FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia – Problema – 10 – 24 febbraio 2020 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

È noto che in un triangolo due mediane si incontrano in un punto (il baricentro del triangolo) che le divide in due parti, dove la parte che contiene il vertice del triangolo è doppia dell'altra.

Indagare se tale proprietà è invertibile, cioè se due *ceviane* (vedi nota) del triangolo ABC, per esempio AM e BN, si incontrano in un punto G tale che $AG = 2\,GM$ e $BG = 2\,GN$ allora AM e BN sono due mediane. Se si pensa che quanto affermato sia falso, dare un controesempio; se invece si pensa che sia vero, fornire una dimostrazione.

Nota. In un triangolo si chiama *ceviana* un qualunque segmento che congiunge un vertice con un punto del lato opposto.

Commento

Sono arrivate soltanto due risposte da classi II di liceo scientifico.
Il problema poneva un quesito su due ceviane di un triangolo, che si incontrano in un punto che divide ciascuna ceviana in due segmenti, uno doppio dell'altro.
Bisognava dimostrare o confutare che queste due ceviane fossero mediane del triangolo.
L'ispirazione del problema trae origine dal quesito di dicembre 2019, nel quale si parlava ancora di mediane, dove alcuni risolutori hanno dato per scontato che due ceviane con la proprietà indicata nel problema fossero sicuramente mediane. A questo punto, essendo tale proprietà vera, si può affermare che essa caratterizza le mediane di un triangolo.

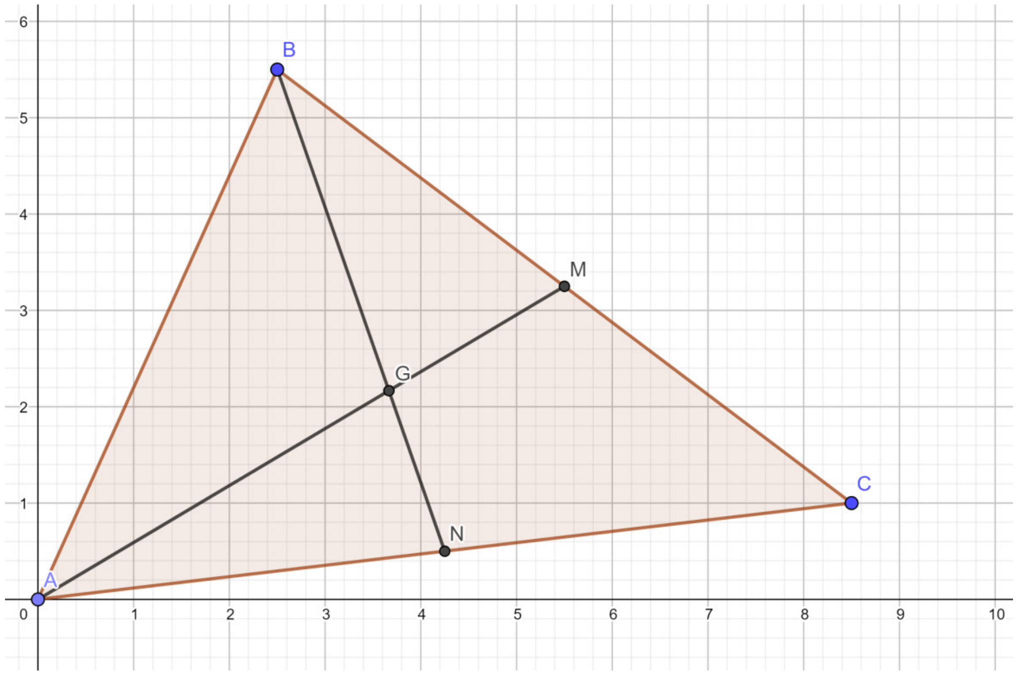
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- Liceo Scientifico "Morgagni", Roma
- Liceo "B. Russell"- Liceo Scienze applicate, Cles (TN)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1) Soluzione proposta da Elena Cieri e Marco Nascetti della classe II E Liceo Scientifico "Morgagni" di Roma



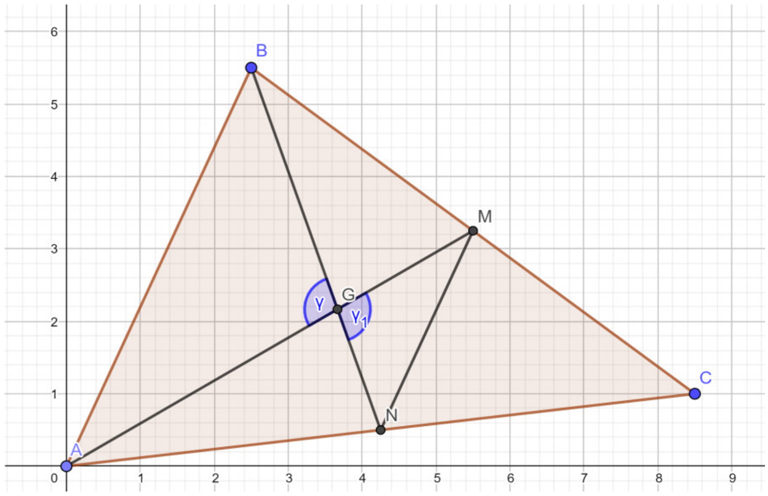
[Notiamo che in tutte le figure sono inutili gli assi cartesiani e la quadrettatura].

Ipotesi
ABC triangolo
AM e BN ceviane
AG=2GM
BG=2GN

Tesi
BN e AM mediane

Dimostrazione
Per prima cosa tracciamo il segmento che congiunge M con N e consideriamo i triangoli AGB e NGM.

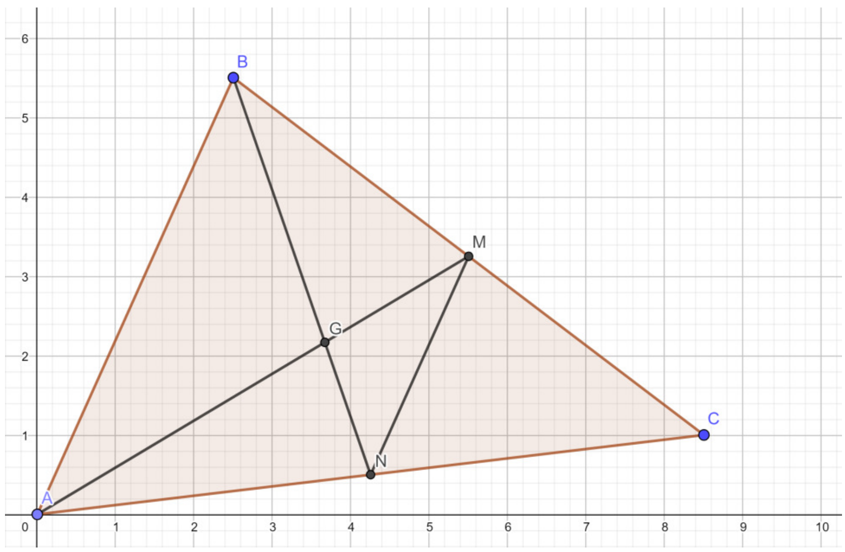
Per ipotesi sappiamo che AG=2GM e che BG=2GN. Questi lati sono quindi proporzionali (AG:GM=BG:GN=2).
Sappiamo, inoltre, che gli angoli BGA e NGM sono congruenti poiché sono angoli opposti al vertice.



Avendo due lati proporzionali e l'angolo compreso congruente, deduciamo che, per il secondo criterio di similitudine, i triangoli AGB e NGM sono simili.
Essendo simili sappiamo anche che AB=2NM [e gli angoli corrispondenti sono congruenti].
Notiamo anche che AB e NM formano coppie di angoli alterni interni congruenti e sono quindi paralleli [è sempre meglio citare anche le trasversali che intervengono!].
Quindi gli angoli ABC e NMC sono congruenti perché angoli corrispondenti.
Analogamente gli angoli BAC e MNC sono congruenti.

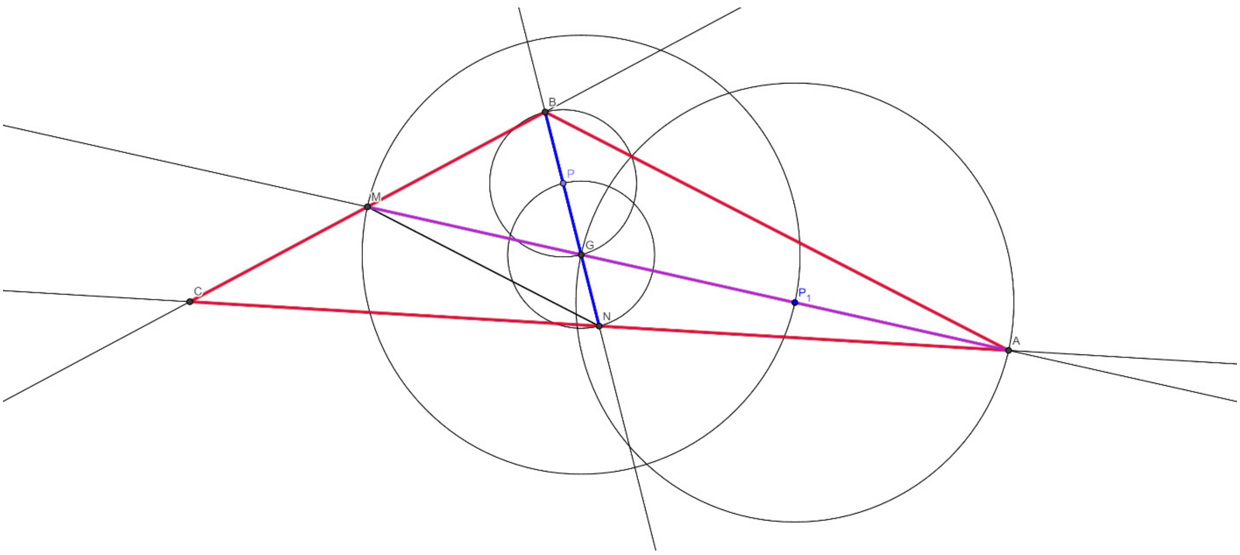
I triangoli ABC e NMC sono quindi simili per il primo criterio di similitudine.
Sapendo che il rapporto tra AB e NM è di 2 deduciamo che AC=2NC e che BC=2MC.

Essendo AC=NC+AN e AC=2NC possiamo dire che AN=NC e che quindi BN è una mediana del triangolo ABC.
Analogamente dimostriamo che BM=MC e che anche AM è una mediana del triangolo ABC.



2) Soluzione proposta da Ana Maria Cocu, classe 2^D – Liceo Scientifico Scienze Applicate – Liceo "B.Russell", Cles (TN)

Ipotesi: $AG \cong 2 \cdot GM$ e $BG \cong 2 \cdot GN$ $AG \cong 2 \cdot GM$ e $BG \cong 2 \cdot GN$
Tesi: AM e BN sono mediane



DISEGNO: Ho disegnato la figura iniziando non dal triangolo ABC, bensì disegnando prima le due ceviane facendole incontrare nel punto G. Innanzitutto ho disegnato una circonferenza con centro G, con raggio GP, poi ne ho disegnata un'altra con centro P, di raggio ancora GP. Successivamente ho tracciato la retta GP, trovando così i punti B e N. Ho eseguito lo stesso procedimento per trovare A e M, usando questa volta una circonferenza di raggio GP1. Infine ho congiunto A con B e ho tracciato le rette AN e BM per trovare C (la loro intersezione).

DIMOSTRAZIONE: Innanzitutto traccio il segmento MN che mi servirà alla dimostrazione.
Da ipotesi si sa che $AG \cong 2 \cdot GM e BG \cong 2 \cdot GN$ $AG \cong 2 \cdot GM e BG \cong 2 \cdot GN$. Si vengono così a formare 2 triangoli [[in proporzione]] [ABG e GNM tali che $AG \cong 2 \cdot GM, BG \cong 2 \cdot GN$ $AG \cong 2 \cdot GM, BG \cong 2 \cdot GN$ e gli angoli in G sono congruenti perché opposti al vertice. Essi sono quindi simili per il secondo criterio di similitudine e] di conseguenza anche $BA \cong 2 \cdot MN$ $BA \cong 2 \cdot MN$. [[Avendo i 2 triangoli i lati in proporzione]] [Essendo i due triangoli simili, essi hanno anche gli angoli alla base congruenti : $MNG \cong GBA e NMG \cong GAB$ $MNG \cong GBA e NMG \cong GAB$, queste] congruenze fanno sì che MN//BA, perché [tali angoli] sono angoli alterni interni tagliati dalle trasversali AM e BN. [[Il teorema dei punti medi (conseguenza del teorema di Talete) dice: in un triangolo il segmento che congiunge i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato ed è congruente alla sua metà e viceversa. Come dimostrato prima MN//BA e quindi grazie al teorema dei punti medi che dice che se si ha MN (segmento che congiunge due lati) // BA (terzo lato) allora MN congiunge i punti medi di AC e BC.]] [Non puoi applicare tale risultato perché non sai se M e N siano i punti medi dei lati. Hai scambiato ipotesi e tesi].
[[…]]