FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia – Problema – 13 – 27 gennaio 2020 - Commento alle soluzioni ricevute

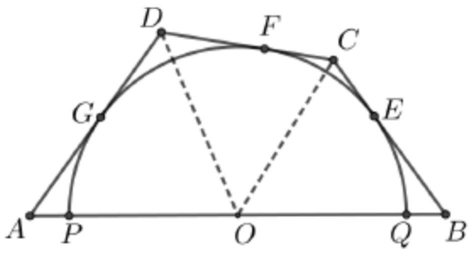
Il testo del problema

Siano dati un quadrilatero $ABCD$ e una semicirconferenza di centro O, con O punto medio di AB, il cui diametro giace su AB ed è tangente agli altri tre lati del quadrilatero (vedi figura).

a) Provare che i triangoli AOD, DOC e COB sono simili.

b) Dedurne la relazione: $AB^2 = 4\,BC \cdot AD$.

Motivare le risposte.



Commento

Sono arrivate soltanto due risposte da classi II di liceo scientifico.
Il problema poneva due quesiti su un particolare quadrilatero circoscritto a una semicirconferenza.
Il primo chiedeva di dimostrare che i tre triangoli in cui si scomponeva il quadrilatero erano simili.
Il secondo chiedeva di dimostrare, utilizzando il primo punto, una interessante relazione tra la "base" del quadrilatero e i suoi "lati obliqui".
Le risposte arrivate risolvono in modo corretto il problema in ogni sua parte

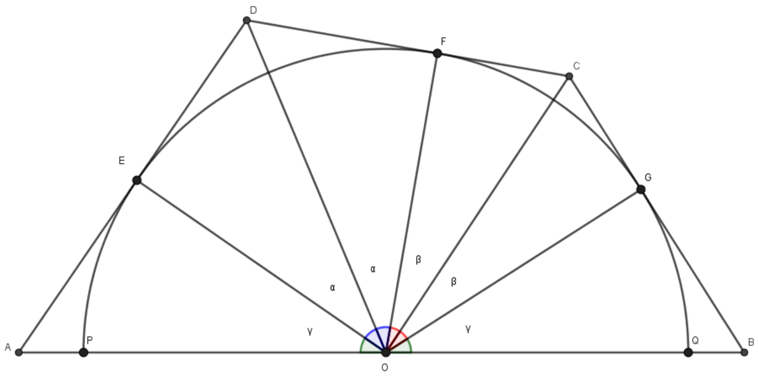
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "G. Alessi", Perugia

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

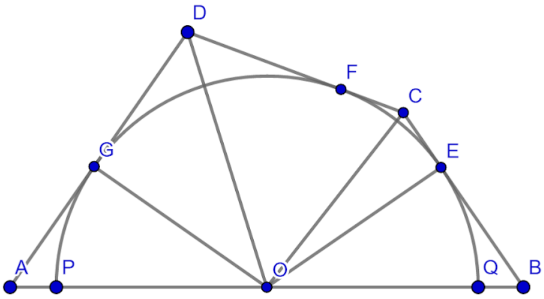
Soluzioni arrivate

1)Soluzione proposta dalla classe 2^ B scientifico internazionale Liceo “Aristosseno” di Taranto



a)Tracciamo i raggi OE,OF e OG e osserviamo che i triangoli rettangoli AOE e BOG sono congruenti essendo il punto O punto medio di AB e i cateti OE e OG raggi della stessa circonferenza. Indicato con γ l’angolo $\widehat{AOE}$ $\widehat{AOE}$ = $\widehat{BOG}$ $\widehat{BOG}$ si ha che $\widehat{OAE}$ $\widehat{OAE}$ = $\widehat{OBG}$ $\widehat{OBG}$ = 90°-γ . Gli angoli $\widehat{EOD}$ $\widehat{EOD}$ e $\widehat{DOF}$ $\widehat{DOF}$ sono congruenti perché OD è bisettrice dell’angolo che formano i raggi OE ed OF ; gli angoli $\widehat{FOC}$ $\widehat{FOC}$ e $\widehat{COG}$ $\widehat{COG}$ sono congruenti per lo stesso motivo. Indichiamo i primi due angoli con α e i secondi due angoli con β .Siccome gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari possiamo dire che : $\widehat{EDO}$ $\widehat{EDO}$ = $\widehat{FDO}$ $\widehat{FDO}$ = 90°-α e che $\widehat{FCO}$ $\widehat{FCO}$ =$\widehat{GCO}$ $\widehat{GCO}$ =90°-β . Sappiamo inoltre che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a 360° e perciò nel quadrilatero ABCD si ha : 2(90°-γ)+2(90°-α)+2(90°-β)=360° da cui ricaviamo : α+β+γ=90° .
Sarà quindi α+γ=90°-β , β+γ=90°-α e α+β=90°-γ e quindi i triangoli AOD , [[DOG]] [DOC] e COB hanno i tre angoli congruenti e risultano simili per il primo criterio di similitudine .
b) Essendo simili i triangoli AOD e COB , i loro lati corrispondenti sono proporzionali e quindi :
AD : OB = OA : BC ,da cui otteniamo : $OB \cdot OA = AD \cdot BC$ $OB \cdot OA = AD \cdot BC$; ma il punto O è punto medio di AB e quindi : OA = AB/2 .Possiamo perciò concludere che : $\frac{AB^2}{4} = AD \cdot BC$ $\frac{AB^2}{4} = AD \cdot BC$ e da qui segue che $AB^2 = 4AD \cdot BC$ $AB^2 = 4AD \cdot BC$.

2)Soluzione proposta da Niccolò Falcinelli, Federico Pampanelli Nicchi, Mario Solinas, Jacopo Buratta Classe 2^L, Liceo Scientifico "Galeazzo Alessi" Perugia.



IPOTESI:
-ABCD quadrilatero circoscritto ad
una semicirconferenza di centro O,
che è tangente ai lati AD, DC e BC
-PQ diametro e P, Q appartengono ad AB
-O è il punto medio di AB
TESI:
a) I triangoli AOD, DOC e COB sono simili.
b) $AB^2 = 4BC \cdot AD$.

DIMOSTRAZIONE:

Tracciamo i raggi OG e OE: essi sono perpendicolari rispettivamente a AD e CB per il teorema relativo alle rette tangenti a una circonferenza (Se una retta è tangente ad una circonferenza essa è perpendicolare al raggio che ha un estremo nel punto di tangenza).

Consideriamo ora i triangoli AOG e OBE, essi sono dei triangoli rettangoli, in quanto gli angoli in $\hat{G}$ ed $\hat{E}$ sono retti. OB = AO, perché per ipotesi O è il punto medio di AB; OG=OE perché raggi. Dunque, per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli, i triangoli AOG e OBE sono congruenti.

In particolare, $\hat{B}\hat{B}=\hat{A}\hat{A}$ (1)

Per il teorema delle tangenti, poiché AD e DC sono tangenti in G e F alla semicirconferenza, con D come punto esterno, si ha che DO è bisettrice dell'angolo A$\hat{D}\hat{D}$C, cioè A$\hat{D}\hat{D}$O=O$\hat{D}\hat{D}$C (2)

Analogamente, sempre per il teorema delle tangenti (DC e CB tangenti in F ed E, con C come punto esterno), si ha che D$\hat{C}\hat{C}$O=O$\hat{C}\hat{C}$B (3)

Dato che ABCD è un quadrilatero $\hat{A}\hat{A}$ + A$\hat{D}\hat{D}$C+ D$\hat{C}B$ + $\hat{C}B$ + $\hat{B}\hat{B}$=360°, e quindi, tenendo conto di (1), (2), (3) si ha che 2$\hat{A}\hat{A}$+2A$\hat{D}\hat{D}$O+2D$\hat{C}O$ $\hat{C}O$ = 360° da cui segue che $\hat{A}\hat{A}$+A$\hat{D}$ $\hat{D}$O+D$\hat{C}O$ $\hat{C}O$ = 180° (4).

Consideriamo i triangoli ADO e ODC. Essi hanno A$\hat{D}\hat{D}$O=O$\hat{D}\hat{D}$C per quanto dimostrato al (2) .Nel triangolo ADO si ha $D\hat{O}A$ $D\hat{O}A$ =180°- ($\hat{A}\hat{A}$+A$\hat{D}\hat{D}$O). Dalla (4) segue che D$\hat{C}O$ $\hat{C}O$ =180°- ($\hat{A}\hat{A}$+A$\hat{D}\hat{D}$O) [e quindi $D\hat{O}A$ $D\hat{O}A$ = D$\hat{C}O$ $\hat{C}O$] . Per il primo criterio di similitudine i triangoli ADO e ODC sono simili (5)

Analogamente si dimostra che i triangoli ODC e OCB sono simili. Essi hanno D$\hat{C}\hat{C}$O=O$\hat{C}\hat{C}$B per quanto dimostrato al punto (3)

Si ha poi , per (1) , (3) e (5) , che $B\hat{O}C$ $B\hat{O}C$ =180°- ($\hat{B}\hat{B}$+ O$\hat{C}\hat{C}$B) = 180°- (**A A** + D$\hat{C}O$ $\hat{C}O$) = [A$\hat{D}\hat{D}$O =]O$\hat{D}\hat{D}$C . Per il primo criterio di similitudine, i triangoli ODC e OCB sono simili (6)

Per la proprietà transitiva di cui gode la similitudine, da (5) e (6) segue che i triangoli AOD, DOC e COB sono simili.

b) Dalla similitudine dei tre triangoli, otteniamo che: $BC/AO = OB/AD = OC/OD$. Considerando la prima eguaglianza: $BC/AO= OB/AD$. (Per ipotesi $AO= OB$). $\rightarrow$ $BC=AO^2/AD$ $\rightarrow$ $BC \cdot AD= AO^2$ $\rightarrow$ $4BC \cdot AD= 4AO^2$.

Inoltre $AB= 2AO=(AO +OB)$ $\rightarrow$ $AB^2= 4AO^2$

Segue che $AB^2= 4BC \cdot AD$

C.V.D.