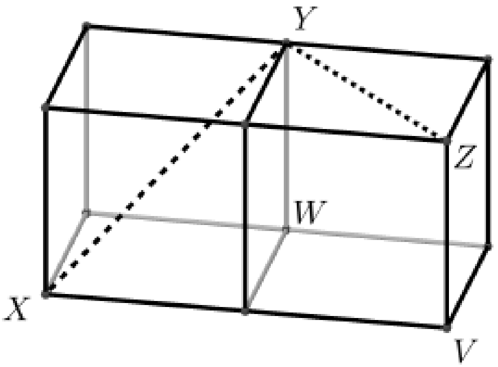
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" [(Edwin A. Abbott)]

Flatlandia – Problema – 1 - 30 aprile 2020 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sono dati due cubi, di ugual spigolo unitario, con una faccia in comune (vedi figura). I punti X, Y, Z, V e W sono vertici dei cubi.
a) Determinare l'ampiezza dell'angolo $X\widehat{Y}Z$.
b) Determinare la superficie e il volume della piramide di base $VZYW$ e vertice in X.
Motivare le risposte.



Commento
Sono arrivate 16 risposte da classi II, da classi III e anche da classi IV (riportiamo anche queste ultime, anche se sarebbero "fuori concorso", in base alle regole attuali).
Siamo molto contenti di aver ricevuto questo messaggio (il 30 aprile, ore 16) da uno degli studenti che hanno risolto il problema:

> *Salve.*
> *… Colgo inoltre l'occasione per ringraziarvi per la creazione di questo problema, che ha reso sicuramente meno noiosa la quarantena.*
> *Cordiali saluti.*
> *M.*

Il problema poneva un quesito relativo a due cubi di ugual spigolo con una faccia in comune.
Nella prima parte occorreva determinare l'angolo formato da due segmenti individuati sulla figura.
Nella seconda parte si doveva trovare la superficie e il volume di una particolare piramide individuata nella figura, motivando i calcoli in base alle proprietà di questa piramide.
Nella dimostrazione della prima parte solo alcuni hanno giustamente citato il teorema inverso del teorema di Pitagora, che, molti confondono col teorema di Pitagora stesso. C'è chi ha usato il teorema del coseno (di Carnot) e chi formule di geometria analitica dello spazio (angolo tra due rette), strumenti già un po' avanzati. Infine molti danno la dimostrazione, pensando di utilizzare il teorema di Pitagora, anche se in realtà stanno usando il suo inverso.
Ricordiamo poi che una retta incidente un piano in un punto P è perpendicolare al piano stesso se e soltanto se è perpendicolare in P a due rette del piano passanti per esso. Quindi per individuare una

altezza della piramide non basta trovare una retta, passante per il suo vertice, perpendicolare e incidente ad una sola retta del piano di base.

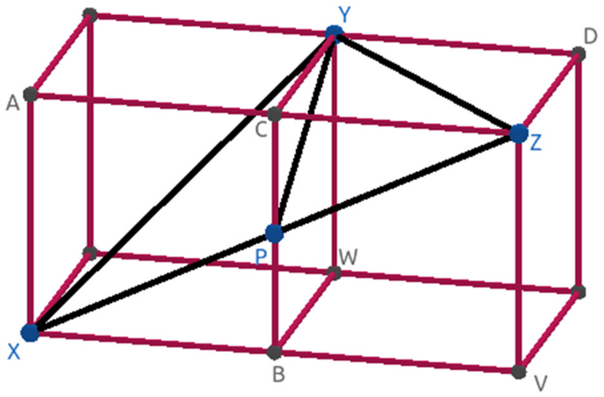
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole (in ordine di arrivo):

-Liceo scientifico "A. Pacinotti", Cagliari
-Liceo scientifico "N. Copernico", Udine, 2 soluzioni da una stessa classe IV
-Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN), 7 soluzioni da una stessa classe II
-ITSCG "A. Mapelli", Monza (MB)
-Liceo scientifico "G.B. Morgagni", Roma
-Liceo scientifico "G. Alessi", Perugia
-Liceo scientifico "Barsanti e Matteucci", Viareggio (LU)
-Liceo "Vasco Beccaria Govone", Mondovì (CN)
-Liceo scientifico "G. Galilei", Perugia

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

1)Soluzione proposta da Leo Cazzaniga – 2^I – Liceo scientifico "A. Pacinotti" Cagliari

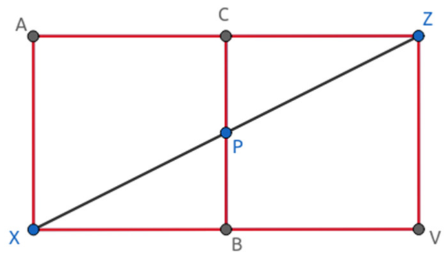


Sia P il punto medio del segmento CB. Si traccino i segmenti YP e ZX.

La diagonale interna di un cubo è pari a$\sqrt{3} \cdot L$, dunque $\overline{XY} = \sqrt{3}$.

La diagonale di un quadrato è pari a $\sqrt{2} \cdot L$, dunque nel quadrato YDCZ,$\overline{ZY} = \sqrt{2}$.

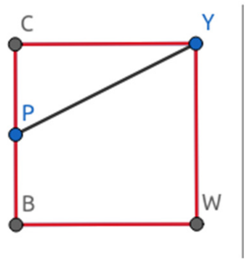
Consideriamo il rettangolo AZVX (in figura a lato), in cui il lato lungo è il doppio di quello corto.
Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AXZ:



$$\overline{XZ^2} = \overline{AX^2} + \overline{AZ^2}$$
$$\overline{XZ^2} = 1^2 + 2^2 = 5$$
$$\overline{XZ} = \sqrt{5}$$

Inoltre, i triangoli rettangoli XBP e PZC sono congruenti per il primo criterio di congruenza:$\overline{XB} = \overline{CZ}$perché lati di quadrati congruenti, $\overline{CP} = \overline{PB}$perché P è il punto medio di CB e $X\hat{B}P = P\hat{C}Z$perché entrambi retti. Allora $\overline{XP} = \overline{PZ}$perché lati corrispondenti nei suddetti triangoli congruenti.

Consideriamo il quadrato YWBC (in figura a lato), ovvero la faccia in comune dei due cubi.
Il quadrato ha lato unitario e, siccome P è il punto medio di CB,$\overline{CP} = 1/2$
Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CPY:



$$\overline{PY^2} = \overline{CP^2} + \overline{CY^2}$$
$$\overline{PY^2} = \frac{1^2}{2^2} + 1^2 = \frac{5}{4}$$
$$\overline{PY} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Nel triangolo XYZ, PY è la mediana relativa al lato XZ, in quanto$\overline{XP} = \overline{PZ}$da precedente dimostrazione. [Questo ragionamento funziona se X, P, Z sono allineati (che è vero…), ma occorreva dimostrarlo].

Siccome$\overline{XZ} = \sqrt{5}$e $\overline{PY} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, la mediana è la metà del corrispettivo lato. Ciò significa che il triangolo in questione è rettangolo, poiché in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è pari alla metà dell'ipotenusa stessa [e viceversa, che è quello che qui serve]. In questo caso, XYZ è rettangolo in Y, perché è il vertice da cui esce la mediana PY.

L'angolo XYZ, allora, è retto.

Calcoliamo ora la superficie della piramide di base VZYW e vertice X
Individuiamo le cinque facce e calcoliamone l'area:

YZVW (base) – Rettangolo di lati 1 e √2 –$A_{YZVW} = \overline{YW} \cdot \overline{YZ} = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$
YXZ – Triangolo rettangolo in Y –$A_{YXZ} = \frac{\overline{XY} \cdot \overline{YZ}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$
XWY – Triangolo rettangolo in W –$A_{XWY} = \frac{\overline{XW} \cdot \overline{WY}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
XWV – Triangolo di base XV e altezza WB –$A_{XWV} = \frac{\overline{XV} \cdot \overline{WB}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$
ZXV – Triangolo rettangolo in V –$A_{ZXV} = \frac{\overline{XV} \cdot \overline{VZ}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

$$S_{tot} = A_{YZVW} + A_{YXZ} + A_{XWY} + A_{XWV} + A_{ZXV} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6} + 4}{2}$$

Calcoliamo il volume della suddetta piramide, moltiplicando l'area della base con l'altezza, che è XY, poiché è perpendicolare alla base (per prima dimostrazione).
[XY è perpendicolare a YZ, ma questo non garantisce che XY sia perpendicolare al piano di base della piramide, anzi in questo caso non lo è, poiché l'altezza è XW].

$V = A_{YZVW} \cdot \overline{XY} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ [il volume risultava 2/3].

2)Soluzione proposta Benedetta Strizzolo, 4C, Liceo Scientifico "Copernico", Udine

RISOLUZIONE

a) Calcoliamo XY e YZ, gli spigoli appartenenti alle semirette che definiscono l'angolo XYZ. Sia $XY = d$, la diagonale del cubo posto a sinistra.

Consideriamo d' la lunghezza della diagonale di ogni faccia del cubo e, applicando il Teorema di Pitagora, troviamo $d'^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 2$ dove a è lo spigolo del cubo ed è uguale a 1 per ipotesi; dunque $YZ = d' = \sqrt{2}$.

Applicando nuovamente il teorema di Pitagora si ha che $d^2 = d'^2 + a^2 = 2 + 1 = 3$; ne deriva che: $XY = d = \sqrt{3}$. Per calcolare l'angolo in Y, troviamo anche XZ:

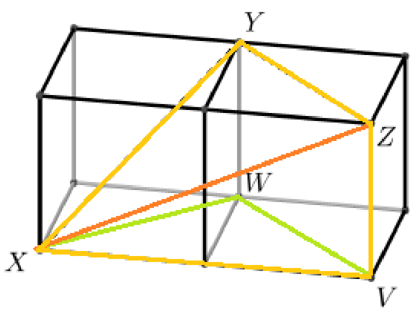
$$XZ = \sqrt{XV^2 + ZW^2} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$ [sotto radice ci va ZV e non ZW]

Siamo così in grado di poter applicare il Teorema di Carnot, anche detto Teorema del Coseno, secondo cui $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos\,\gamma$ (dove γ è l'angolo opposto a c); abbiamo infatti: $XZ^2 = XY^2 + YZ^2 - 2 \cdot XY \cdot YZ \cdot cos\,(XYZ)$

$$XYZ = \text{arcos}\left(\frac{XZ^2 - (XY^2 + YZ^2)}{-2 \cdot XY \cdot YZ}\right) = \text{arcos}\left(\frac{5 - 3 - 2}{-2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}\right) = arcos\ 0 = 90°$$

Dunque, XYZ è un angolo retto.

b) Consideriamo la piramide che ha: BASE: VZYW, VERTICE: X



XWV è un angolo retto in quanto dato dalla somma degli angoli compresi tra le due diagonali e gli spigoli delle facce quadrate, dunque $45° + 45° = 90°$.

XWY è anch'esso retto poiché la diagonale di base (XW) è perpendicolare allo spigolo del cubo (YW) così come l'angolo YWV per lo stesso motivo. Dunque, essendo perpendicolare a due rette distinte del piano contenente la base della piramide ($VZYW$), XW è l'altezza di quest'ultima.

Sappiamo inoltre che: $WVZ = VZY = ZYW = 90°$, XVZ è retto per costruzione e $XYZ = 90°$ come dimostrato al punto a).

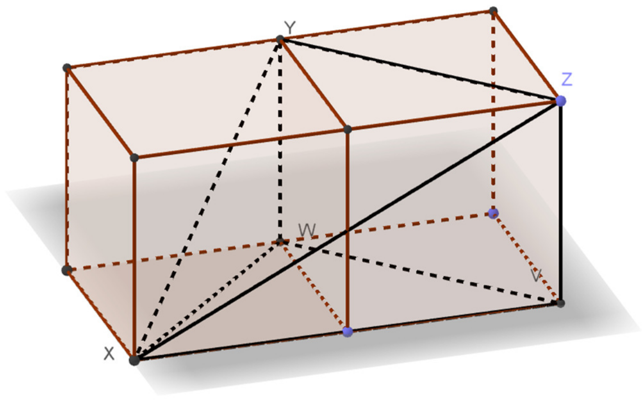
Sulla base di queste informazioni, possiamo calcolare l'area totale sommando le aree delle facce laterali (triangoli rettangoli) e l'area di base (rettangolo WVZY):

$$A_{tot} = A_{laterale} + A_{base} = A_{XVZ} + A_{XYZ} + A_{XWY} + A_{XWV} + A_{base}$$
$$= \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot 1 = \frac{3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + 2 = \sim 5{,}346$$

Possiamo inoltre determinare il volume della piramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot XW = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{3}$$

3)Soluzione proposta da Cesare Zini, Davide Santoni e Chiara Pedergnana, Classe 2^D, Liceo “B. Russell”, Cles (TN)

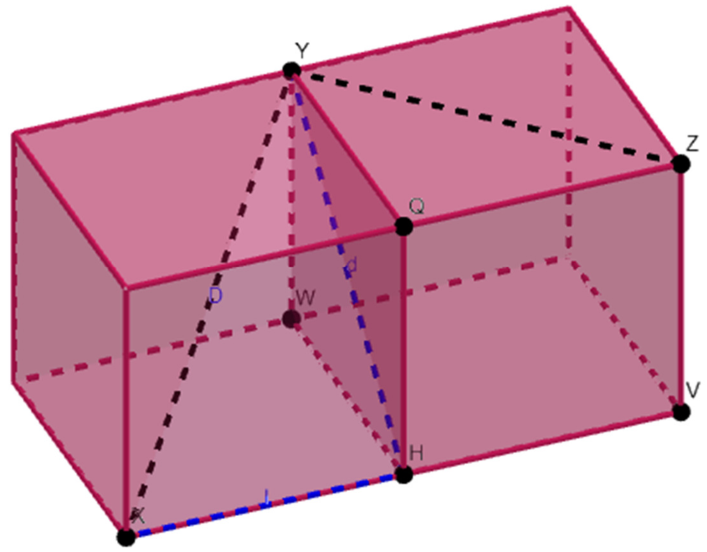


A) L’angolo XYZ misura 90°, in quanto i lati YZ, YX e XZ formano una terna pitagorica:
$YZ = \sqrt{2} \cdot l$ (diagonale del quadrato)
$YX = \sqrt{3} \cdot l$ (diagonale del cubo)
$XZ = \sqrt{l^2 + (2l)^2} = \sqrt{5} \cdot l$ (teorema di Pitagora, considerando XZ come ipotenusa, XV e ZV come cateti)
$\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2} \cdot l = \sqrt{5} \cdot l$

B) Per calcolare la superficie della piramide di base VZYW e con vertice X, bisogna sommare l’area di tutte le sue facce (poniamo l come misura del lato del cubo):
area XVZ = $\frac{2l \cdot l}{2} = l^2$
area [VZYW] [[VXYW]] = $\sqrt{2}l \cdot l = \sqrt{2}\, l^2$
area XWV = $\frac{\sqrt{2}l \cdot \sqrt{2}l}{2} = l^2$ [perché il triangolo XWV è retto in W]
area XWY = $\frac{\sqrt{2}l \cdot l}{2} = \frac{\sqrt{2}l^2}{2}$
area XZY = $\frac{\sqrt{2}l \cdot \sqrt{3}l}{2} = \frac{\sqrt{6}l^2}{2}$
l’area totale misura $\frac{2l^2 + 2l^2 + 2\sqrt{2}l^2 + \sqrt{2}l^2 + \sqrt{6}l^2}{2} = \frac{4l^2 + 3\sqrt{2}l^2 + \sqrt{6}l^2}{2}$

Per calcolare il volume della piramide, bisogna moltiplicare l’area di base della piramide, quindi VZYW per l’altezza della piramide, che è XW [questo, però, era da dimostrare].
Quindi il volume della piramide è $\frac{\sqrt{2}l^2 \times \sqrt{2}l}{3} = \frac{2}{3}l^3$.

4)Soluzione proposta da Elisabetta Centa, classe 4^C, Liceo Copernico, Udine

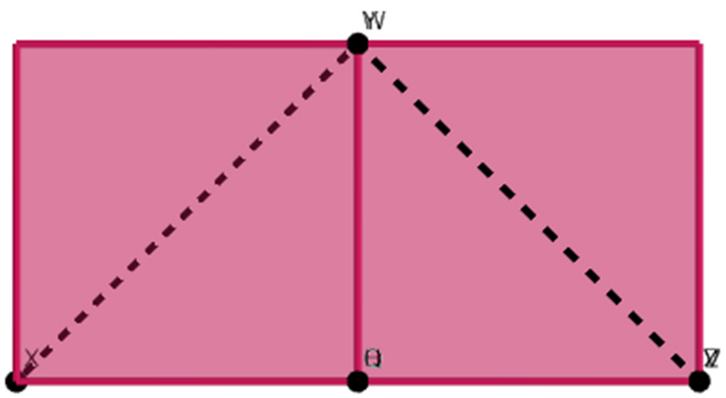


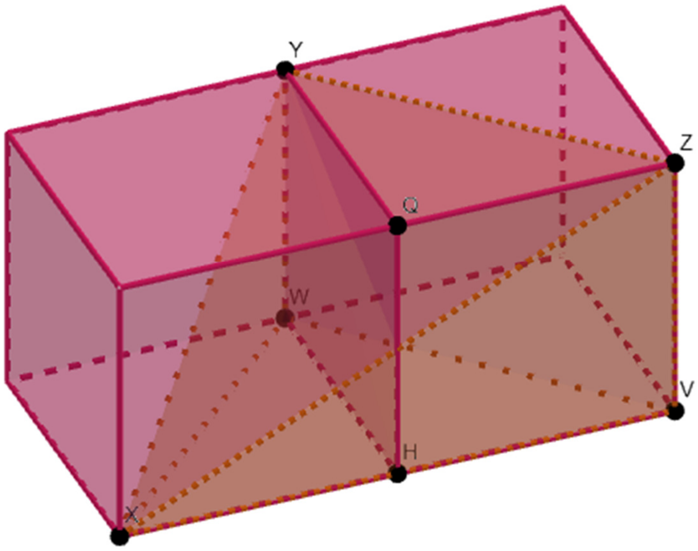
a) Determinare l'ampiezza dell'angolo XYZ
XH = lato cubo (l)= 1
YH = diagonale quadrato (d)= $\sqrt{2}$
XY = diagonale cubo (D): con il teorema di Pitagora $\sqrt{XH^2+YH^2}$= $\sqrt{1+2}$ = $\sqrt{3}$

Coordinate cartesiane nello spazio dei vertici: $X(0;0;0);\ Y(1;1;1);\ Z(2;0;1)$
Equazioni rette XY e YZ in forma vettoriale; λ ∈ R
$XY = (0;0;0) + \lambda\,(1;1;1) \rightarrow v(1;1;1)$
$YZ = (1;1;1) + \lambda(1;-1;0) \rightarrow v(1;-1;0)$
Calcolo l'angolo tra le due rette XY e YZ: $v(l;m;n)$
$\cos\alpha = \frac{ll_1+mm_1+nn_1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}$ [a rigore ci vorrebbe un ± davanti alle radici al denominatore]

$$\cos XYZ = \frac{-1+1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+1}} = 0$$
$XYZ = 90° + K\pi = 90°$

Vista solido dall'alto





b) Determina la superficie e il volume della piramide di base VZYW e vertice in X

La piramide ha base rettangolare poiché YZ = WV e ZV = YW

$superficie\ di\ base = YZ * ZV = \sqrt{2} * 1 = \sqrt{2}$

Per calcolare le superfici laterali considero le varie facce laterali:

XVZ→ $superficie = \frac{base*altezza}{2} = \frac{XV*ZV}{2} = \frac{2*1}{2} = 1$

XWV→ $superficie = \frac{XV*WH}{2} = \frac{2*1}{2} = 1$

XWY→ $superficie = \frac{XW*YW}{2} = \frac{1*\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

XZY→ $superficie = \frac{ZY*XY}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$somma\ superfici\ laterali = 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = \frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

$$superficie\ totale = somma\ superfici\ laterali + superficie\ di\ base$$
$$= \sqrt{2} + \frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{2}$$

$Volume\ piramide = \frac{1}{3} * superficie\ di\ base * altezza$

L'altezza della piramide parte dal vertice X e coincide con l'altezza del triangolo XWV

h piramide = XW

DIMOSTRAZIONE:

Se per il punto X di una retta *s* (individuata dallo spigolo laterale del cubo) si mandano due rette *a* e *b* perpendicolari ad *s* (corrispondenti agli spigoli di base del cubo), allora *s* è perpendicolare a ogni altra retta *r* passante per X e giacente sul piano delle rette *a* e *b*.

→quindi l'altezza della piramide, coincidente alla retta *r*, giace sul piano individuato dalle basi inferiori dei cubi;

Inoltre, poiché il triangolo XVW è rettangolo (in quanto la somma degli angoli complanari XWH e HWV è uguale a 90°) l'altezza della piramide (retta *r*), perpendicolare ad *s*, coincide con il lato XW.

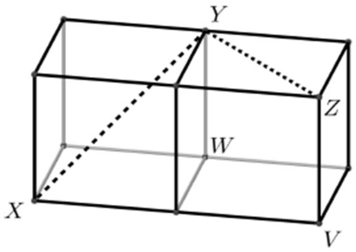
Calcolo il volume della piramide:

$Volume = \frac{1}{3} * \sqrt{2} * \sqrt{2} = \frac{2}{3}$

5)Soluzione proposta da Cirillo Alessandro, Augello Antonio, Classe: Terza Sezione: Als, Scuola: ITSCG "Achille Mapelli" Città: Monza (MB)

Flatlandia - Problema 1 - 30 aprile 2020

Sono dati due cubi, di ugual spigolo unitario, con una faccia in comune (vedi figura). I punti X, Y, Z, V e W sono vertici dei cubi.
a) Determinare l'ampiezza dell'angolo $X\widehat{Y}Z$.
b) Determinare la superficie e il volume della piramide di base $VZYW$ e vertice in X.
Motivare le risposte.



Risoluzione problema a

Considerata 1 la misura della lunghezza di uno del lato del cubo, calcolo le lunghezze dei lati del triangolo XYZ con il teorema di Pitagora o le formule da esse derivate.

$XZ = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ [triangolo XVZ]

$XY = \sqrt{3}$ [diagonale del cubo]

$YZ = \sqrt{2}$ [diagonale del quadrato]

Considero il piano su cui giace il triangolo XYZ e, avendo a disposizione le misure dei lati, tramite il teorema di Carnot, trovo la misura dell'angolo XYZ, denominato α α .

$XZ^2 = XY^2 + YZ^2 - 2 * XZ * YZ * cos(\alpha)$
$-2 * XZ * YZ * cos(\alpha) = 5 - 3 - 2$
$cos(\alpha) = 0 -> \alpha = 90°$

Considero il piano su cui giace il triangolo XYZ e, avendo a disposizione le misure dei lati, tramite il teorema di Carnot, trovo le misure dell'angolo XYZ, denominato α.

$$XZ^2 = XY^2 + YZ^2 - 2 * XZ * YZ * cos(\alpha)$$
$$-2 * XZ * YZ * cos(\alpha) = 5 - 3 - 2$$
$$cos(\alpha) = 0 -> \alpha = 90°$$

Risoluzione problema b

Superficie

La superficie totale la si calcola come la somma [delle superfici] di tutte le facce della piramide, in particolare

[Area]$YZVW = \sqrt{2} = YV * VW$ [YW e non YV]

[Area]$XZV = 1 = XV * VZ / 2 = 2 * 1/2 = 1$

[Area]$XWV = 1 = 2 * 1/2$ $della\ base\ dei\ cubi\ di\ partenza$

[Area]$XWY = \sqrt{2}/2 = XW * WY / 2 = \sqrt{2} * 1 / 2$

[Area]$XYZ = \sqrt{6}/2 =$
$dal\ problema\ a\ il\ triangolo\ XYZ$ è $rettangolo, i\ cui\ cateti\ sono\ \sqrt{2}\ e\ \sqrt{3}$

La superficie totale della piramide $VXYZ$ con vertice X è $2 + \frac{\sqrt{2} * (3 + \sqrt{3})}{2}$

Volume

Dalle considerazioni sulle rette e sui piani possiamo affermare che: Una retta è perpendicolare ad un piano se lo incontra e se è perpendicolare a due rette del piano passanti per il loro punto comune.

Prendiamo in considerazione il piano VWYZ: le rette YW e WV, che appartengono al piano, si intersecano nel punto W. A loro volta queste 2 rette sono perpendicolari a WX, che quindi rappresenta l'altezza della piramide per il principio illustrato precedentemente.

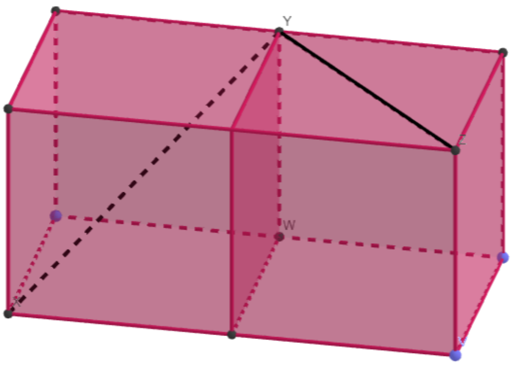
La formula per calcolare il volume della piramide è:

$V = A_{base} * h / 3$

da cui

$V = (A_{VWYZ} * WX) / 3 = (\sqrt{2} * \sqrt{2}) / 3 = 2/3$

6)Soluzione proposta da Elisa Endrizzi, Classe 2D Liceo B. Russell Cles



a) Determina l'ampiezza dell'angolo $\widehat{XYZ}$

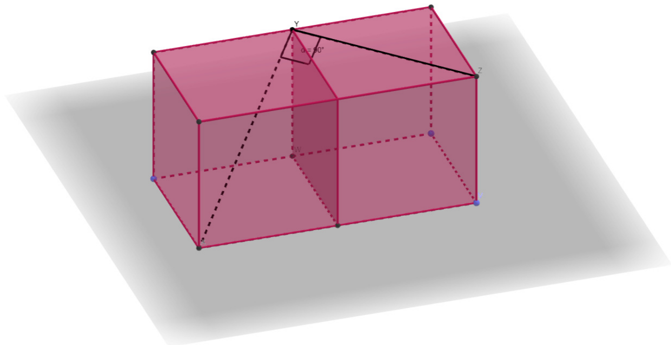


Figura 1

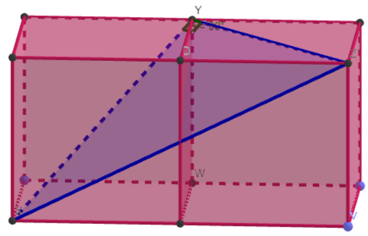


Figura 2

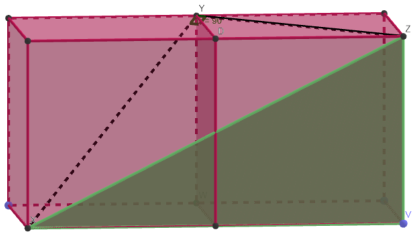


Figura 3

SVOLGIMENTO:

Per prima cosa ho disegnato un triangolo con vertici in X, Y, Z. (figura 2)

Osservando la figura possiamo ipotizzare che l'ampiezza dell'angolo $\widehat{XYZ}$ misuri 90 ° e che di conseguenza il triangolo (disegnato in blu) sia rettangolo.

Per dimostrare ciò si applica [l'inverso del teorema di Pitagora] [[il teorema di Pitagora]] ovvero:

$\boldsymbol{i = \sqrt{c1^2 + c2^2}}$
chiamiamo **x** lo spigolo del cubo [il testo diceva x=1]

(i = XZ = ipotenusa;
c1 = XY = cateto1;
c2 = YZ = cateto2)

- L'ipotenusa XZ corrisponde all'ipotenusa del triangolo avente come cateti **2x** e **x** (triangolo verde nella figura 3)

  $XZ = \sqrt{(2x)^2 + x^2}$
  $XZ = \sqrt{5x^2}$
  $\boldsymbol{XZ = x\sqrt{5}}$

- Il cateto XY corrisponde alla diagonale del cubo.
  [Non si può parlare di "cateti" e "ipotenusa" se ancora non sai che il triangolo è rettangolo!]

  La formula per calcolare la diagonale del cubo è $\boldsymbol{D = s\sqrt{3}}$ (s = spigolo)

  $\boldsymbol{XY = x\sqrt{3}}$

- Il cateto YZ corrisponde alla diagonale del quadrato (la faccia del cubo)
  La formula per calcolare la diagonale del quadrato è: $\boldsymbol{d = l\sqrt{2}}$ (l = lato)

  $\boldsymbol{YZ = x\sqrt{2}}$

Applicando il teorema di Pitagora risulta la seguente equazione:

$$x\sqrt{5} = \sqrt{(x\sqrt{3})^2 + (x\sqrt{2})^2}$$

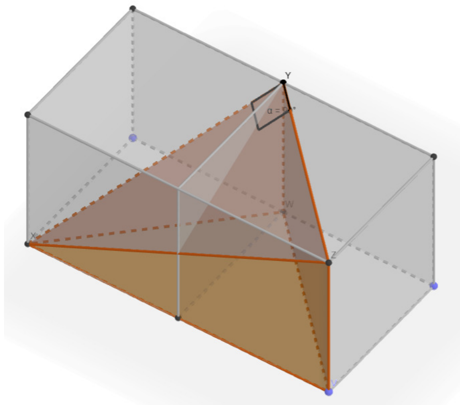
$$x\sqrt{5} = \sqrt{3x^2 + 2x^2}$$

$$\boldsymbol{x\sqrt{5}} = \sqrt{5x^2}$$

$$\boldsymbol{x\sqrt{5} = x\sqrt{5}}$$

CONCLUSIONE:
L'uguaglianza dimostrata sopra attraverso il Teorema di Pitagora è confermata.
Si può affermare che **l'angolo $\widehat{XYZ}$ ha un'ampiezza di 90°** perché il triangolo XYZ è rettangolo in $\widehat{XYZ}$

b) Determina la superficie ed il volume della piramide di base VZYW e vertice X



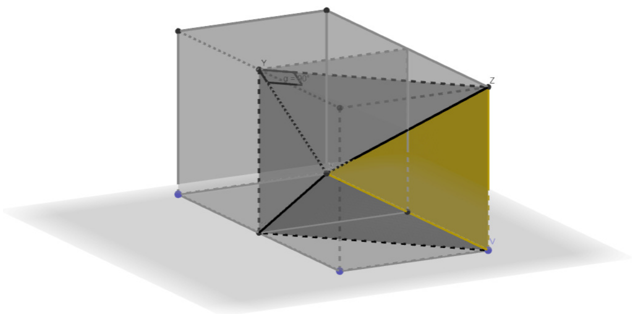
Superficie

Per misurare la superficie di una piramide bisogna calcolare l'area delle singole facce (triangoli) e del poligono di base (rettangolo) per poi sommarle.

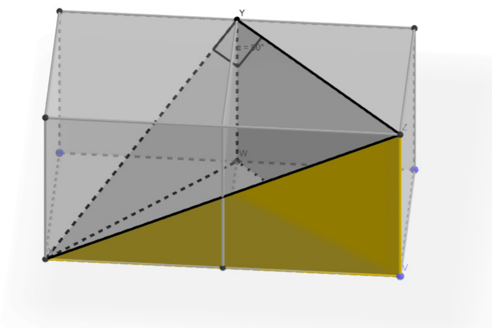
calcolo dell'area di ogni singola faccia:

$Area\ triangolo = \dfrac{b \times h}{2}$
Chiamiamo **x** lo spigolo del cubo

-1 (triangolo XZV)



Vista della piramide dall'alto



Vista di lato

La base ZV del triangolo coincide con lo spigolo del cubo.
Quindi ZV = x

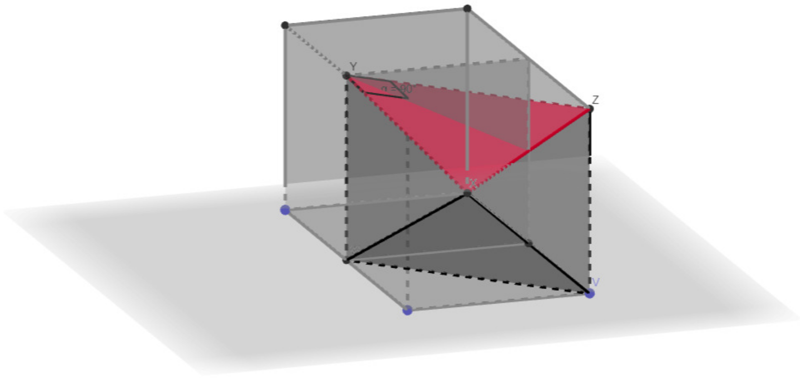
L'altezza XV del triangolo coincide con lo spigolo del parallelepipedo, ovvero il doppio dello spigolo del cubo.
Quindi XV = 2x
L'area del triangolo è:

$A = \frac{x \times 2x}{2}$

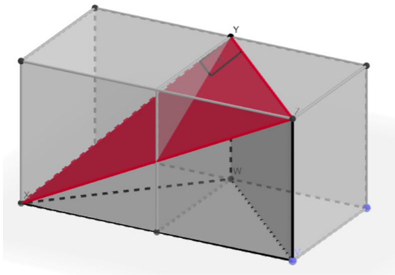
$A = \frac{2x^2}{2}$

Area triangolo XZV = x^2

-2 (triangolo XZY)



Vista della piramide dall'alto



Vista di lato

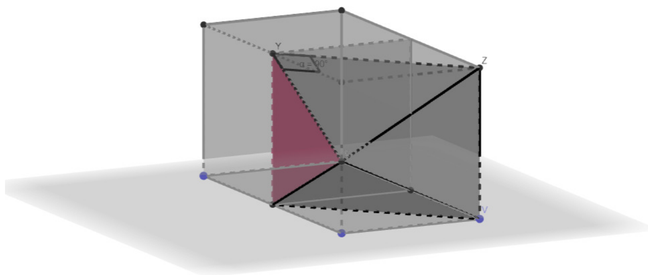
[XYZ è un triangolo rettangolo in Y e quindi per trovare la sua area determiniamo i due cateti YZ e YX]

La base YZ del triangolo coincide con la diagonale della faccia del cubo, la formula per calcolare la diagonale di un quadrato è: $\boldsymbol{diagonale\ quadrato = l\sqrt{2}.}$ (l = x = lato)
Quindi $YZ = x\sqrt{\mathbf{2}}$
L'altezza YX del triangolo coincide con la diagonale del cubo, la formula per calcolare la diagonale di un cubo è: $\boldsymbol{diagonale\ cubo = s\sqrt{3}}$ (s = x = spigolo)
Quindi $YX = x\sqrt{\mathbf{3}}$
L'area del triangolo è:

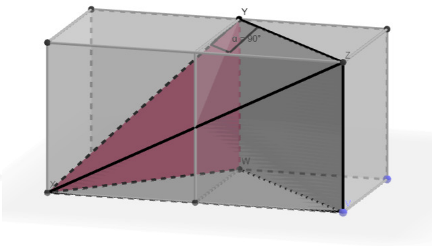
$$A = \frac{x\sqrt{2} \times x\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{Area\ triangolo} = \frac{\mathbf{x^2\sqrt{6}}}{\mathbf{2}}$$

-3 (triangolo XYW)



Vista della piramide dall'alto



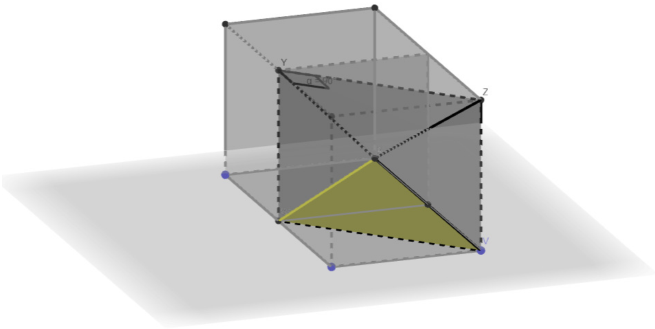
Vista di lato

La base YW del triangolo coincide con lo spigolo del cubo.
Quindi YW = x
L'altezza WX del triangolo coincide con la diagonale della faccia del cubo, quindi alla diagonale del quadrato.
Quindi $WX = x\sqrt{\mathbf{2}}$
L'area del triangolo è:

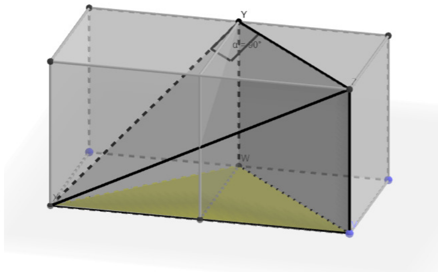
$$A = \frac{x \times x\sqrt{2}}{2}$$

$$\boldsymbol{Area\ triangolo} = \frac{\boldsymbol{x^2\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

-4 (triangolo XWV)



Vista dall'alto della piramide



Vista di lato

La base WV del triangolo coincide con la diagonale della faccia del cubo, quindi alla diagonale del quadrato.

Quindi $WV = x\sqrt{\mathbf{2}}$

L'altezza WX del triangolo coincide con la diagonale della faccia del cubo, quindi alla diagonale del quadrato.

Quindi $WX = x\sqrt{\mathbf{2}}$

L'area del triangolo è:

L'area del triangolo è [bisogna però provare che WX è perpendicolare a WV]:

$$A = \frac{x\sqrt{\mathbf{2}} \times \boldsymbol{x}\sqrt{\mathbf{2}}}{2}$$

Area del triangolo = x^2

CONCLUSIONE:

La superficie [laterale] della piramide è:

$$A = x^2 + \frac{\mathbf{x^2\sqrt{6}}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{x}^2\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} + x^2$$

$$A = 2\mathrm{x}^2 + \frac{\mathrm{x}^2(\sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt{\mathbf{6}})}{2}$$

$$\boldsymbol{A} = x^2(2 + \frac{\sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}})$$

[Manca la superficie totale]

Volume

Volume piramide = $\frac{poligono\ di\ base \times altezza}{3}$ [Area del poligono di base x altezza]
Chiamiamo **x** lo spigolo del cubo

L'area della base VZYW della piramide si ottiene utilizzando la formula dell'area del rettangolo:

A = b × h

La base VZ del rettangolo VZYW coincide con lo spigolo del cubo.

Quindi VZ = x

L'altezza YZ del rettangolo coincide con la diagonale della faccia del cubo, quindi con la diagonale del quadrato.

Quindi $YZ = x\sqrt{2}$

L'area della base della piramide è:

$A = x(x\sqrt{2})$
$\underline{\boldsymbol{A = x^2\sqrt{2}}}$

L'altezza WX della piramide coincide con la diagonale della faccia del cubo, quindi diagonale del quadrato
NB (Si considera il segmento WX l'altezza perché l'angolo VWX è retto) [non è sufficiente per poter dire che WX è altezza della piramide]
Quindi l'altezza è:
$\underline{\boldsymbol{h = x}\sqrt{2}}$

CONCLUSIONE
Il volume della piramide è:
$$V = \frac{x^2\sqrt{2} \times x\sqrt{2}}{3}$$
$$\boldsymbol{V = \frac{2x^3}{3}}$$

7)Soluzione proposta da Marianna Stancher - Classe 2^ - sezione D – Liceo Bertrand Russell - Cles

a) DETERMINARE L'AMPIEZZA DELL'ANGOLO $X\widehat{Y}Z$

Sappiamo che la misura del lato XY è congruente a $\sqrt{3}l$, essendo la diagonale di un cubo, mentre il lato YZ, essendo diagonale di un quadrato, misura $\sqrt{2}l$.
Per calcolare il lato ZX, invece, consideriamo il triangolo XVZ e applichiamo il teorema di Pitagora: $\sqrt{(2l)^2 + l^2} = \sqrt{5}l$.
Ora supponiamo che il triangolo XYZ sia rettangolo in Y, che quindi misurerà 90 gradi.
In tal caso il lato [ZX] [[ZY]] sarebbe uguale a $\sqrt{3l^2 + 2l^2} = \sqrt{5}l$ per Pitagora.

Essendo i due risultati congruenti, possiamo affermare che l'angolo XYZ misura 90 gradi.

b) DETERMINARE LA SUPERFICIE E IL VOLUME DELLA PIRAMIDE DI BASE VZYW E VERTICE IN X

$$A_{tot} = A_{base} + A_{laterale} = l \cdot l\sqrt{2} + \frac{([l\sqrt{2})]^2}{2} + \frac{l \cdot 2l}{2} + \frac{l\sqrt{3} \cdot l\sqrt{2}}{2} + \frac{l \cdot l\sqrt{2}}{2} = 2 + \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} l^2$$

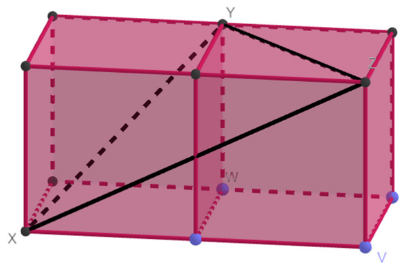
[Un po' sbrigativo. Non si capisce quali siano le facce relative !!! Inoltre nell'espressione finale mancano un paio di parentesi a delimitare il numero prima di l^2]

Per calcolare il volume abbiamo bisogno dell'altezza. Possiamo facilmente dedurre che è coincidente con il segmento XW in quanto cade perpendicolarmente alla base della piramide [WYZV] [[WYZY]] (perché, per ipotesi, l'angolo $X\widehat{W}Y$ $X\widehat{W}Y$ è retto) [non basta a qualificare XW come altezza della piramide].

$$V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{\sqrt{2}l^2 \cdot \sqrt{2}l}{3} = \frac{2}{3}l^3$$

8)Soluzione proposta da Giovanna Sicher – classe II D – liceo scientifico B. Russell – Cles (TN)

a)



L'angolo XYZ misura 90°.

Il segmento YZ è la diagonale del quadrato e misura [[~~rispettivamente~~]]: $l \times \sqrt{2}$

dove l è il lato del quadrato e quindi del cubo.

Mentre il segmento YX è la diagonale del cubo e misura: $l \times \sqrt{3}$

Il segmento XZ misura $l \times \sqrt{5}$ perché

$$XZ = \sqrt{ZV^2 + XV^2} = \sqrt{l^2 + (2l)^2} = \sqrt{l^2 + 4l^2} = \sqrt{5l^2} = l \times \sqrt{5}$$

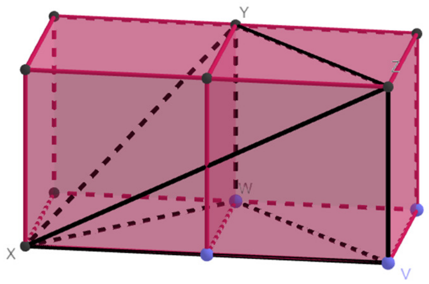
Il quadrato del segmento XZ è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui segmenti YZ e YX ovvero:

$$XZ^2 = YZ^2 + YX^2$$

$$l \times \sqrt{5})^2 = l \times \sqrt{2})^2 + l \times \sqrt{3})^2$$

$$5l^2 = 2l^2 + 3l^2$$

Con questo si può dedurre che la somma dei quadrati costruiti sui [lati XY e YZ] [[cateti]] è uguale al quadrato costruito [sul lato XZ] [[sull'ipotenusa]] e quindi il segmento XZ rappresenta l'ipotenusa [di un triangolo rettangolo e quindi l'angolo ad esso opposto] [[così l'angolo opposto all'ipotenusa]] è un angolo retto.
In conclusione l'angolo XYZ misura 90°.



b)

YZ = WV = $l\sqrt{2}$ perché sono diagonali dei quadrati
ZV = YW = l (spigolo del cubo)
WX = $l\sqrt{2}$ perché è diagonale del quadrato
XV = $2l$ (spigolo del cubo × 2)
XZ = $\sqrt{ZV^2 + XV^2} = \sqrt{l^2 + (2l)^2} = \sqrt{l^2 + 4l^2} = \sqrt{5l^2} = l\sqrt{5}$(per teorema di Pitagora)
XY = $l\sqrt{3}$ (diagonale del cubo)
Per calcolare la superficie laterale si può calcolare l'area di ogni [singola faccia] [[triangolo]] dal momento che sono tutti e quattro triangoli rettangoli utilizzando la formula:

$$\frac{base * altezza}{2}$$ [cateto x cateto / 2]

$$Axvz = \frac{XV * VZ}{2} = \frac{2l * l}{2} = l^2$$

$$Axvw = \frac{XW * WV}{2} = \frac{l\sqrt{2} * l\sqrt{2}}{2} = l^2$$

[Ma perché XW è perpendicolare a WV ?]

$$Axwy = \frac{YW * WX}{2} = \frac{l * l\sqrt{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{2}}{2}$$

$$Axzy = \frac{XY * YZ}{2} = \frac{l\sqrt{3} * l\sqrt{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{6}}{2}$$

La superficie laterale è data dalla somma delle aree dei triangoli.

$$Alat = Axvz + Axvw + Axwy + Axzy = l^2 + l^2 + \frac{l^2\sqrt{2}}{2} + \frac{l^2\sqrt{6}}{2} = \frac{2l^2 + 2l^2 + l^2\sqrt{2} + l^2\sqrt{6}}{2} = \\ = \frac{l^2(4 + \sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$$

La superficie totale è data dalla somma della superficie laterale e l'area di base (l'area del rettangolo di base).

$$Abase = base * altezza = YZ * ZV = l\sqrt{2}\ l = l^2\sqrt{2}$$

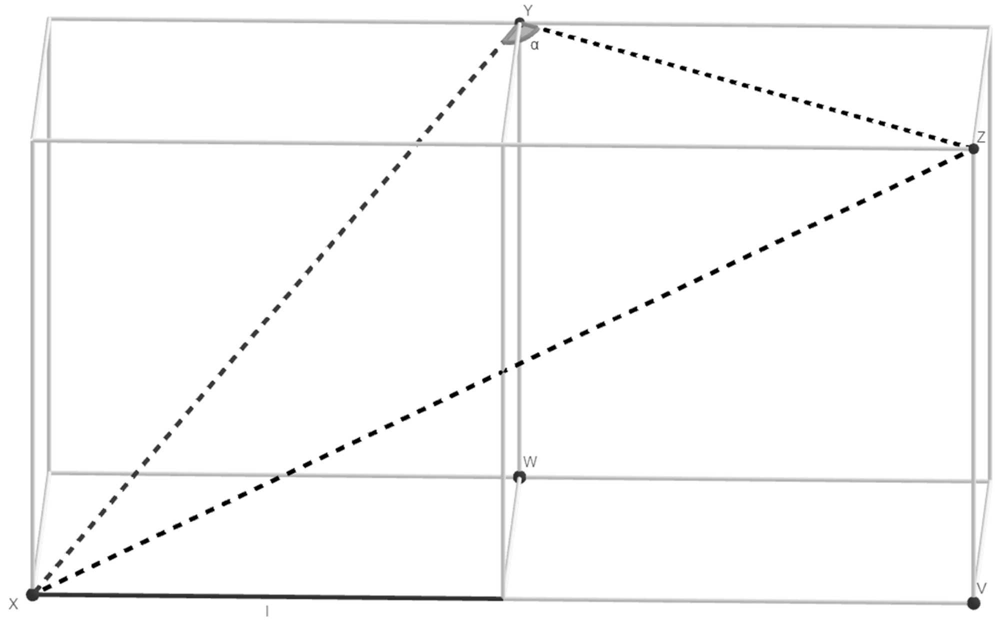
$$Atot = Abase + Alat = l^2\sqrt{2} + \frac{l^2(4 + \sqrt{2} + \sqrt{6})}{2} = \frac{2l^2\sqrt{2} + l^2(4 + \sqrt{2} + \sqrt{6})}{2} = = \frac{l^2(2\sqrt{2} + 4 + \sqrt{2} + \sqrt{6})}{2} = \\ \frac{l^2(4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$$

Il volume della piramide è dato dalla formula $\frac{Abase * altezza}{3}$

L'altezza della piramide è il segmento XW perché è perpendicolare alla base. [non basta questo per rendere XW altezza della piramide!].

$$V = \frac{Abase * XW}{3} = \frac{l^2\sqrt{2} * l\sqrt{2}}{3} = \frac{2l^3}{3}$$

9)Soluzione proposta da Schiesaro Leonardo, 2^C, Liceo Scientifico Morgagni Roma



Chiamiamo ***l*** uno spigolo qualsiasi dei due cubi [Il testo diceva che *l*=1].
Per il teorema di Carnot:

$$\overline{XZ}^2 = \overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2 - 2 \cdot \overline{XY} \cdot \overline{YZ} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{XY}^2 + \overline{YZ}^2 - \overline{XZ}^2}{2 \cdot \overline{XY} \cdot \overline{YZ}}$$

Per il teorema di Pitagora:

$$\overline{XY}^2 = l^2 + l^2 + l^2 = 3l^2$$

$$\overline{YZ}^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$$

$$\overline{XZ}^2 = 4l^2 + l^2 = 5l^2$$

Sostituendo i valori trovati:

$$\cos\alpha = \frac{3l^2 + 2l^2 - 5l^2}{2 \cdot \overline{XY} \cdot \overline{YZ}} = 0$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0 = 90°$$

Calcoliamo le lunghezze degli spigoli della piramide in funzione di *l* tramite il teorema di Pitagora:

$$\overline{XY} = l\sqrt{3}$$

$$\overline{YZ} = l\sqrt{2}$$

$$\overline{XZ} = l\sqrt{5}$$

$$\overline{XV} = 2l$$

$$\overline{XW} = l\sqrt{2}$$

$$\overline{VW} = l\sqrt{2}$$

$$\overline{VZ} = l$$

$$\overline{WY} = l\sqrt{2}$$ [*l* – elle]

[Qualche parola di spiegazione ???]

Analogamente a come fatto prima (oppure sfruttando le proprietà dei quadrati) si può dimostrare che anche $X\hat{V}Z$, $X\hat{W}V$ e $X\hat{W}Y$ sono angoli retti.
Poiché i triangoli XVZ, XWV, XWY e XYZ sono rettangoli, se ne può calcolare l'area.

$$A(XVZ) = \frac{\overline{XV} \cdot \overline{VZ}}{2} = \frac{2l \cdot l}{2} = l^2$$

$$A(XWV) = \frac{\overline{XW} \cdot \overline{VW}}{2} = \frac{l\sqrt{2} \cdot l\sqrt{2}}{2} = l^2$$

$$A(XWY) = \frac{\overline{XW} \cdot \overline{WY}}{2} = \frac{l\sqrt{2} \cdot l}{2} = l^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A(XYZ) = \frac{\overline{XY} \cdot \overline{YZ}}{2} = \frac{l\sqrt{3} \cdot l\sqrt{2}}{2} = l^2\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Essendo il quadrilatero VZYW un rettangolo (si può dimostrare che ha i lati paralleli a due a due o almeno due angoli retti), l'area di base della piramide si ottiene facendo:

$$A(VZYW) = \overline{VZ} \cdot \overline{YZ} = l \cdot l\sqrt{2} = l^2\sqrt{2}$$

La superficie totale del solido si trova quindi facendo:

$$S_t = A(VZYW) + A(XVZ) + A(XWV) + A(XWY) + A(XYZ) =$$

$$= l^2\sqrt{2} + l^2 + l^2 + l^2\frac{\sqrt{2}}{2} + l^2\frac{\sqrt{6}}{2} =$$

$$= l^2\left(\sqrt{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) =$$

$$= l^2\left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6} + 4}{2}\right) \cong l^2 \cdot 5{,}35$$

Il segmento $\overline{XW}$ corrisponde all'altezza della piramide poiché è perpendicolare alla sua base [perché?]. Il volume si calcola facendo:

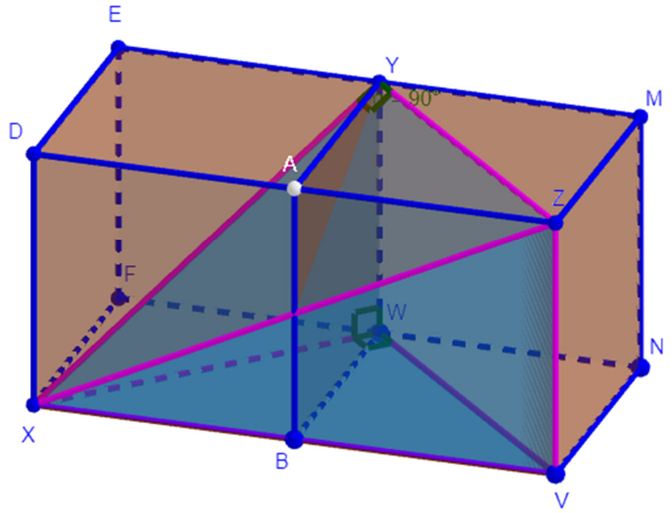
$$V = \frac{A(VZYW) \cdot \overline{XW}}{3} =$$

$$= \frac{l^2\sqrt{2} \cdot l\sqrt{2}}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}l^3 \cong l^3 \cdot 0{,}67$$

Dal momento che lo spigolo dei cubi è di lunghezza unitaria, la piramide [XVZYW] [[VZYW]] avrà un volume pari a circa 5,35 e un volume pari a circa 0,67.

10)Soluzione proposta da Margherita Italiani e Mario Solinas, Classe 2 L, Liceo scientifico "G. Alessi", Perugia



Nella figura sono rappresentati due cubi di spigolo unitario con la faccia AYWB in comune.

Richieste:

a) Determinare l'ampiezza dell'angolo $\mathbf{X\hat{Y}Z}$.

b) Determinare la superficie e il volume della piramide di base WVZY e vertice in X

Risoluzione:

a) Consideriamo inizialmente il triangolo rettangolo XZV (retto in $\hat{V}$ in quanto ABVZ quadrato): XV= XB + BV=2 e ZV = 1 (spigolo del cubo). Applichiamo al triangolo XZV il teorema di Pitagora per ricavare **XZ** $=\sqrt{\mathbf{1^2+2^2}}=\sqrt{\mathbf{5}}$ **.**

Consideriamo ora il quadrato AZMY: **YZ risulta la diagonale , quindi è uguale a** $\sqrt{\mathbf{2}}$**.**

Consideriamo in seguito il triangolo rettangolo XYW(retto in $\hat{W}$ perché YW è uno spigolo del cubo perpendicolare alla faccia XBWF che contiene XW): XW = $\sqrt{2}$ (in quanto diagonale del quadrato XBWF), YW = 1 (in quanto spigolo dei due cubi). Applichiamo dunque il teorema di Pitagora al triangolo XYW per ricavare **XY**: $\sqrt{\mathbf{1^2+\sqrt{2}^2}} = \sqrt{\mathbf{3}}$ **.**

Consideriamo infine il triangolo XYZ: **XZ** =$\sqrt{5}$, **YZ** = $\sqrt{2}$, **XY**= $\sqrt{3}$.
Possiamo dunque applicare l'inverso del teorema di Pitagora :

$$XY^2 + YZ^2 = XZ^2 \rightarrow 3 + 2 = 5$$

Quindi XYZ è un triangolo rettangolo avente come ipotenusa XZ. Di conseguenza $X\widehat{Y}Z = 90°$ (in quanto angolo opposto al lato maggiore XZ).

b) Consideriamo la piramide di base WVZY e vertice in X .

Calcoliamo per primo il volume con la seguente formula:

$$\frac{(\text{Area WVZY} \times \text{altezza piramide})}{3}$$

Il quadrilatero WVZY risulta un parallelogramma in quanto ha i lati opposti congruenti(YW = ZV = 1 , YZ= WV= $\sqrt{2}$). Esso avendo le diagonali congruenti (WZ = YW= $\sqrt{3}$) è un rettangolo.

La sua area dunque risulta : $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ **(YW × WV).**

L'altezza della piramide è il segmento che cade perpendicolarmente dal vertice X sul piano su cui giace la base WVZY.
Consideriamo la diagonale XW del quadrato XBWF , essa risulta l'altezza della piramide essendo perpendicolare alla base WVZY . Infatti gli angoli $X\widehat{W}V$ e $X\widehat{W}Y$ sono entrambi retti ($X\widehat{W}V$ è retto in quanto XW e WV sono diagonali di due quadrati con un lato in comune; $X\widehat{W}Y$ retto per quanto detto precedentemente).
XW(altezza) = $\sqrt{2}$ (diagonale di un quadrato di lato unitario).

Il volume della piramide di base WVZY e vertice in X è quindi uguale a :

$$\text{VOLUME} = \frac{(\sqrt{2} \times \sqrt{2})}{3} = \frac{2}{3}$$

Calcoliamo ora la superficie totale della piramide di base WVZY e vertice in X che è data da: Area di base (WVZY) + Area delle facce (XWV + XZV + XYZ + XYW)

Area di base (WVZY)= $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ (YW × WV).

Area XWV = $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = 1$ ($\frac{XW \times VW}{2}$)

Area XZV = $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ ($\frac{XV \times VZ}{2}$)

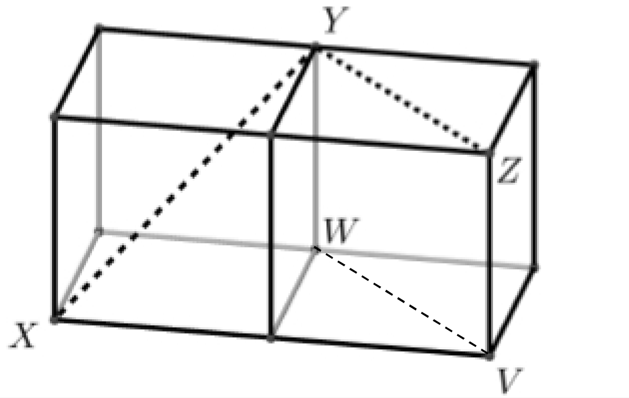
Area XYZ = $\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $\left(\frac{XY \times YZ}{2}\right)$

Area XYW = $\frac{1 \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\frac{YW \times XW}{2}\right)$

Infine la superficie totale della piramide di base WVZY e vertice in X è uguale a:

$$\text{SUPERFICIE TOTALE} = \sqrt{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 4 + \sqrt{6}}{2}$$

11)Soluzione proposta da Margherita Zucchelli – 2^E – Liceo scientifico "Barsanti e Matteucci" – Viareggio (LU)



In riferimento ai dati e alla figura del problema proposto determino:

ZY = $\sqrt{(1^2+1^2)} = \sqrt{2}$ per il teorema di Pitagora
YX = $\sqrt{(1^2+\sqrt{(1^2+1^2)}^2)} = \sqrt{3}$ per il teorema di Pitagora
XZ = $\sqrt{(XV^2+VZ^2)} = \sqrt{(2^2+1^2)} = \sqrt{5}$ per il teorema di Pitagora applicato al triangolo XVZ
Quindi ZYX = 90° per l'inverso del teorema di Pitagora in quanto $\sqrt{(\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2)}=\sqrt{5}$

Area YWVZ (base della piramide) = WV×VZ = ($\sqrt{2}\times1$)= $\sqrt{2}$
Area triangolo VXW = ($\sqrt{2}\times\sqrt{2}$)/2 = 2/2 = 1 [perché WXV è rettangolo in W]
Area triangolo VZX = (2×1)/2 = 2/2 = 1
Area triangolo ZYX = ($\sqrt{2}\times\sqrt{3}$)/2 = $\sqrt{6}/2$
Area triangolo YWX = (1×$\sqrt{2}$)/2 = $\sqrt{2}/2$

Superficie [totale] piramide = $\sqrt{2}+1+1+\sqrt{6}/2+\sqrt{2}/2 = 2+3\sqrt{2}/2+\sqrt{6}/2$

Volume =[A(YWVZ)xWX/3=2/3] [[YWVZ×WX/3 = $\sqrt{2}\times\sqrt{3}/3 = \sqrt{6}/3$]]
[Bisogna però giustificare perché WX è altezza della piramide].

12)Soluzione proposta da Jasmine Floretta, Classe: II D, Liceo Scientifico (scienze applicate) B. Russell, Cles (Trento)

a) PER INDIVIDUARE LA MISURA DELL'ANGOLO XYZ FACCIAMO RIFERIMENTO AL TEOREMA DI PITAGORA:

- Consideriamo il triangolo XYZ:

Il lato XZ (che secondo la nostra ipotesi dovrebbe essere l'ipotenusa del triangolo preso in considerazione) misura: $L\sqrt{5}$ perché è la diagonale di un rettangolo che ha per base il lati di due quadrati congruenti e per altezza il lato di un quadrato congruente agli altri.

QUINDI: XZ= $\sqrt{L^2+(2L)^2} = \sqrt{L^2+4L^2} = \sqrt{5L^2} = L\sqrt{5}$

- Utilizzando il Teorema di Pitagora possiamo perciò dimostrare la nostra tesi, perché avendo tutti i lati del triangolo siamo in grado , attraverso la formula, di verificare se l'angolo è realmente di 90°. Quindi se prendiamo in considerazione che la misura dell'angolo è di 90°, utilizzando l'ipotenusa e uno dei due cateti , se effettivamente l'angolo è retto dovrebbe risultare l'altro cateto.

IPOTENUSA= $L\sqrt{5}$
CATETO ZY= $L\sqrt{2}$ perché è la diagonale di un quadrato
CATETO XY= $L\sqrt{3}$ perché è la diagonale di un cubo che è $\sqrt{L^2+(L\sqrt{2})^2} = L\sqrt{3}$

TEOREMA DI PITAGORA:
XY= $\sqrt{(L\sqrt{5})^2-(L\sqrt{2})^2} = \sqrt{5L^2-2L^2} = L\sqrt{3}$
$L\sqrt{3}$ è la lunghezza dell'altro cateto e perciò ho dimostrato che l'angolo misura 90°.

[In queste considerazioni si usa l'inverso del teorema di Pitagora, cioè se in un triangolo il quadrato del lato maggiore uguaglia la somma dei quadrati dei lati minori, allora il triangolo è rettangolo con ipotenusa il lato maggiore].

b) Per calcolare la superficie totale e il volume della piramide di base VZYW e di vertice X ci serviamo delle formule:

- St = Sl (area laterale)+Sb (area di base)
- V= $\frac{Sb\cdot h}{3}$

Sb = L$\cdot$ $L\sqrt{2} = L^2\sqrt{2}$

1) **Sl**$_{YZX}$ = $\frac{L\sqrt{2}\cdot L\sqrt{3}}{2} = \frac{L^2\sqrt{6}}{2}$

1) **Sl**$_{ZVX}$ = $\frac{L\cdot 2L}{2}$ = L^2

1) **Sl**$_{XWV}$ = $\frac{L\sqrt{2}\cdot L\sqrt{2}}{2}$ = L^2 [perché XW è perpendicolare a WV]

1) **Sl**$_{YWX}$ = $\frac{L\cdot L\sqrt{2}}{2} = \frac{L^2\sqrt{2}}{2}$

St = $L^2\sqrt{2}$ + L^2+ L^2+ $\frac{L^2\sqrt{6}}{2}$ + $\frac{L^2\sqrt{2}}{2}$

= $\frac{2L^2\sqrt{2}+4L^2+L^2\sqrt{6}+L^2\sqrt{2}}{2}$

=L^2 $\frac{2\sqrt{2}+4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

=L^2 $\frac{4+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

L'altezza della piramide è XW perché cade perpendicolarmente sulla base della piramide [perché?]

V= $\frac{L^2\sqrt{2}\cdot h}{3}$

= $\frac{L^2\sqrt{2}\cdot L\sqrt{2}}{3}$

= $\frac{2L^3}{3}$

13)Soluzione proposta da Matteo Panizza, Classe IID, Liceo Bertrand Russell, Cles

Risoluzione

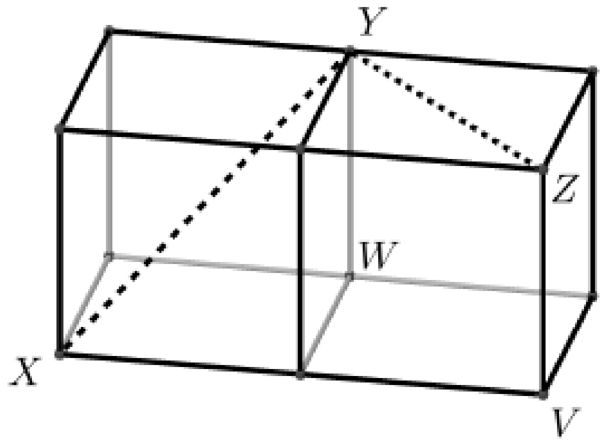
Flatlandia - Problema 1 - 30 aprile 2020

Sono dati due cubi, di ugual spigolo unitario, con una faccia in comune (vedi figura). I punti X, Y, Z, V e W sono vertici dei cubi.

a) Determinare l'ampiezza dell'angolo $X\widehat{Y}Z$.

b) Determinare la superficie e il volume della piramide di base $VZYW$ e vertice in X.

Motivare le risposte.



-Pe la risoluzione di entrambi i punti del problema, attribuisco agli spigoli dei cubi un valore x.
Sapendo questo posso affermare che tutte le varie diagonali dei quadrati presenti in figura misurano (√2)x.

a) -Dopo una prima occhiata alla figura proposta, suppongo che l'angolo XYZ sia retto; per dimostrarlo provo ad applicare [l'inverso del teorema di Pitagora] [[il Teorema di Pitagora]] al triangolo XYZ (per evitare confusione nei calcoli, metto la x solo nel risultato)

Tesi: $\sqrt{[xy^2 + yz^2]} = xz$

$yz = (\sqrt{2})x$
$xy = \sqrt{[(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{1})^2]} = (\sqrt{3})x$
$xz = \sqrt{[2^2 + 1^2]} = (\sqrt{5})x$ [usando il triangolo XVZ]

$\sqrt{[(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2]} = \sqrt{5}$ → $(\sqrt{5})x = (\sqrt{5})x$

La mia tesi è confermata, ed il teorema di Pitagora può funzionare solo se XYZ è retto, quindi: XYZ = 90°

[Molta confusione, i punti vanno indicati con lettere maiuscole e forse era meglio evitare di indicare con x la misura dello spigolo dei cubi]

c) -La formula [per trovare il volume di una piramide] è:(area di YZVW*WX) : 3

-WX è l'altezza della piramide, perché gli angoli XWV e XWY sono retti [perché ?]

-A questo punto non resta che eseguire i calcoli:

area di YZVW = $(\sqrt{2})x * x = (\sqrt{2})x^2$
[Volume] = $[(\sqrt{2})x^2 * (\sqrt{2})x] : 3 = 2/3\ x^3$

-Per trovare la superficie della piramide richiesta, faccio la somma delle varie superfici [delle facce] che compongono la piramide :

$$(\sqrt{2})x^2 + 2x^2 + 1/2\ (\sqrt{2})x^2 + 1/2\ (\sqrt{6})x^2$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + 4 + \sqrt{6}}{2}\ x^2$$

[Qualche parola di spiegazione in più sarebbe stata utile…]

14)Soluzione proposta da Chiara Araghi, 3^A Sc., Liceo "Vasco Beccaria Govone", Mondovì (CN)

FLATLANDIA

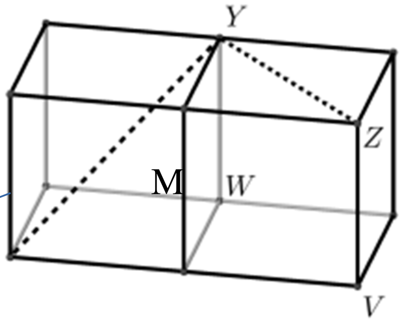
Sono dati due cubi, di ugual spigolo unitario, con una faccia in comune (vedi figura). I punti X, Y, Z, V e W sono vertici dei cubi.

a) Determinare l'ampiezza dell'angolo XYZ.

b) Determinare la superficie e il volume della piramide di base V ZY W e vertice in X.

Risolvo:

a)



triangolo rettangolo XYZ? $\rightarrow$ $i^2=c_1^2+c_2^2$

$XY^2=1^2+\sqrt{2}^2=3$ U

$YZ^2=1^2+1^2=2$ 3+2=5

$XZ^2=2^2+1^2=5$

XZ=ipotenusa $\rightarrow$ XYZ=90°

b)

-superficie

$A_{(VZWY)}=b\cdot h=ZV\cdot WY=1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$

+

$A_{(WYX)}=b\cdot h/2=WY\cdot WX/2=1\cdot\sqrt{2}/2=\sqrt{2}/2$ (XWY=90°, 2+1=3)

+

$A_{(VZX)}=VZ\cdot ZX/2=1\cdot 2/2=1$

+

$A_{(XWV)}=XV\cdot WM/2=2\cdot 1/2=1$ (M=punto medio di XV)

+

$A_{(XYZ)}=YW\cdot XY/2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}/2=\sqrt{5}/2$

$A_{tot}=(3\sqrt{2}+4+\sqrt{5})/2$

-volume

$V=S_b\cdot h/3$

$S_b= A_{(VZWY)}= \sqrt{2}$

h=WX, perché perpendicolare al piano VZWY, infatti l'angolo XWZ è di 90°

($XW^2+WZ^2=XV^2$, 2+3=5)

$V=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/3$ V=2/3

14)Soluzione proposta da Chiara Araghi, 3^A Sc., Liceo "Vasco Beccaria Govone", Mondovì (CN)

FLATLANDIA

Sono dati due cubi, di ugual spigolo unitario, con una faccia in comune (vedi figura). I punti X, Y, Z, V e W sono vertici dei cubi.

a) Determinare l'ampiezza dell'angolo XYZ.

b) Determinare la superficie e il volume della piramide di base V ZY W e vertice in X.

Risolvo:

a)

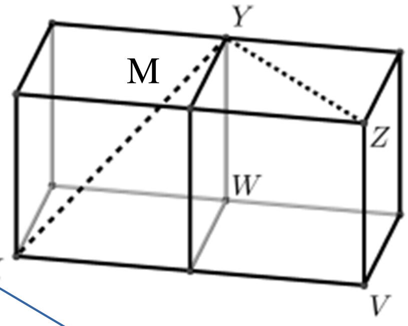
triangolo rettangolo XYZ? $\longrightarrow$ $i^2=c_1^2+c_2^2$

$XY^2=1^2+\sqrt{2}\sqrt{2}\,^2=3$ U

$YZ^2=1^2+1^2=2$ 3+2=5

$XZ^2=2^2+1^2=5$

XZ=ipotenusa $\longrightarrow$ XYZ=90°



[Inverso del teorema di Pitagora]

b)

-superficie

$A_{(VZYW)}$=b·h=ZV·[YZ] [[WY]]=1·$\sqrt{2}\sqrt{2}$=$\sqrt{2}\sqrt{2}$

+

$A_{(WYX)}$=b·h/2=WY·WX/2=1·$\sqrt{2}\sqrt{2}$/2=$\sqrt{2}\sqrt{2}$/2 (XWY=90°, [[2+1=3]])

+

$A_{(VZX)}$=VZ·[VX] [[ZX]] /2=1·2/2=1

+

$A_{(XWV)}$=XV·WM/2=2·1/2=1 (M=punto medio di XV)

+

$A_{(XYZ)}$=[YZ] [[YW]] ·XY/2=$\sqrt{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\sqrt{3}$/2=[radice 6/2] [[$\sqrt{5}\sqrt{5}$/2]]

A_{tot}=(3$\sqrt{2}\sqrt{2}$+4+$\sqrt{5}\sqrt{5}$)/2 [radice 6 e non radice 5]

-volume

$V=S_b\cdot h/3$

S_b= $A_{(VZYW)}$= $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$

h=WX, perché perpendicolare al piano VZYW, infatti l'angolo [XWV] [[XWZ]] è di 90° [come pure l'angolo XWY]

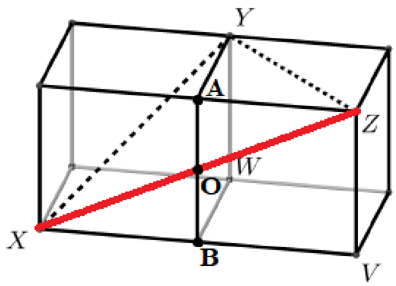
[[($XW^2+WZ^2=XV^2$, 2+3=5)]]

V=$\sqrt{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{2}$/3 V=2/3

[Ci voleva un po' più di attenzione nei passaggi e una attenta rilettura].

15)Soluzione proposta da Emil Negri e Celeste Catacuzzeno, classe II D, Liceo scientifico statale G. Galilei, Perugia.

a) L'angolo XYZ è ampio 90°



Dobbiamo dimostrare che XO≅OZ [non si dice chi sia il punto O]. Questi due segmenti appartengono ai triangoli rettangoli XOB e OAZ, i quali hanno:

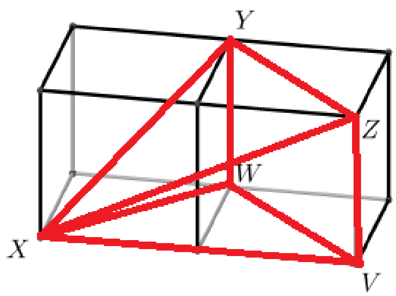
- XB≅AZ perché sono gli spigoli dei cubi;
- gli angoli XOB e AOZ congruenti perché opposti al vertice. [si deduce che O è il punto di intersezione di XZ con AB]

Quindi i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli; in particolare risultano congruenti XO e OZ.

Il triangolo OAY è congruente a OAZ perché hanno un cateto in comune e i cateti AY e AZ congruenti perché spigoli dei cubi. Di conseguenza OY≅OZ.

Dato che per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza, per i punti X, Y, Z passa una sola circonferenza. Il punto O, essendo equidistante dai tre punti, risulta essere il centro della circonferenza. Quindi, poiché XZ passa per O, è il diametro della circonferenza.
L'angolo XYZ è l'angolo alla circonferenza corrispondente a XOZ, il quale è un angolo piatto, quindi XYZ è ampio 90°. [un pó laborioso ma corretto]

b)



L'area totale A_t è uguale alla somma dell'area della base e di quella delle facce laterali.

La base è un rettangolo in cui ZV≅YW=1 e in cui [YZ] [[YX]]≅WV=√2 (diagonale di un quadrato che di lato 1), quindi $A_b=1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$. La faccia laterale XWY è un triangolo rettangolo dai cateti lunghi rispettivamente 1 e √2, perciò la sua area è $A_{XWY}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. La faccia laterale XVZ è un triangolo rettangolo [motivare] in cui i cateti sono rispettivamente lunghi 1 e 2, perciò $A_{XVZ}=\frac{1\cdot 2}{2}=1$. La faccia laterale XYZ è un triangolo rettangolo in cui i cateti sono lunghi √2 e √3 (perché diagonali rispettivamente di un quadrato e di un cubo), quindi la sua area è $A_{XYZ}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$. La faccia laterale XWV è un triangolo rettangolo in cui i due cateti sono uguali e lunghi entrambi √2 e quindi $A_{XWV}=\frac{\sqrt{2}^2}{2}=1$.

In definitiva $A_t=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1+1+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}+4+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=5{,}346$.

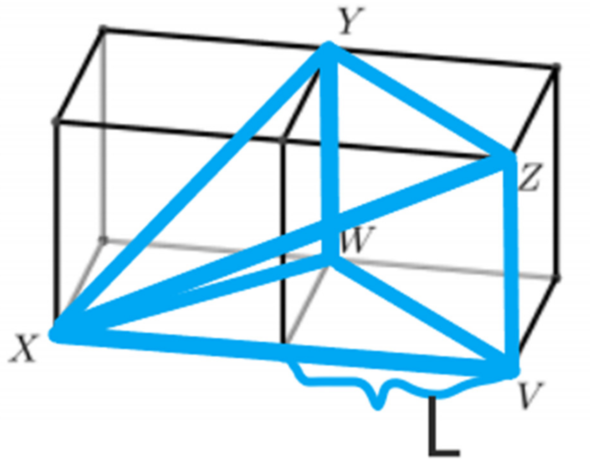
Il volume V si calcola attraverso la formula $V=\frac{A_b\cdot h}{3}$. Come detto in precedenza A_b=√2, mentre alla definizione di altezza (segmento che parte dal vertice e cade perpendicolare alla base) risponde il segmento XW [motivazione?] , che è lungo √2. In conclusione $V=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{\sqrt{2}^2}{3}=\frac{2}{3}$.

16)Soluzione proposta da Simone Longhi, classe 2^D, Liceo Russell, Cles (TN)

Non scrive la classe e la sezione

Risoluzione problema punto A:

Ho modificato la figura fornita dal problema di Flatlandia.



Tesi: l'angolo XYZ è retto

Rinomino il lato dei cubi con la lettera L (come rappresentato in figura)

quindi: YZ = (radice^2 di 2)L

Dimostro la tesi grazie [all'inverso del teorema di Pitagora] [[al teorema di Pitagora. "Pitagora si scrive con la "P" maiuscola]] :

per IP. YZ = (radice^2 di 2)L

YZ = radice^2 di (XZ^2 - XY^2)

YZ = radice^2 di (5L^2 - 3L^2)
[molto confuso !!!]

facendo i calcoli YZ risulta : (radice^2 di 2)L (come da ipotesi)

quindi: l'angolo XYZ è RETTO essendo [la relazione pitagorica valida]] [[il teorema di Pitagora possibile]] solo con i triangoli rettangoli.

Risoluzione problema punto B:

Superfice della piramide:

AREE DELLE FACCE:

$$YZV = \sqrt{2}L^2$$
$$XZV = L^2$$
$$XWY = L^2$$
$$XWY = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}L^2$$
$$XYZ = \frac{1}{2} \times \sqrt{6}L^2$$

[Nessuna spiegazione !]

SUPERFICIE = $\sqrt{2}L^2 + 2L^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}L^2 + \frac{1}{2}\sqrt{6}L^2 = \frac{3\sqrt{2}+4+\sqrt{6}}{2}L^2$

Volume della piramide :

formula = base*altezza/3 nel nostro caso : WVZY * WX /3

considero WX altezza perché l'angolo XWV è retto per somma di 2 angoli di 45° gradi.

Calcoli:

AREA DI : $WVZY = \sqrt{2}L \ L = \sqrt{2}L^2$

[V= $\frac{\sqrt{2}L^2 \cdot \sqrt{2}L}{3}$ = 2/3 L^3].