FLAT_landia_

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia - Problema 7-21 marzo 2019 - Commento alle soluzioni ricevute

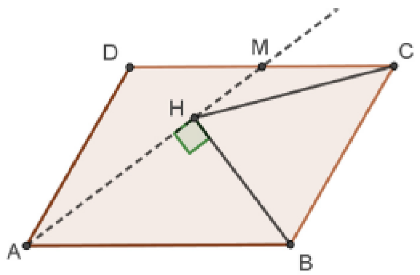
Il testo del problema

Flatlandia - Problema 7 - 21 marzo 2019

ABCD è un parallelogramma, *M* è il punto medio di *CD* e *H* è il piede della perpendicolare condotta da *B* ad *AM*.

a) Dire quando il punto *M* coincide con il punto *H*.
b) Provare che *BCH* è un triangolo isoscele.

Motivare le risposte.



Commento

Sono giunte tre risposte, due da allievi di classe II e un'altra da una classe III di tre licei scientifici. Il problema proponeva un parallelogramma ABCD nel quale veniva tracciato il segmento AM, con M punto medio di CD. Condotta dal vertice B la perpendicolare BH ad AM, si doveva dimostrare che il triangolo BCH risultava isoscele. Era poi chiesto di indagare in quale caso H coincidesse con M.

Le tre risposte arrivate provano in maniera corretta che il triangolo BCH è isoscele, ma due di queste assumono, per rispondere all'altra domanda, che il parallelogramma sia un rettangolo. Ipotesi non presente nel testo.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

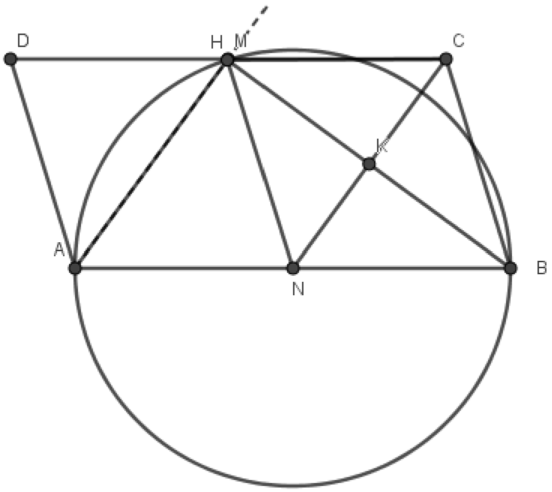
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "Leonardo", Giarre (CT)
- Liceo Scientifico "E. Fermi", Bologna

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

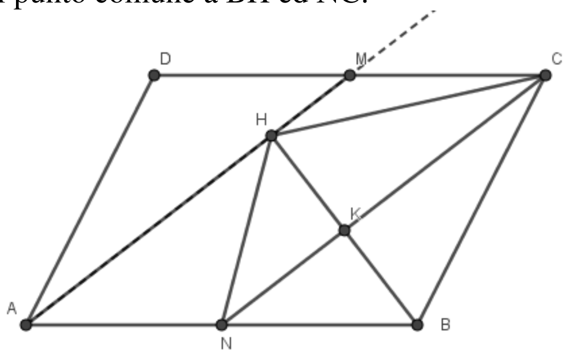
Soluzioni arrivate

1) Soluzione proposta dalla classe 3^ H Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto

a) Se il punto M coincide col punto H, il triangolo ABM è rettangolo in M(o H) e la sua mediana MN è congruente alla metà della sua ipotenusa: MN=AN=NB . Ma MC, essendo la metà di CD=AB, è congruente ad NB e ad MN e perciò il quadrilatero NBCM è un parallelogramma che, avendo i quattro lati congruenti (e le diagonali perpendicolari) è un rombo . Possiamo perciò affermare che il punto M coincide col punto H quando le dimensioni del parallelogramma sono una doppia dell'altra.



b) Consideriamo il punto medio N del lato AB del parallelogramma ABCD e congiungiamo C con N. Il quadrilatero AMCN è un parallelogramma perché CM è parallelo ad [AN] [[AM]] ed è anche CM congruente ad AN poiché CD è congruente ad AB e le metà di segmenti congruenti sono congruenti. Osserviamo inoltre che il segmento BH, che è perpendicolare ad AM , sarà anche perpendicolare ad NC essendo AM ed NC paralleli in quanto lati opposti del parallelogramma AMCN. Indichiamo con K il punto comune a BH ed NC.



Nel triangolo rettangolo ABH, la mediana HN relativa all'ipotenusa AB è congruente alla metà della stessa ipotenusa per cui sarà HN congruente ad AN e anche ad NB. Di conseguenza il triangolo BHN è isoscele sulla base HB e siccome la sua altezza NK è anche mediana sulla base HB, sarà HK congruente a KB. Il triangolo BCH è allora un triangolo isoscele perché CK è asse del segmento HB e quindi CH è congruente a CB.

2) Soluzione proposta da Samuele Cannavò e Lorenzo Intelisano, classe 2^ sez. A del Liceo scientifico "Leonardo" di Giarre (CT)

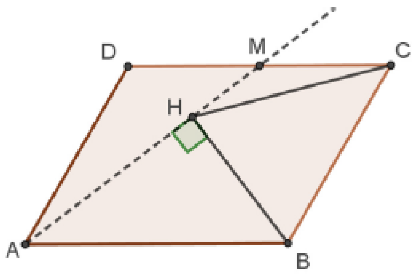
Flatlandia - Problema 7 - 21 marzo 2019

ABCD è un parallelogramma, *M* è il punto medio di *CD* e *H* è il piede della perpendicolare condotta da *B* ad *AM*.

a) Dire quando il punto *M* coincide con il punto *H*.

b) Provare che *BCH* è un triangolo isoscele.

Motivare le risposte.



a) [[…]]

Se il parallelogramma ABCD è un rettangolo nel quale AB è il doppio di BC allora si dimostra, come è stato fatto, che H coincide con M, ma il punto di partenza del ragionamento deve essere un altro: se H coincide con M cosa possiamo dire del parallelogramma ABCD? Infatti si dimostra che questo implica che il parallelogramma ha la base AB doppia del lato BC, senza per questo essere un rettangolo.

Ipotesi

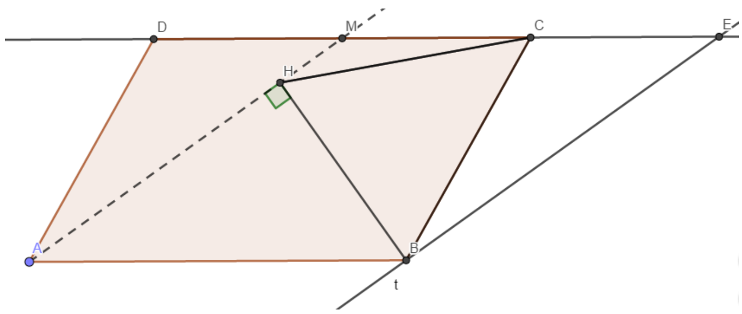
ABCD è un parallelogramma, M è il punto medio di CD e H è il piede della perpendicolare condotta da B ad AM

Tesi

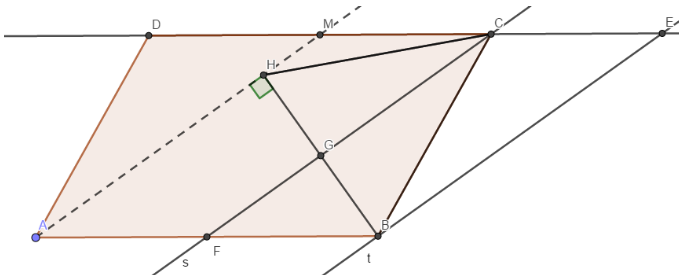
BCH è un triangolo isoscele.

Dimostrazione

Sia t la retta passante per B e parallela alla retta passante per AM, sia E il punto di intersezione tra la retta t



e il prolungamento della retta passante per DC. Si osserva che i triangoli DMA e CBE sono congruenti per il secondo criterio di congruenza in quanto il lato AD è congruente al lato BC perché ABCD è un parallelogramma per ipotesi, e gli angoli $D\hat{M}A$ e $C\hat{E}B$ sono congruenti perché corrispondenti di rette parallele tagliate da una trasversale e $D\hat{A}M$ e $C\hat{B}E$ sono congruenti perché angoli con lati paralleli [e concordi].



Si tracci la retta s passante per C e parallela a t. Sia F l'intersezione tra la retta s e il lato AB. Il quadrilatero FBEC è un parallelogramma perché ha i lati a due a due paralleli, quindi CE è congruente a FB, ma essendo anche congruente a DM si dimostra che anche F è punto medio di AB.
Osservando il triangolo AHB, la retta s passante per F e parallela al lato AH intersecherà il lato HB nel suo punto medio G per il teorema di Talete. Essendo CG perpendicolare alla base BH [(poiché CG parallelo ad AM e AM perpendicolare a BH)] sarà, oltre che altezza, anche mediana e da ciò scaturisce che il triangolo HCB è isoscele [sulla base BH].

3) Soluzione proposta da Marco Fiorani Borraccino, 2^F Liceo Scientifico "E.Fermi" Bologna

Ipotesi:

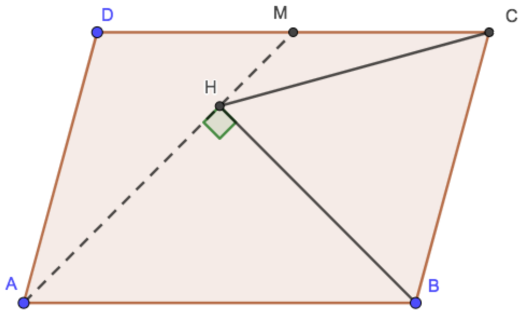
ABCD è un parallelogramma

M è il punto medio di CD.

Tesi:

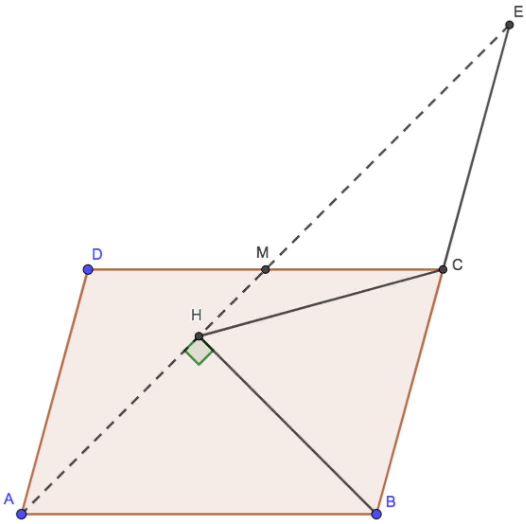
BCH è isoscele

"Dire quando M coincide con il punto H"



Dimostrazione tesi [2] [[1]]:

Si prolunga il segmento AM dalla parte di M e BC dalla parte di C, il loro punto di intersezione si chiamerà E.



Considero i triangoli ADM e MCE, essi hanno:
aDm congruente a mCe perché alterni interni delle rette parallele AD e CE tagliate dalla trasversale CD;

DM congruente a MC per ipotesi dato che M è [punto] medio [di DC];

dMa è congruente a eMc perché angoli opposti al vertice;

Per il secondo criterio di congruenza: ADM è congruente a MCE, ciò implica che AD=CE e dato che AD=BC perché i lati opposti in un parallelogramma (ABCD) sono congruenti: per proprietà transitiva CE=BC, perciò C è medio di BE.

Per ipotesi BH è perpendicolare ad AH per cui bHe è retto e ciò implica che BHE è un triangolo rettangolo in H. Considerando BHE, C è il punto medio dell'ipotenusa perciò CH è la mediana relativa all'ipotenusa. Per il teorema della mediana relativa all'ipotenusa, essa è congruente a metà dell'ipotenusa stessa, perciò CH=BC. Da ciò consegue che il triangolo BCH è isoscele.

Dimostrazione tesi [1] [[2]]:

Se il parallelogramma ABCD è un rettangolo nel quale AB è il doppio di BC allora si dimostra, come è stato fatto, che H coincide con M, ma il punto di partenza del ragionamento deve essere un altro: se H coincide con M cosa possiamo dire del parallelogramma ABCD? Infatti si dimostra che questo implica che il parallelogramma ha la base AB doppia del lato BC, senza per questo essere un rettangolo.