FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

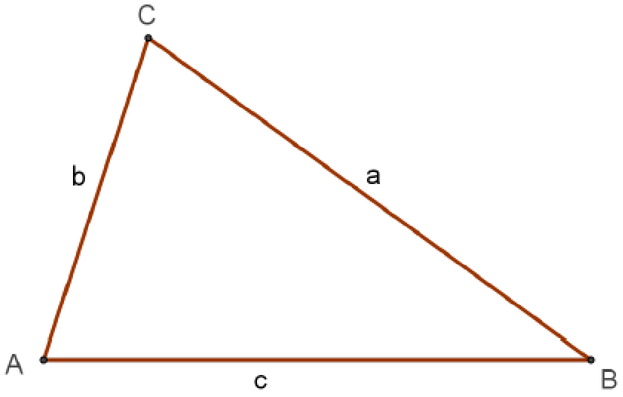
Flatlandia - Problema 14 - 28 novembre 2018 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia – Problema 14-28 novembre 2018

Sia ABC un triangolo in cui l'angolo in A è il doppio dell'angolo in B.
Dette a, b, c, le misure dei lati opposti ai vertici A, B, C rispettivamente, provare che $a^2 = b(b+c)$.

Suggerimento: prolungare il lato AC dalla parte di A di un segmento congruente ad AB.



Motivare le risposte.

Commento
Sono giunte otto risposte: una delle risposte è di un allievo di classe 4^ (che quindi non e' possibile accettare) e le altre sette sono arrivate da classi seconde e terze di liceo scientifico.
Il problema poneva un quesito su un triangolo avente un angolo doppio di un altro in cui bisognava provare una particolare relazione tra le misure dei suoi lati.

Le risposte pervenute sono sostanzialmente corrette. Ogni tanto compaiono errori nell'indicazione di lettere e angoli, segno di una non attenta rilettura di quanto scritto. Il suggerimento dato nel testo e' stato da tutti adeguatamente sfruttato. Si segnalano comunque una risoluzione trigonometrica (invero un po' pesante) e una risoluzione che sfrutta il teorema della tangente e della secante.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo Scientifico "P. Paleocapa", Rovigo
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- IIS "Copernico-Luxemburg", Torino
- Liceo Scientifico "G. Alessi", Perugia
- Liceo Scientifico "Giordano Bruno"- indirizzo Scienze Appl., Mestre-Venezia

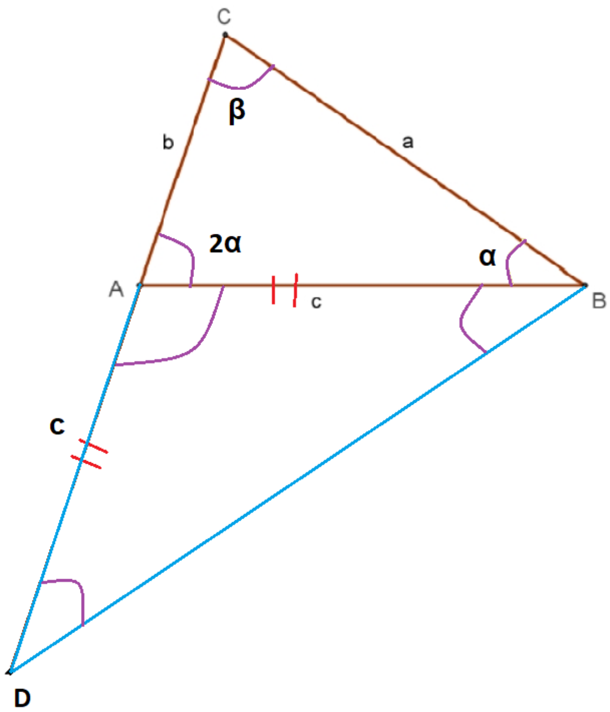
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

1) Stocco Marco, classe 3A LSA - Liceo Scientifico P.Paleocapa, Rovigo

Enunciato: Sia ABC un triangolo in cui l'angolo A è il doppio dell'angolo B. Dette a,b,c le misure dei lati opposti ai vertici A,B,C rispettivamente provare che $a^2 = b(b+c)$.

Io, sfruttando il suggerimento che diceva di prolungare il lato AC, dalla parte di A , di un segmento di misura eguale a AB, ho ottenuto la seguente figura:



NELLA FIGURA OTTENUTA HO NOMINATO L'ANGOLO ACB :β

Ipotesi: angolo CAB = 2xangolo CBA

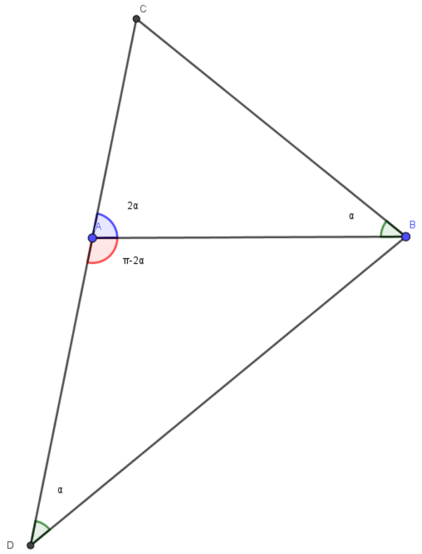
Tesi: $a^2 = b(b+c)$.

Dimostrazione : Parto da identificare tutti gli angoli dei triangoli ABC e ABD, partendo dalla misura standard α. L'angolo ACB è uguale a 180°-(2α+α) quindi ACB=180°-3α, in quanto la somma degli angoli interni di un triangolo è congrua a 180°. L'angolo DAB è congruo, in quanto angolo esterno dell'angolo CAB, a (β+α), e dato che β=180°-3α, l'angolo DAB posso descriverlo come 180-2α. Inoltre per costruzione i segmenti AD e BA sono congruenti. Perciò il triangolo ADB è isoscele sulla base DB. Quindi gli angoli ADB e ABD sono congruenti e li posso scrivere come (180°-(180°-2α))/2, ovvero α. Quindi si ha che nel triangolo CDB, BA è la bisettrice dell'angolo CBD. Inoltre si può osservare che i triangoli ACB e BCD sono simili perché hanno tutti e tre gli angoli congruenti: ACB=180°-3α=BCD; CAB=2α=CBD;CBA=α=CDB. Perciò al lato a (CB) [corrisponde il lato] [[sta in relazione il lato]] b+c (CD), al lato b (AC) [corrisponde il lato] [[sta in relazione il lato]] a (BC) . Quindi si può scrivere la proporzione:

AC:CB=BC:CD che espresso con le misure dei segmenti si può scrivere b:a=a:(b+c) , perciò $a^2 = b(b+c)$.

A questo punto la tesi è dimostrata.

2) Soluzioni proposte dalla classe 3 H liceo Scientifico Aristosseno Taranto

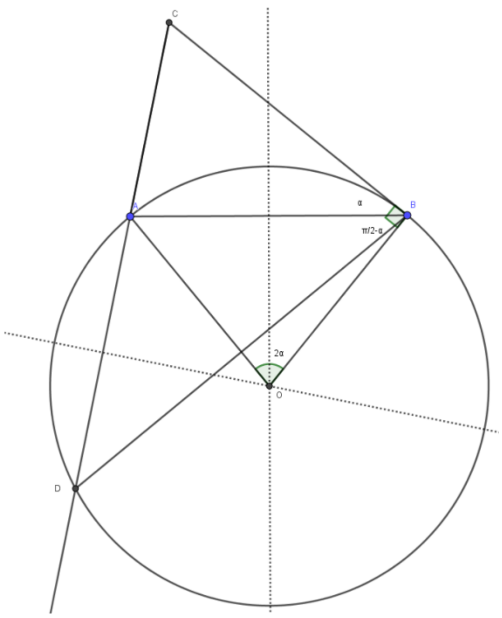


Prima soluzione

Avendo prolungato il lato AC del triangolo, dalla parte di [A] [[C]] , di un segmento AD congruente ad AB, il triangolo DAB sarà un triangolo isoscele. L'angolo di vertice A di questo triangolo ha ampiezza pari a π-2α in quanto supplementare(perché angolo esterno) dell'angolo di vertice A del triangolo ABC dato . Gli angoli alla base del triangolo isoscele DAB avranno quindi ampiezza pari ad α . Possiamo quindi dedurre che i triangoli ABC e DBC sono simili poiché hanno l'angolo di vertice C in comune e gli angoli CBA e CDB congruenti. I lati omologhi dei due triangoli sono proporzionali e allora si ha che :

CD : CB = CB : CA e , passando alle misure : $(b+c): a = a: b$

da cui segue che : $a^2 = b(b+c)$.



Seconda soluzione

Dopo aver prolungato il lato AC del triangolo ,dalla parte di [A] [[C]] , di un segmento AD congruente ad AB,costruiamo la circonferenza passante per i punti A,B e D . Tracciamo quindi gli assi dei lati AB e AD per individuare il centro O della circonferenza circoscritta al triangolo DAB .In essa ,l'angolo al centro AOB è il doppio dell'angolo alla circonferenza ADB che è congruente all'angolo DBA perché il triangolo DBA è isoscele per costruzione. Essendo l'asse del segmento AB altezza del triangolo isoscele AOB, l'angolo OBA avrà ampiezza π/2-α e quindi l'angolo OBC è retto. Ciò significa che il segmento CB è tangente nel punto B alla circonferenza tracciata. Possiamo quindi applicare il teorema della secante e della tangente ottenendo ugualmente la proporzione:

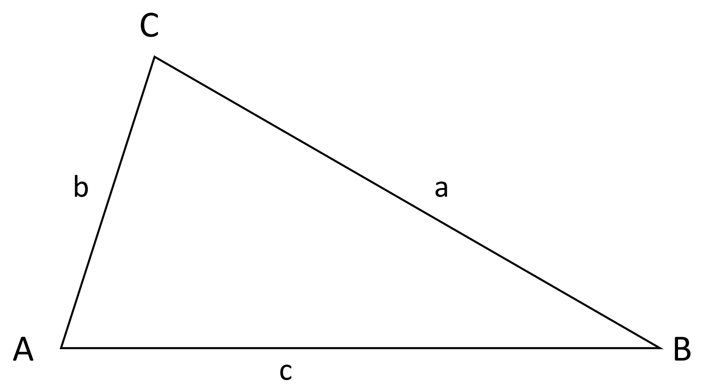
CD : CB = CB : CA da cui segue ancora , passando alle misure:

$$a^2 = b(b+c) .$$

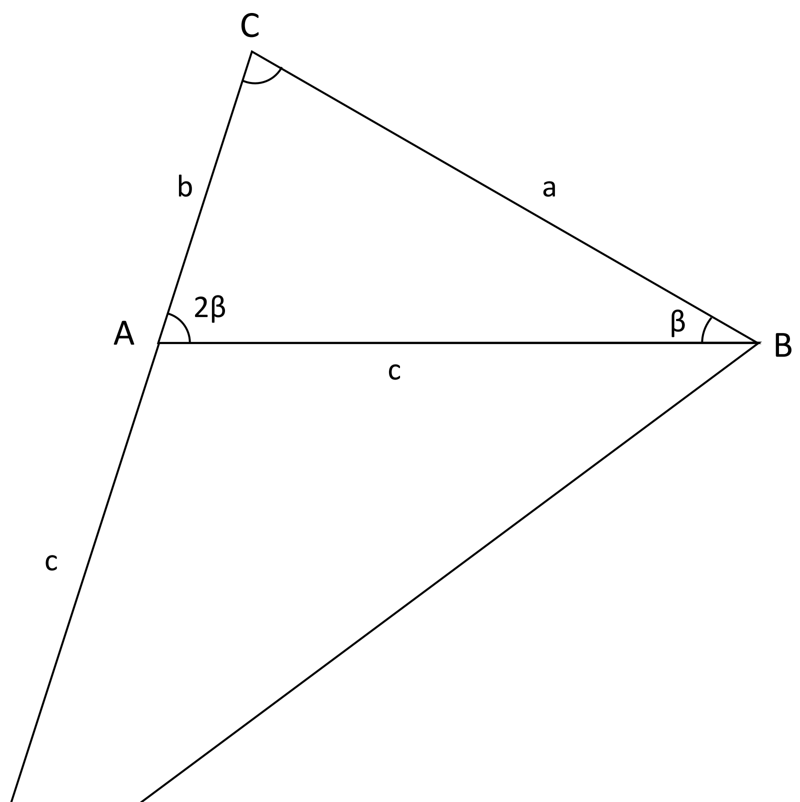
3) Soluzione a cura Placentino Matteo, Simone Sardo, Sofia Larhdir, Alessia Orofino, Classe 2ª L, IIS Copernico-Luxemburg di Torino (allievi del Prof. Riccardo Urigu)

Sia ABC un triangolo in cui l'angolo in A è il doppio dell'angolo in B.
Dette a, b, c, le misure dei lati opposti ai vertici A, B, C rispettivamente, provare che $a^2 = b\,(\,b + c)$.
Suggerimento: prolungare il lato AC dalla parte di A di un segmento congruente ad AB.
Motivare le risposte.

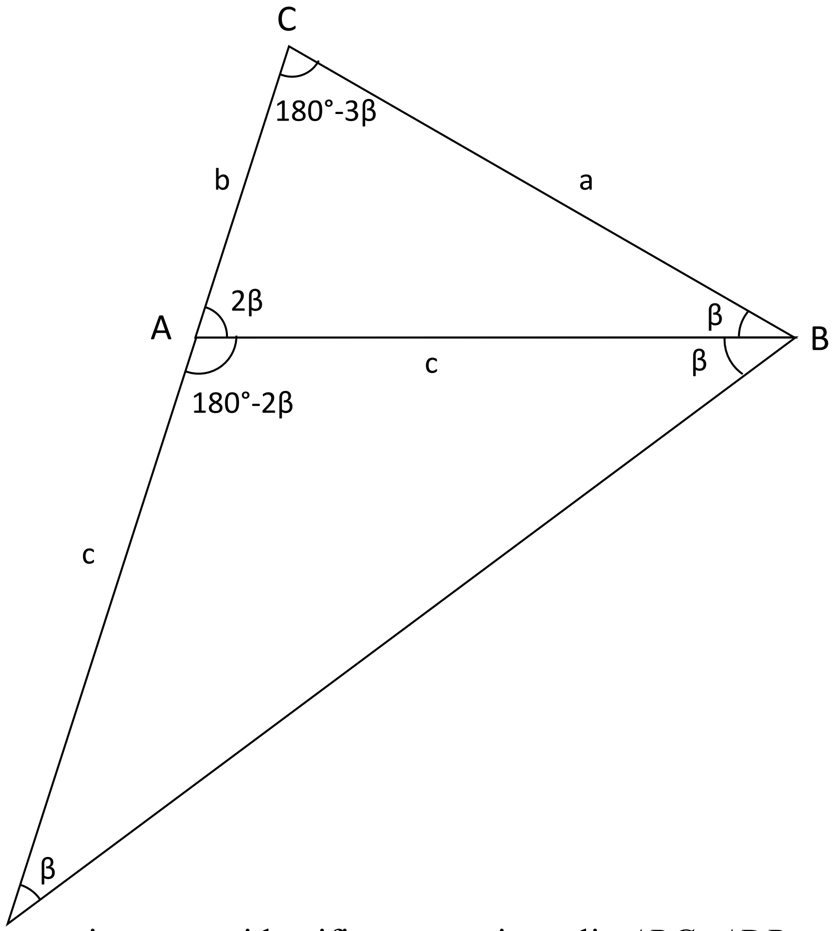
.



Una volta disegnato il triangolo ABC, e indicate con a, b, c, le misure dei lati opposti ai vertici A, B, C rispettivamente, si è nominato β l'angolo in B.
Essendo l'angolo in A doppio di quello in B, l'angolo in A ha ampiezza 2β.
Prolungato il lato AC dalla parte di A di un segmento congruente ad AB si nomina D l'estremo di tale segmento.
Si uniscono infine D e B con un segmento, ottenendo la figura seguente:



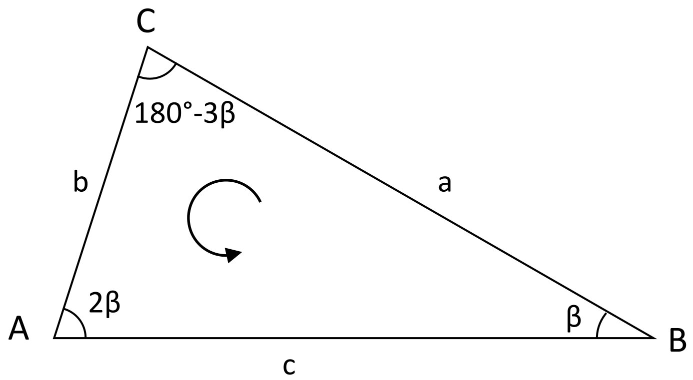
Se si considera il triangolo *ADB*, esso ha i lati *AB* e *AD* uguali, quindi è isoscele, inoltre il suo angolo in *A* ha ampiezza $180°-2\beta$, mentre i suoi angoli in *B* e *D* hanno ampiezza β, essendo il triangolo *ADB* isoscele.
Se si considera il triangolo *CDB*, il suo angolo in *B* ha ampiezza $\beta + \beta = 2\beta$.

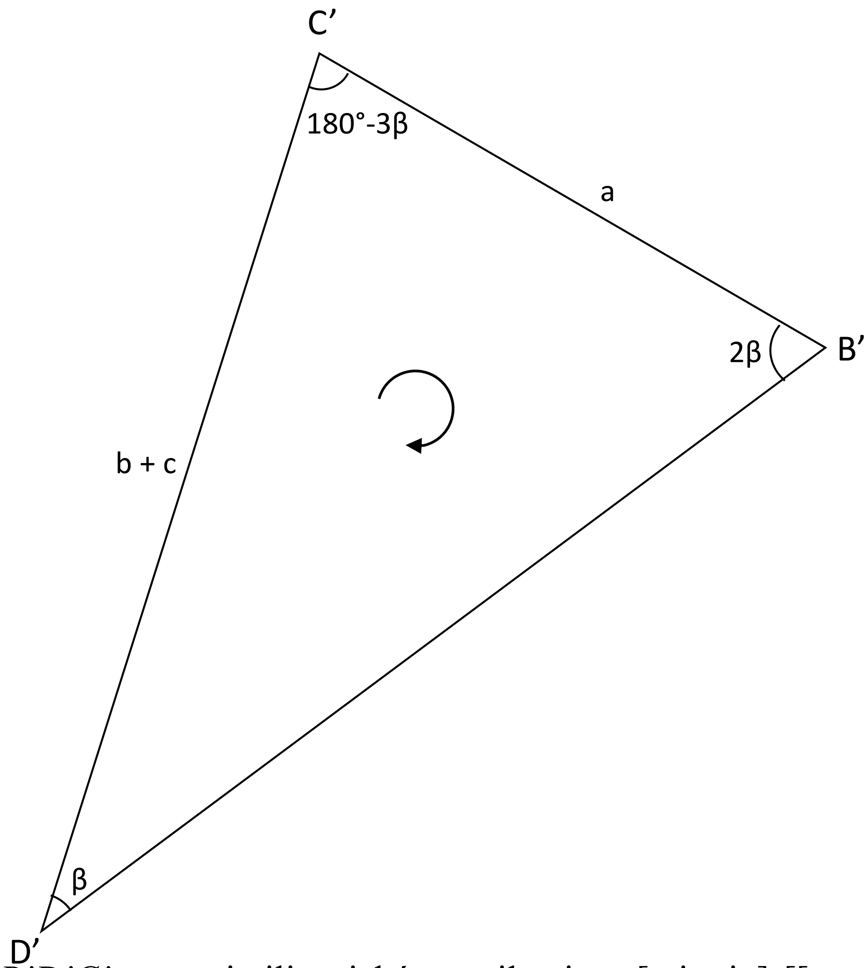


Nella figura precedente si possono identificare tre triangoli: *ABC*, *ADB* e *CDB*, dove il triangolo *ADB* è come detto in precedenza isoscele.
Prendendo in considerazione i due triangoli *ABC* e *CDB*, e rinominando i vertici del secondo triangolo nel modo seguente:

$$C \leftrightarrow C', \quad D \leftrightarrow D', \quad B \leftrightarrow B'$$

si ottengono le seguenti due figure:





I triangoli *ABC* e *B’D’C’* sono simili poiché, per il primo [criterio] [[teorema]] di similitudine sui triangoli, hanno tre angoli ordinatamente uguali.
Si può quindi affermare che:

$AB : B'D' = BC : D'C' = AC : B'C'$

Dato che il segmento *B*’*D*’ non è noto, si prende in considerazione solo la porzione di uguaglianza seguente:

$BC : D'C' = AC : B'C'$

Sostituendo i valori dei singoli lati diventa:

$a : (b + c) = b : a$

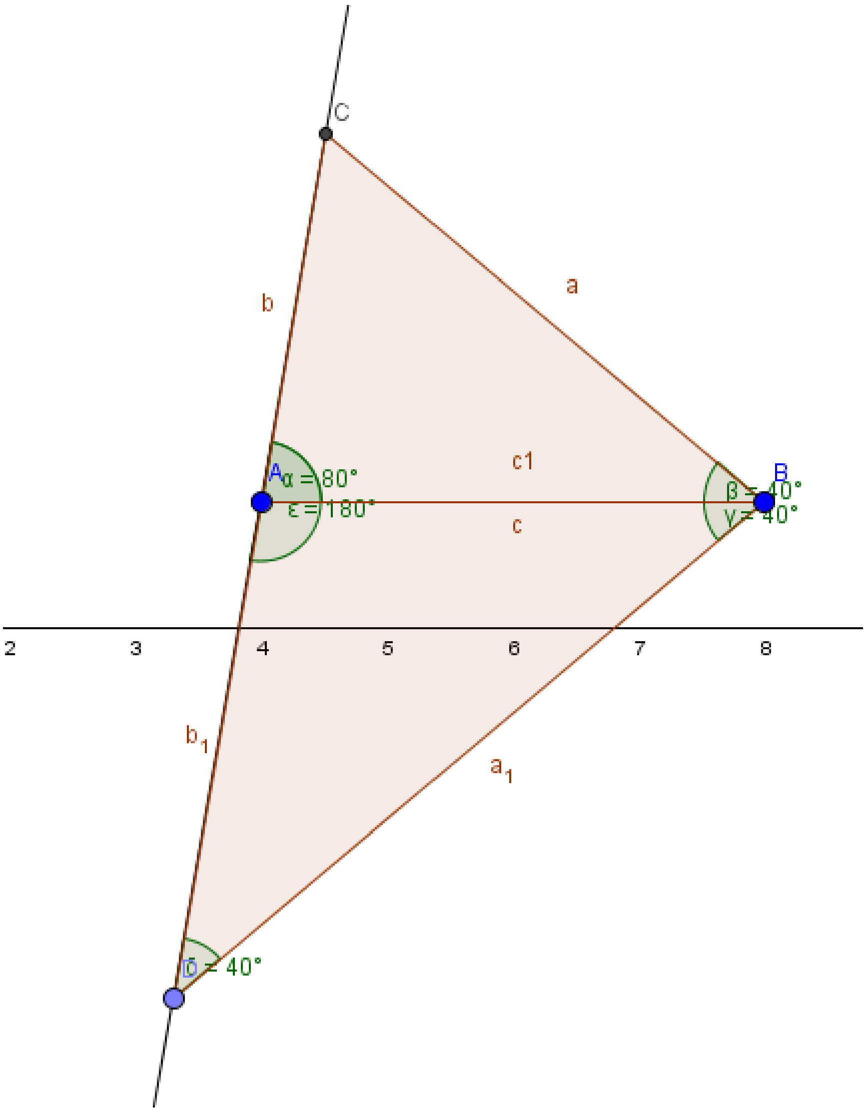
Da cui si ottiene:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a}$$

Quindi si dimostra che:

$a^2 = b\,(b + c)$

4) Gemma-Broccardo, Laura-Pieripolli- Classe 3D I.I.S. Bruno-Franchetti-Mestre-Venezia

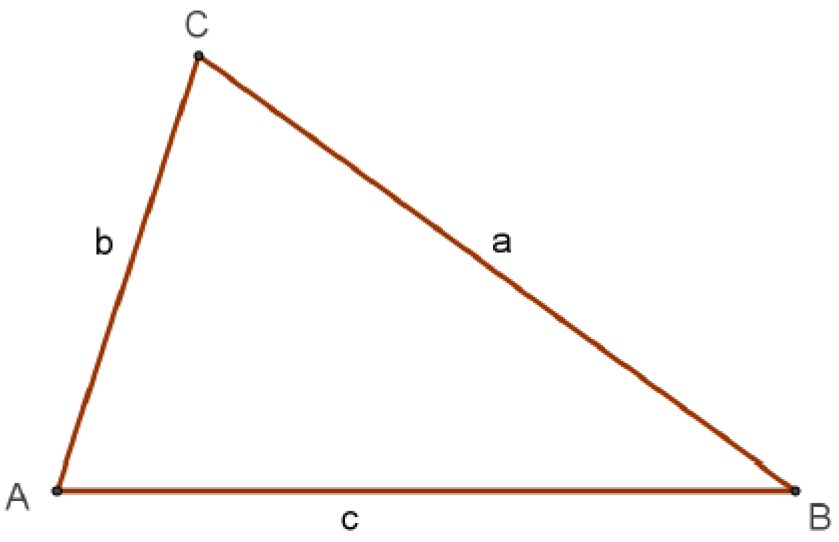


Ipotesi
L'angolo CAB=2CBA

Tesi
a^2=b(b+c)

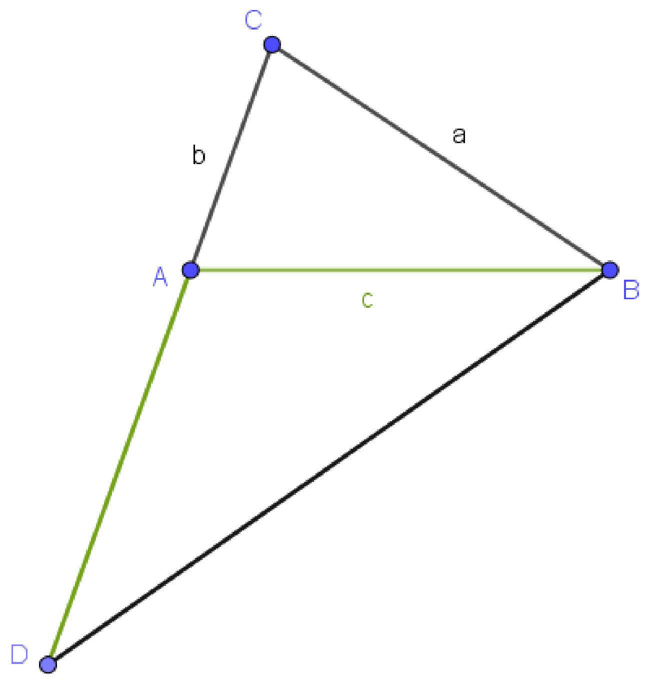
Dimostrazione
L'angolo DAB=180°-2 CBA [chi e' D?] mentre l'angolo ACB=180°-3 CBA, quindi considerando il triangolo DCB gli angoli CDB+CBD+DCB=180° quindi CDB+(ABC+[ABD] [[ADB]])+(180°-3ABC)=180° quindi 2ADB+180°=180° [da qui si dedurrebbe ADB=0° !!!] [[…..]].
I triangoli CBD e ABC sono simili per il 1° criterio avendo gli angoli [ovviamente no] [[CBD=CBA]], CAB=CBD e ACB in comune;
quindi si può impostare la proporzione:
(b+c):a=a:b
a^2=b^2+bc
quindi a^2=b(b+c).
c.v.d.

5) BALDELLI CHIARA, FIFI MIZAR, NARDI PAOLO, CLASSE 2M, LICEO SCIENTIFICO GALEAZZO ALESSI, PERUGIA

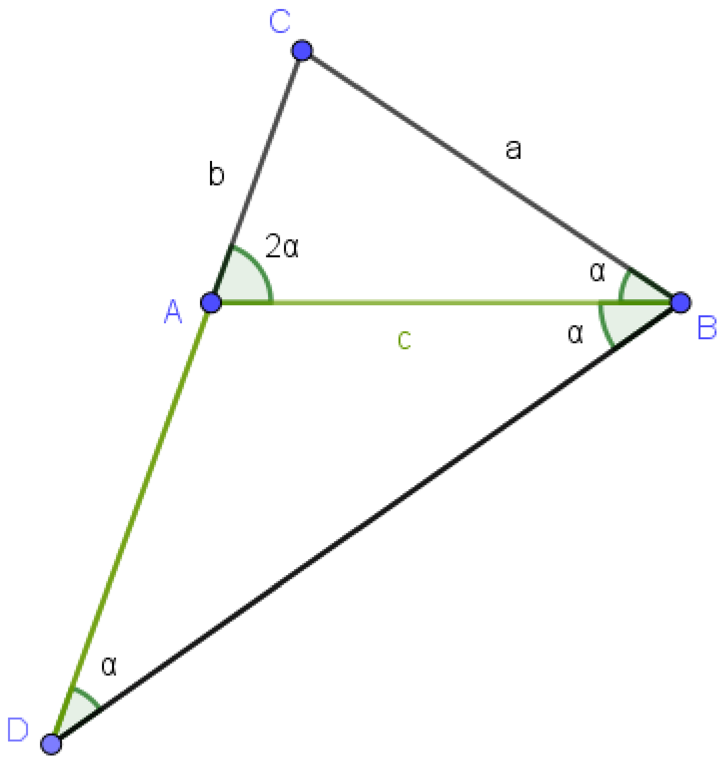


IPOTESI
ABC è un triangolo
B$\hat{A}$C$\cong$ 2 C$\hat{B}$A
$\overline{AB} = c$
$\overline{BC} = a$
$\overline{CA} = b$
TESI
$a^2 = b\,(b + c)$

DIMOSTRAZIONE
Considero il triangolo ABC
B$\hat{A}$C $\cong$ 2 C$\hat{B}$A per ipotesi
Posto C$\hat{B}$A = α sì ha che B$\hat{A}$C = 2 α
Prolungo il lato CA dalla parte di A di un segmento AD ≅ AB. Dopo tale costruzione considero i triangoli ABC e DBC.

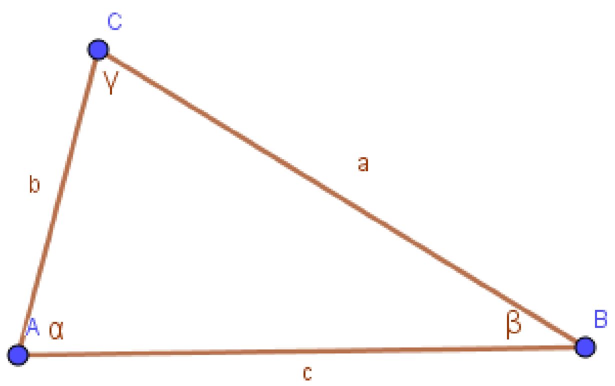


ABD è un triangolo isoscele perché ha due lati congruenti (AB ≅ AD per costruzione). Gli angoli B$\widehat{D}$A e A$\hat{B}$D sono congruenti perché angoli alla base di un triangolo isoscele.
B$\hat{A}$C = B$\widehat{D}$A + A$\hat{B}$D per il secondo teorema dell'angolo esterno di un triangolo. Quindi B$\widehat{D}$A + A$\hat{B}$D = 2 α. Da ciò segue che B$\widehat{D}$A ≅ A$\hat{B}$D = α e C$\hat{B}$D ≅ B$\hat{A}$C= 2 α.



Dalle considerazioni precedenti, applicando il primo criterio di similitudine segue che il triangolo CDB è simile al triangolo CAB.
Ricordando che $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} \cong \overline{AB} = c$ e $\overline{CD} = b + c$, sì ha la proporzione seguente
$\overline{BC} : \overline{CA} = \overline{CD} : \overline{BC}$ da cui:
$a : b = (b + c) : a$ o anche
$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$$
Risolvendo l'equazione rispetto ad a si ottiene che:
$a^2 = b\,(b + c)$

6) Chiara Baldelli classe 2M, Liceo Scientifico Alessi, Perugia



Ipotesi

BÂC=2CBA

$\overline{BC}$=a

$\overline{CA}$=b

$\overline{AB}$=c

Tesi

a^2=b(b+c)

Dimostrazione

Nella seguente dimostrazione ho utilizzato alcuni teoremi di Trigonometria
BÂC+CBA+AĈB=180° per il secondo teorema dell'angolo esterno,
segue che AĈB=180°-BÂC-CBA [l'α della figura non è quello usato nella dimostrazione].
Detto CBA=α si ha che BÂC=2α e AĈB=180°-3α
Sinα ≠0 perché α ≠0° e α ≠180°
Per il teorema dei seni:

$$\frac{a}{sin2\alpha} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{c}{\sin(180-3\alpha)}$$

Applicando le formule di duplicazione e di sottrazione del seno si ottiene:

$$\frac{a}{2\, cos\alpha\, sin\alpha} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{c}{\sin 180° \cos 3\alpha - cos180° sin3\alpha}$$

$$\frac{a}{2\, cos\alpha\, sin\alpha} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{c}{0\cos 3\alpha + sin3\alpha}$$

$$\frac{a}{2\, cos\alpha\, sin\alpha} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{c}{sin3\alpha}$$

$$\frac{a}{2\, cos\alpha\, sin\alpha} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{c}{\sin(2\alpha+\alpha)}$$

Per la formula di addizione del seno:

$$\frac{a}{2\, cos\alpha\, sin\alpha} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{c}{\sin 2\alpha \cos\alpha + cos2\alpha\, sin\alpha}$$

Per le formule di duplicazione del seno e del coseno:

$$\frac{a}{2\, cos\alpha\, sin\alpha} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{c}{2 \cos\alpha \sin\alpha \cos\alpha + (2cos^2\alpha - 1)sin\alpha}$$

$$\frac{a}{2\, cos\alpha\, sin\alpha} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{c}{2 \cos^2\alpha \sin\alpha + 2\, cos^2\alpha\, sin\alpha - sin\alpha}$$

$$\frac{a}{2\ cos\alpha\ sin\alpha} = \frac{b}{sin\alpha} = \frac{c}{4\ \cos^2\alpha\ \sin\alpha - \sin\alpha}$$

$$\frac{a}{2\ cos\alpha} = b = \frac{c}{4\ \cos^2\alpha - 1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2\ cos\alpha} = b \\ b = \dfrac{c}{4\ cos^2\alpha - 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2b} = cos\alpha \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ b = \dfrac{c}{4\ (\frac{a}{2b})^2 - 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ b = \dfrac{c}{\frac{\cancel{4}a^2}{\cancel{4}b^2} - 1} \end{cases}$$

$$b = \frac{c}{\frac{a^2}{b^2} - 1}$$

$$b(\frac{a^2}{b^2} - 1) = c$$

$$\frac{a^2}{b} - b = c$$

$$a^2 - b^2 = bc$$

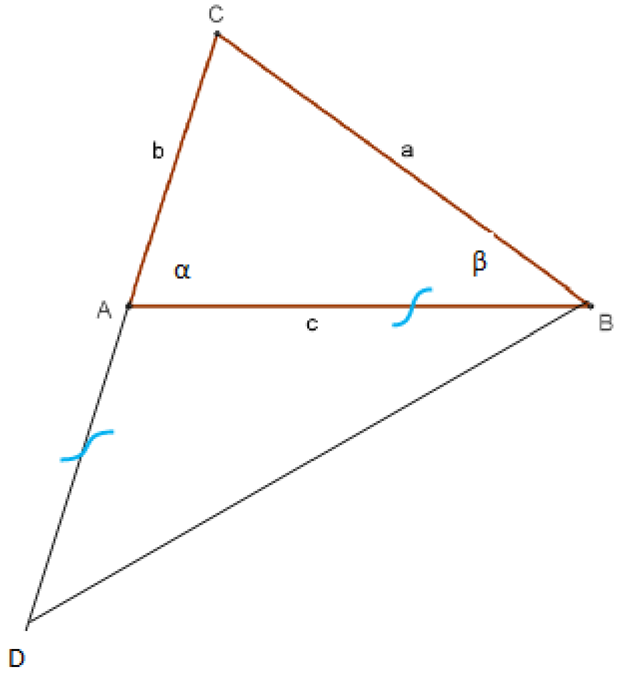
$$a^2 = b^2 + bc$$

$$a^2 = b(b + c)$$

N.B: Nella dimostrazione non sono stati commentati i passaggi algebrici

Nei sistemi all'interno della parentesi graffa il trattino sostituisce l'equazione che rimane invariata

7) Bellemo Gretha, Micoli Mila, Panizzutti Giorgio - 3^C , Liceo Scientifico Giordano Bruno, indirizzo scienze applicate, Mestre (VE)



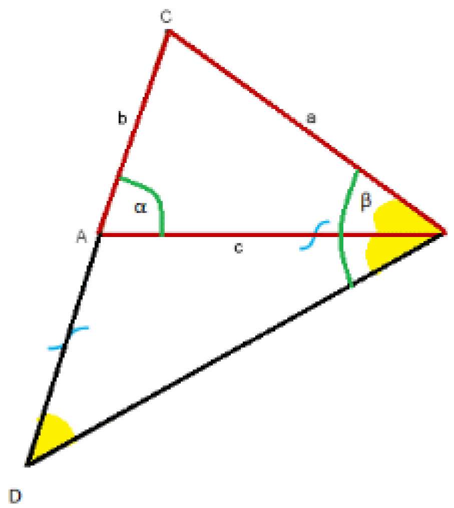
Hp: $\alpha=2\beta$

AB=AD

Th: $a^2 = b(b+c)$

Dim:

Il triangolo ABD è isoscele perché ha AB≅ AD per ipotesi, quindi ha gli angoli ADB e ABD congruenti. L'angolo BAD è congruente a $\pi-\alpha$ perché supplementare all'angolo α, quindi BAD≅$\pi-2\beta$. Ciò implica che ABD≅ADB≅β, quindi CBD≅ CAB perché entrambi congruenti a 2β.



I triangoli ACB e DCB sono simili perché hanno:

- CBD≅ CAB CBA≅ CDB per la dimostrazione precedente

Quindi hanno i lati in proporzione → CA:CB=CB:CD

b:a=a:(b+c)

$a^2= b^2+ bc$

$a^2=b(b+c)$.