CH < \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CB + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}CB$$

E infine:

$$AM + BK + CH < AB + CB + AC$$

C.V.D.

TH3

Chiamiamo il punto d'intersezione tra le mediane O.

Partiamo dall'enunciato **(2)**, esaminando i triangoli ABO, CBO e ACO:

$$AO - BO < AB < AO + BO$$

$$CO - BO < CB < CO + BO$$

$$AO - CO < AC < AO + CO$$

In particolare la disequazione tra secondo e terzo membro, ovvero:

$$AB < AO + BO$$

$$CB < CO + BO$$

$$AC < AO + CO$$

[[Secondo l'enunciato **(3)**:]] [che sommate membro a membro danno]

$$AB + CB + AC < AO + BO + CO + BO + AO + CO$$

Ovvero:

$$AB + CB + AC < 2AO + 2BO + 2CO.$$

Per l'enunciato che dice che l'intersezione delle mediane (in questo caso O) le divide in due segmenti, delle quali quella che contiene il vertice è doppia dell'altra

, abbiamo:

$$AO \cong \frac{2}{3}\ AM$$

$BO \cong \frac{2}{3} BK$

$CO \cong \frac{2}{3} CH$

Sostituendo e raccogliendo:

$AB + CB + AC < \frac{4}{3} (AM + BK + CH)$

Invertiamo i membri:

$\frac{4}{3} (AM + BK + CH) > AB + CB + AC$

Moltiplichiamo entrambe per $\frac{3}{4}$:

$AM + BK + CH > \frac{3}{4} (AB + CB + AC)$ [>1/2(AB+CB+AC) per rendere conto della prima richiesta del punto c]

C.V.D.