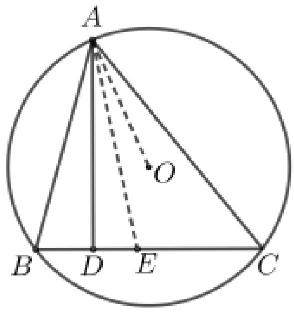
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia – Problema – 9 - 30 marzo 2020 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia O il circocentro del triangolo acutangolo ABC. Chiamato D il piede dell'altezza condotta da A sul lato BC, provare che la bisettrice AE dell'angolo $B\hat{A}C$ è anche bisettrice dell'angolo $D\hat{A}O$.
Motivare la risposta.



Commento
Sono arrivate 10 risposte prevalentemente da classi II di liceo scientifico.

Il problema poneva un quesito relativo a un triangolo acutangolo inscritto in una circonferenza e chiedeva di dimostrare che la bisettrice di un angolo in un vertice era anche bisettrice dell'angolo formato dall'altezza e dal raggio condotti dallo stesso vertice.
Le risposte giunte sono sostanzialmente tutte corrette e utilizzano note proprietà degli angoli di un triangolo e degli angoli alla circonferenza.
Ci preme però notare una certa "trascuratezza" in qualche risoluzione, dove non vengono ben evidenziati i motivi di certe affermazioni, mentre al contrario in qualche altra c'è viceversa una "sovrabbondanza" di passaggi che, ad un più attento esame, si sarebbero potuti ridurre di molto. L'ideale è poter giungere (tramite l'esercizio) ad un giusto equilibrio che consenta di arrivare ad una dimostrazione efficace ma anche sintetica.

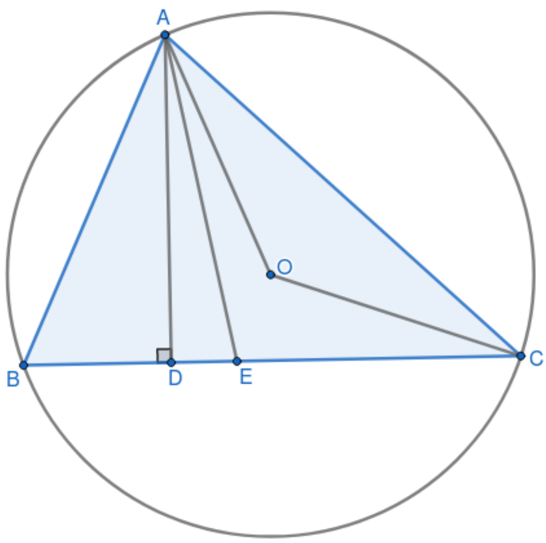
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
-Liceo Scientifico "A. Pacinotti", Cagliari
-Liceo Scientifico internazionale "Aristosseno", Taranto
-Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta (BAT), 3 soluzioni
-Liceo "A. Volta", Colle di Val d'Elsa (SI)
-Liceo Scientifico "Nicolò Copernico", Torino
-Liceo Scientifico "Barsanti e Matteucci", Viareggio (LU)
-Liceo Scientifico "Galeazzo Alessi", Perugia
-Liceo Ginnasio Statale "Giorgione", Castelfranco Veneto (TV)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione proposta da Leo Cazzaniga, 2^I Liceo scientifico "A. Pacinotti", Cagliari

Ipotesi: $B\hat{A}E \simeq E\hat{A}C, AD \perp BC$
Tesi: $D\hat{A}E \simeq E\hat{A}O$



Dimostrazione

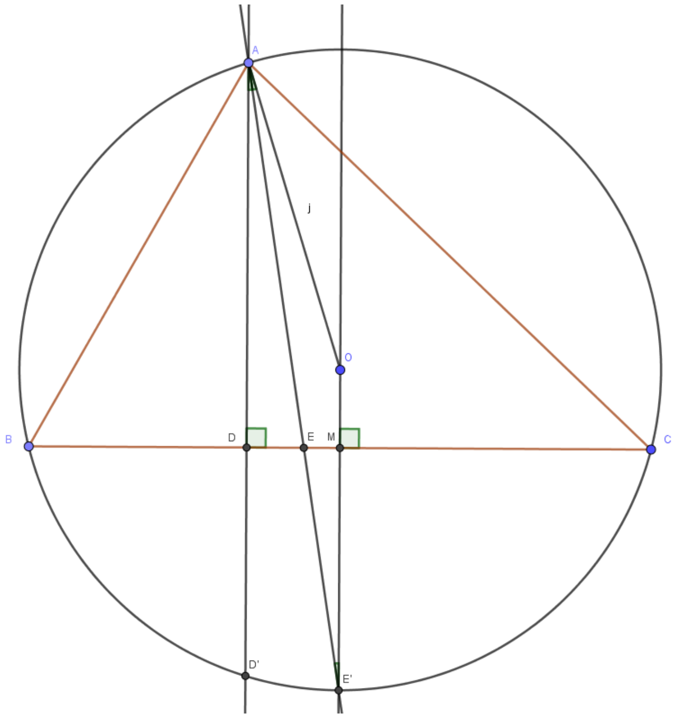
Si tracci il segmento OC.
Nel triangolo rettangolo ABD, la somma degli angoli acuti $A\hat{B}C + D\hat{A}B$ è un angolo retto.

Il triangolo AOC è isoscele sulla base AC, poiché i lati AO e OC sono congruenti in quanto raggi della medesima circonferenza. Per la proprietà dei triangoli isosceli, gli angoli alla base sono congruenti, dunque $C\hat{A}O \simeq A\hat{C}O$.

Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, nel triangolo COA $C\hat{A}O + A\hat{C}O + A\hat{O}C$ è un angolo piatto.
Siccome ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro $A\hat{O}C \simeq 2A\hat{B}C$, e ricordando che $C\hat{A}O \simeq A\hat{C}O$ e $C\hat{A}O + A\hat{C}O + A\hat{O}C$ [è un angolo piatto], possiamo affermare che [[$C\hat{A}O + A\hat{O}C$ e cioè]] [2 $C\hat{A}O + 2A\hat{B}C$]] è un angolo piatto e, dunque, $C\hat{A}O + A\hat{B}C$ è un angolo retto.
Come precedentemente dimostrato, $A\hat{B}C + D\hat{A}B$ e $C\hat{A}O + A\hat{B}C$ sono angoli retti.
Allora $D\hat{A}B \simeq C\hat{A}O$ in quanto entrambi complementari di $A\hat{B}C$.

Per ipotesi, $B\hat{A}E \simeq E\hat{A}C$.
Siccome $B\hat{A}E \simeq E\hat{A}D + D\hat{A}B$ e $E\hat{A}C \simeq C\hat{A}O + O\hat{A}E$, si ha quindi $E\hat{A}D + D\hat{A}B \simeq C\hat{A}O + O\hat{A}E$.
Inoltre, poiché $D\hat{A}B \simeq C\hat{A}O$ (per precedente dimostrazione), si ha $E\hat{A}D \simeq O\hat{A}E$.
È dunque dimostrato che AE biseca l'angolo $D\hat{A}O$.

2)Soluzione proposta dalla classe 2^B Liceo scientifico internazionale "Aristosseno", Taranto

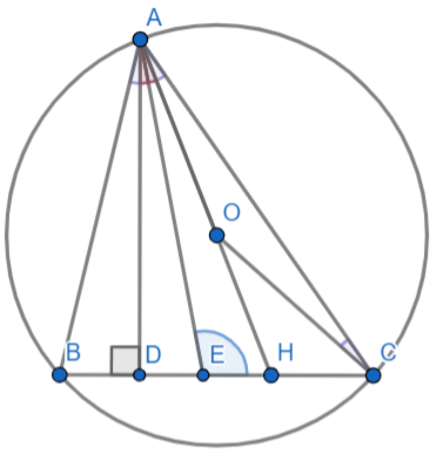


Il centro O della circonferenza è il punto d'incontro degli assi dei lati del triangolo ABC ; il segmento OM ,[dove M è punto medio della corda BC, è perpendicolare a BC] e divide in parti congruenti l'angolo al centro [[corrispondente]] $\widehat{BOC}$ e anche l'arco BC .

Essendo la semiretta di AE bisettrice dell'angolo alla circonferenza BAC , essa divide in due parti congruenti anche l'angolo al centro corrispondente $\widehat{BOC}$ (che è il suo doppio) e quindi l'arco BC. Per questo la corda AE' e il raggio OM si incontrano nello stesso punto E'.

Osserviamo ora che la corda AD' (ottenuta prolungando l'altezza AD del triangolo fino ad incontrare la circonferenza in D') e la retta contenente il raggio OE' , entrambi perpendicolari a BC, sono parallele fra loro e quindi gli angoli $\widehat{D'AE'}$ e $\widehat{AE'O}$ sono congruenti perché alterni interni rispetto alla trasversale AE' . Essendo poi il triangolo AOE' isoscele (i suoi lati OA e OE' sono raggi della stessa circonferenza) i suoi angoli alla base $\widehat{AE'O}$ e $\widehat{OAE'}$ sono congruenti. Per la proprietà transitiva della congruenza l'angolo $\widehat{D'AE'}$ sarà quindi congruente all'angolo $\widehat{OAE'}$ e per questo nel triangolo ABC il segmento AE è anche bisettrice dell'angolo $\widehat{DAO}$.

3)Soluzione proposta da Maddalena Crapolicchio, classe 2^ D Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta(BAT)



Hp:
ABC triangolo acutangolo $B\hat{A}E \cong E\hat{A}C$
$AD \perp BC$
AO raggio circonferenza centro
Th:
$E\hat{A}D \cong E\hat{A}H$

DIMOSTRAZIONE:

Per il teorema dell'angolo esterno applicato [[al triangolo ADE risulta $A\hat{E}C = 90° + E\hat{A}D$ e applicato al triangolo ABE risulta]]

$A\hat{E}C = A\hat{B}C + B\hat{A}E \quad e \quad \rightarrow \quad A\hat{B}C + B\hat{A}E = 90° + E\hat{A}D$ (1)

Inoltre,[[per il teorema dell'angolo alla circonferenza e del corrispondente angolo al centro]]

$A\hat{B}C = \frac{1}{2} A\hat{O}C$

Ma $A\hat{O}C = 180° - 2H\hat{A}C = 2(90° - H\hat{A}C)$ perché AOC triangolo isoscele di base [AC] [[AB]] che ha come lati congruenti due raggi.

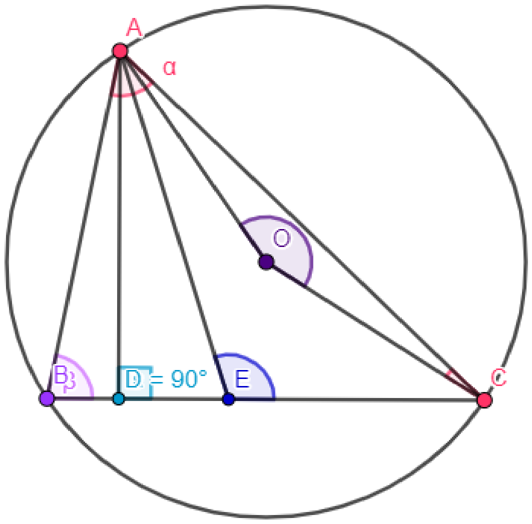
Quindi $A\hat{B}C = \frac{1}{2} \cdot 2(90° - H\hat{A}C)$ =[90°-HAC].

Sostituendo nella (1) si ottiene: $90° - H\hat{A}C + B\hat{A}E = 90° + E\hat{A}D \rightarrow$

$B\hat{A}E - H\hat{A}C = E\hat{A}D$,ma $B\hat{A}E - H\hat{A}C = E\hat{A}C - H\hat{A}C = E\hat{A}H$, quindi $\boldsymbol{E\hat{A}H = E\hat{A}D}$

4)Soluzione proposta da Aurora Floriana Doronzo, classe 2^ D Liceo Scientifico "C.Cafiero", Barletta(BAT)

Sia O il circocentro del triangolo acutangolo ABC. [Chiamato] D il piede dell'altezza condotta da A sul lato BC, provare che la bisettrice AE dell'angolo $B\hat{A}C$ è anche bisettrice dell'angolo $D\hat{A}O$. Motivare la risposta.



Ipotesi :

- O circocentro
- AD altezza relativa a BC
- $B\hat{A}E \cong E\hat{A}C$ [EAO]

Tesi: $D\hat{A}E \cong E\hat{A}C$

Chiamo:

$B\hat{A}D = \alpha 1$ $D\hat{A}E = \alpha 2$ $E\hat{A}O = \alpha 3$ $O\widehat{AC} = \alpha 4$

$B\hat{A}C = \alpha$ $A\hat{B}C = \beta$ $A\hat{E}C = \varepsilon$

Considerando il triangolo rettangolo ABD:

$\beta + \alpha 1 = 90° \Longrightarrow \beta = 90° - \alpha 1$

$A\hat{O}C \cong 2\beta$ perché angolo al centro e corrispondente angolo alla circonferenza

Il triangolo AOC è isoscele perché ha i lati AO e OC congruenti in quanto raggi della circonferenza di centro O $\Longrightarrow O\hat{C}A \cong \alpha 4$

$A\hat{O}C \cong 2\beta \cong 2(90 - \alpha 1) \cong 180 - 2\alpha 1$

Inoltre $A\hat{O}C \cong 180 - 2\alpha 4$

Quindi $180 - 2\alpha 1 \cong 180 - 2\alpha 4 \Longrightarrow \alpha 1 \cong \alpha 4$

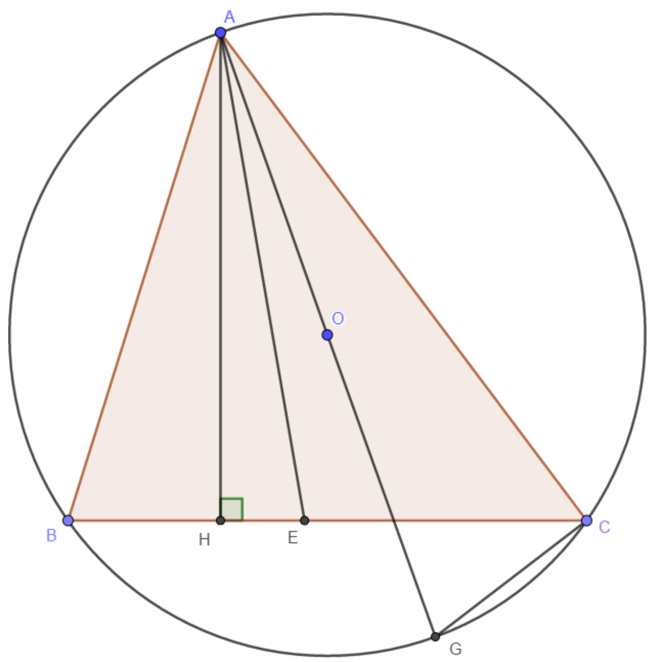
$B\hat{A}E \cong E\hat{A}C$ per ipotesi

$\alpha 1 + \alpha 2 \cong \alpha 3 + \alpha 4$

$\alpha 1 + \alpha 2 \cong \alpha 3 + \alpha 1$

$\alpha 2 \cong \alpha 3 \Longrightarrow$ AE è bisettrice di $D\hat{A}E$ [DAO].

5)Soluzione proposta da Giuseppe-Boccardi, classe 2^C, Liceo A. Volta-Colle di Val d'Elsa (SI)



IPOTESI

- ABC triangolo acutangolo
- O circocentro del triangolo ABC
- E∈ BC e AE bisettrice dell'angolo BÂC
- AH altezza condotta da A sul lato BC

TESI

- Gli angoli HÂE e EÂO sono congruenti

DIMOSTRAZIONE

- Prolunghiamo il segmento AO e chiamiamo G il punto di intersezione che si viene a creare tra la retta AO e la circonferenza
- Tracciamo il segmento che congiunge i punti G e C. Possiamo notare che:
  - Gli angoli AĜC e A$\hat{B}$C sono congruenti in quanto angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda

  L'angolo AĈG è retto perché è un angolo alla circonferenza che insiste su di una semicirconferenza
- Mettendo insieme queste cose possiamo dire che:

$$G\hat{A}C \cong 180° - (90° + A\hat{B}C)$$

Da cui deriva che:

$$G\hat{A}C \cong 90° - A\hat{B}C$$

- Consideriamo ora il triangolo BAH. Notiamo che L'angolo B$\hat{H}$A è retto per ipotesi
- Perciò possiamo scrivere che:

$$B\hat{A}H \cong 180° - (90° + A\hat{B}C)$$

Da cui deriva che:

$$B\hat{A}H \cong 90° - A\hat{B}C$$

Per la proprietà transitiva possiamo quindi affermare che:

$$G\hat{A}C \cong B\hat{A}H$$

A questo punto possiamo affermare che l'angolo H$\hat{A}$ E è congruente all'angolo E$\hat{A}$ O perché differenza di angoli congruenti:

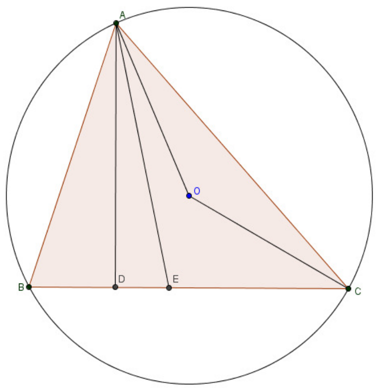
$B\hat{A}E \cong E\hat{A}C \longrightarrow$ per ipotesi

$B\hat{A}H \cong G\hat{A}C \longrightarrow$ perché dimostrato precedentemente

$H\hat{A}E \cong B\hat{A}E - B\hat{A}H$

$E\hat{A}O \cong E\hat{A}C - G\hat{A}C$

6)Soluzione proposta da Nardiello Francesco Carlo, 2^C, Liceo scientifico Carlo Cafiero, Barletta



Hp: ABC triangolo $A\hat{D}C=90^o$

Dimostrazione:

$A\hat{D}C=\beta$ x costr. [ABC]

O=Circocentro ABC triangolo

$\xrightarrow[\text{alla circonferenza}]{\text{x Relazioni tra angoli al centro e angoli}}$ **$A\hat{O}C= 2\beta$**

O=Circocentro ABC triangolo x ip.

AE bisettrice $B\hat{A}C$

Th: AE bisettrice $D\hat{A}O$

cons. AOC triangolo $\begin{cases} AO\cong OC \text{ x raggi} \\ A\hat{O}C=2\beta \text{ x dim.} \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{x Teorema Diretto}}$ $O\hat{A}C\cong O\hat{C}A=\dfrac{180-2\beta}{2}=90-\beta$ **1.**

cons. ABD triangolo $\begin{cases} A\hat{D}B=90^o \text{ x def. di altezza} \\ A\hat{D}C=\beta \text{ x costr. [ABC]} \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{x Somma di angoli interni}}$ $B\hat{A}D=90-\beta$ **2.**

1.
2. $\xrightarrow{\text{x Differenza di Angoli Congruenti}}$ $O\hat{A}E$=[CAE-OAC] , $D\hat{A}E$=[BAE-BAD]

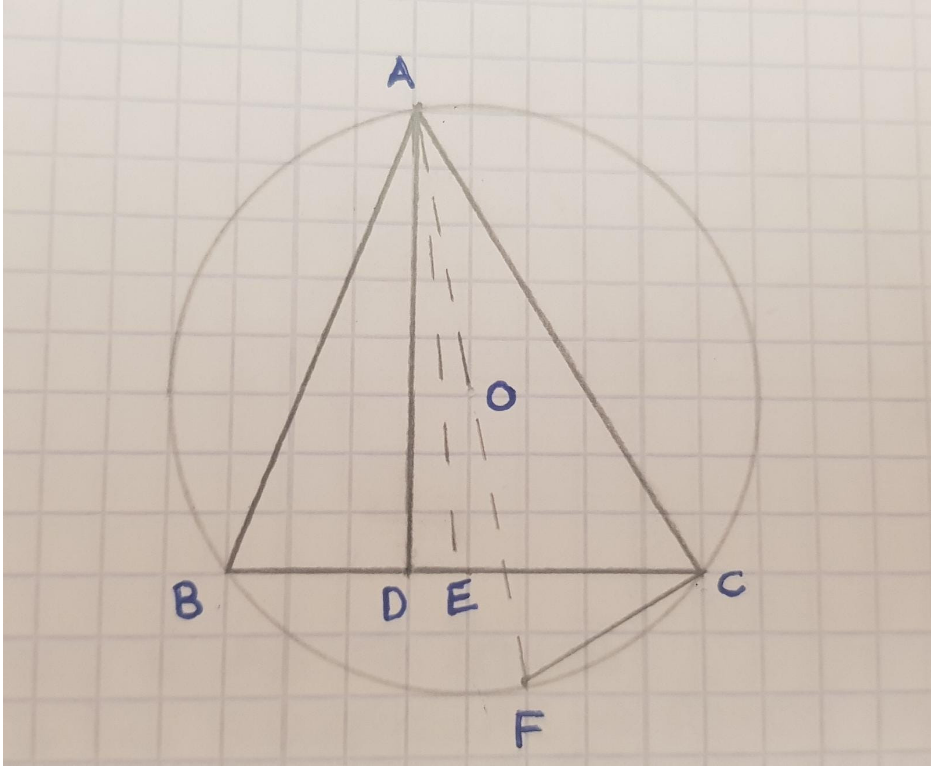
$\xrightarrow{\text{x Def. di Bisettrice}}$ AE bisettrice $D\hat{A}O$

$B\hat{A}E=C\hat{A}E=\alpha$

C.V.D.

7)Soluzione proposta da Alessia Roncucci, 3^F, liceo scientifico Nicolò Copernico, Torino

[Era preferibile fare la figura con un software di geometria. Nella soluzione, oltre ad alcuni errori facilmente evitabili con una attenta rilettura, ci sono alcuni passaggi non motivati.]



AFC è rettangolo come ABD

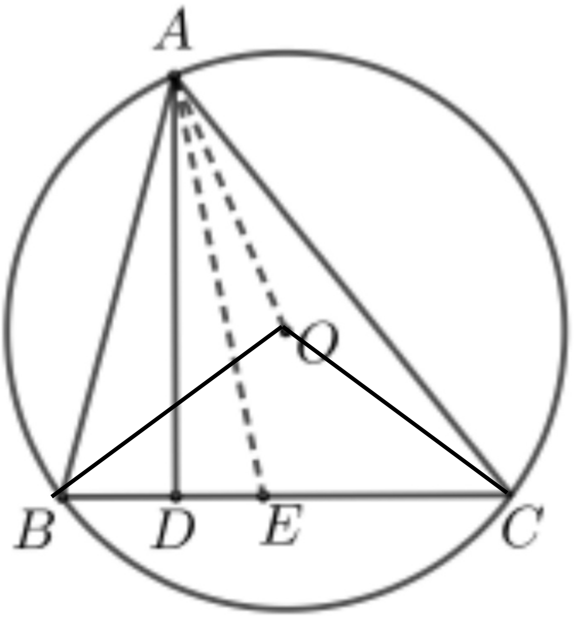
AFC è un triangolo rettangolo perché AF è un diametro quindi l'angolo [ACF=90°] [[AFC=90°]].

AFC e ABC sono congruenti perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC

I triangoli ABD e AFC sono simili, quindi BAD=FAC

Anche DAE=EAF [perché differenze di angoli congruenti] quindi AE è la bisettrice [di DAO].

8)Soluzione proposta da Margherita Zucchelli – 2^E – Liceo scientifico “Barsanti e Matteucci” – Viareggio (LU)



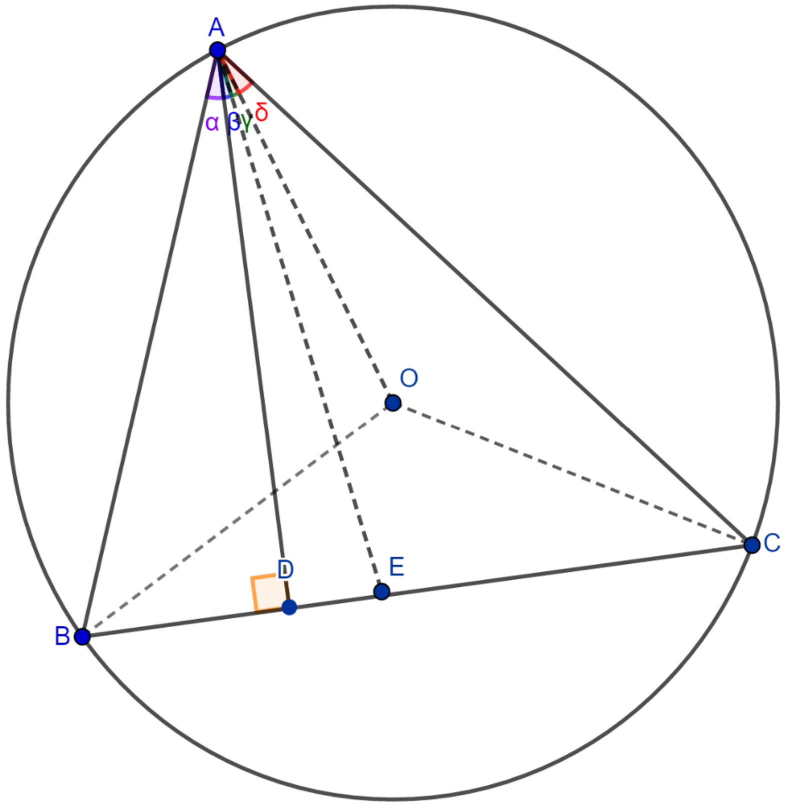
IPOTESI:
ABC = triangolo acutangolo
O = circocentro ABC
AD = altezza relativa a BC
AE = bisettrice angolo (BAC)
TESI:
AE bisettrice dell'angolo (DAO)

Poiché O è il circocentro per ipotesi segue che OA≅OB≅OC.
Considero i triangoli AOB, BOC, AOC. Essi sono tutti isosceli per precedente considerazione. Per proprietà dei triangoli isosceli ∠(OBC) ≅ ∠(OCB), ∠(OCA) ≅ ∠(OAC), ∠(OBA) ≅ ∠(OAB).
La somma dei 6 precedenti angoli coincide con la somma degli angoli interni del triangolo [ABC], quindi: 2 ∠(ABO)+2 ∠(OBC)+2 ∠(CAO)=180° → [[∠(ABO)+ ∠(OBC)+ ∠(CAO)=90°]]
Considerando il triangolo BDA l’angolo (BAD) ≅ 180°-90°- ∠(CBO)- ∠(OBA) → ∠(BAD) ≅ ∠(CAO)
∠(DAE) ≅ ∠(BAE)- ∠(BAD)
∠OAE) ≅ ∠(CAE)- ∠(CAO)
∠(BAE) ≅ ∠(CAE) per definizione di bisettrice
∠(BAD) ≅ ∠(CAO) per precedente dimostrazione

∠(EAD) ≅∠(EAO) perché differenze di angoli congruenti

9)Soluzione proposta da Mario Solinas Classe 2L, Liceo Scientifico "Galeazzo Alessi" Perugia

Ipotesi



- O circocentro del triangolo acutangolo ABC 1
- D piede dell'altezza condotta da A sul lato BC [1]
- AE bisettrice dell'angolo BÂC

Tesi

- AE bisettrice dell'angolo DÂO

Dimostrazione

---

[1] Essendo il triangolo acutangolo ne segue che O è interno al triangolo ABC e D$\in$ BC. Nella dimostrazione , ad esempio, prendo in considerazione i triangoli BOC,AOC,AOB , perciò se O$\in$ BC (caso in cui il triangolo è rettangolo) non otterrei il triangolo BOC . Inoltre, se D non appartenesse a BC (caso in cui il triangolo è ottusangolo) non varrebbe la relazione $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=\hat{\gamma}+\hat{\delta}$ (indicata nella dimostrazione).

Chiamiamo per convenzione gli angoli BÂD, DÂE, EÂO e OÂC rispettivamente $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ e tracciamo i raggi OB e OC in modo tale da ottenere i triangoli isosceli BOC, AOC,AOB.
Per ipotesi abbiamo la relazione $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=\hat{\gamma}+\hat{\delta}$ (AE bisettrice BÂC).

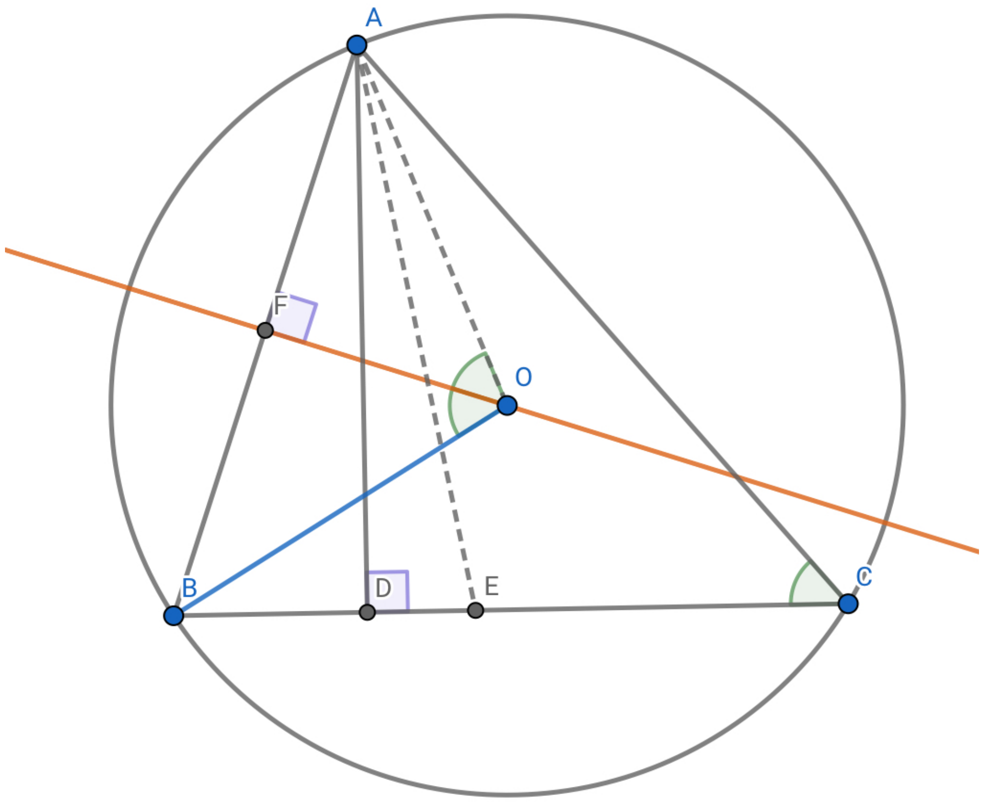
Consideriamo inizialmente il triangolo rettangolo per ipotesi ADE (D piede dell'altezza condotta da A sul lato BC) : A$\hat{E}$D= 90-$\hat{\beta}$. Segue che A$\hat{E}$C= 180-(90-$\hat{\beta}$)= 90+$\hat{\beta}$.

Prendiamo in considerazione ora il triangolo AEC, otteniamo che: A$\hat{E}$C = 90 +$\hat{\beta}$ (per dimostrazione precedente), A$\hat{C}$E = 180 –(90+$\hat{\beta}$)-($\hat{\gamma}$ +$\hat{\delta}$)= 90-$\hat{\beta}$ $\hat{\gamma}$-$\hat{\delta}$ (EÂO+ OÂC=E$\hat{A}$C=$\hat{\gamma}$ +$\hat{\delta}$). Da questo segue che O$\hat{C}$B **= 90- $\hat{\beta}$-$\hat{\gamma}$-2$\hat{\delta}$** (AOC isoscele, O$\hat{A}$C=O$\hat{C}$A=$\hat{\delta}$).

Consideriamo ora il triangolo rettangolo ABD retto in $\hat{D}$: A$\hat{B}$D= 90- $\hat{\alpha}$. Perciò otteniamo che O$\hat{B}$C= 90-$\hat{\alpha}$-($\hat{\alpha}$+$\hat{\beta}$+$\hat{\gamma}$)= **90-2$\hat{\alpha}$-$\hat{\beta}$-$\hat{\gamma}$** (AOB isoscele, O$\hat{B}$A=O$\hat{A}$B=$\hat{\alpha}$+$\hat{\beta}$+$\hat{\gamma}$).

Consideriamo infine il triangolo isoscele OBC: O$\hat{B}$C=O$\hat{C}$B, ovvero **90-2$\hat{\alpha}$-$\hat{\beta}$-$\hat{\gamma}$ = 90- $\hat{\beta}$-$\hat{\gamma}$-2$\hat{\delta}$** Da questa uguaglianza otteniamo $\hat{\alpha}=\hat{\delta}$. Sostituiamo alla relazione iniziale ($\hat{\alpha}+\hat{\beta}=\hat{\gamma}+\hat{\delta}$) $\hat{\alpha}=\hat{\delta}$ $\rightarrow\hat{\alpha}+\hat{\beta}=\hat{\gamma}+\hat{\alpha}\rightarrow\hat{\beta}=\hat{\gamma}$. Da quest'ultima uguaglianza otteniamo infine che AE è bisettrice dell'angolo D$\hat{A}$O. C.V.D

10)Soluzione proposta da Perugini Alessandro 3ªASO, Liceo Ginnasio Statale Giorgione, Castelfranco Veneto (TV)



Hp:
O circocentro triangolo ABC
ABC triangolo acutangolo
AD altezza da A di BC
AE bisettrice BÂC

Th:
AE bisettrice DÂO

Dimostrazione:

Considero angolo AĈB

AĈB è la metà dell'angolo AÔB (AÔB angolo al centro della circonferenza)

OF asse di AB (per ipotesi O è il circocentro)

AÔF congruente a FÔB (angolo AÔB diviso a metà dall'asse, perché triangolo AOB è isoscele e l'altezza OF è anche bisettrice)
Di conseguenza AÔF è congruente a metà AÔB

Se l'angolo AĈB è congruente a metà angolo AÔB, e anche AÔF lo è, l'angolo AĈB è congruente all'angolo AÔF

Considero i triangoli ADC e AFO:

Entrambi hanno un angolo retto ($A\dot{F}O$ perché l'intersezione dell'asse col segmento, mentre $A\dot{D}C$ per ipotesi)
Inoltre $A\hat{O}F$ è congruente a $A\hat{C}D$ (per dimostrazione precedente)
Di conseguenza, dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre 180º, per differenza di angoli congruenti, l'angolo $O\hat{A}F$ è congruente all'angolo $D\hat{A}C$

L'angolo $B\hat{A}E$ è congruente all'angolo $E\hat{A}C$ (per ipotesi AE è la bisettrice [dell'angolo $B\hat{A}C$]).

Considero gli angoli $O\hat{A}E=O\hat{A}F-B\hat{A}E$ e $D\hat{A}E=D\hat{A}C-E\hat{A}C$; l'angolo $O\hat{A}E$ è congruente all'angolo $D\hat{A}E$ (per quanto dimostrato precedentemente e sottolineato sono congruenti per differenza di angoli congruenti)

Di conseguenza AE è bisettrice dell'angolo $D\hat{A}O$ (lo divide in due angoli congruenti).