FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia - Problema 11 - 25 gennaio 2019 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema
È dato un triangolo acutangolo isoscele *ABC* di base *AB*.

a) Costruire, con riga e compasso, un punto *P* interno al triangolo, ma non appartenente all'altezza relativa alla base *AB*, in modo che l'angolo $A\hat{P}B$ sia il doppio dell'angolo in *C*.

b) Prolungare il segmento *AP* fino a incontrare la circonferenza circoscritta al triangolo *ABC* nel punto *D*. Provare che il triangolo *BDP* è isoscele.

Motivare le risposte.

Commento
Sono giunte 14 risposte da classi II di liceo scientifico e da una classe terza.
Il problema chiedeva di costruire, dato un triangolo acutangolo isoscele, un angolo "interno" al triangolo stesso che fosse doppio del suo angolo al vertice. Considerata poi la circonferenza circoscritta al triangolo si doveva provare che risultava isoscele un particolare triangolo.

Le risposte arrivate sono in gran parte corrette e ben motivate, anche se in alcune è risolta solo la seconda parte del problema.
Una delle risposte arrivate è in PDF e manca l'indicazione della classe, quindi non è stata presa in considerazione.

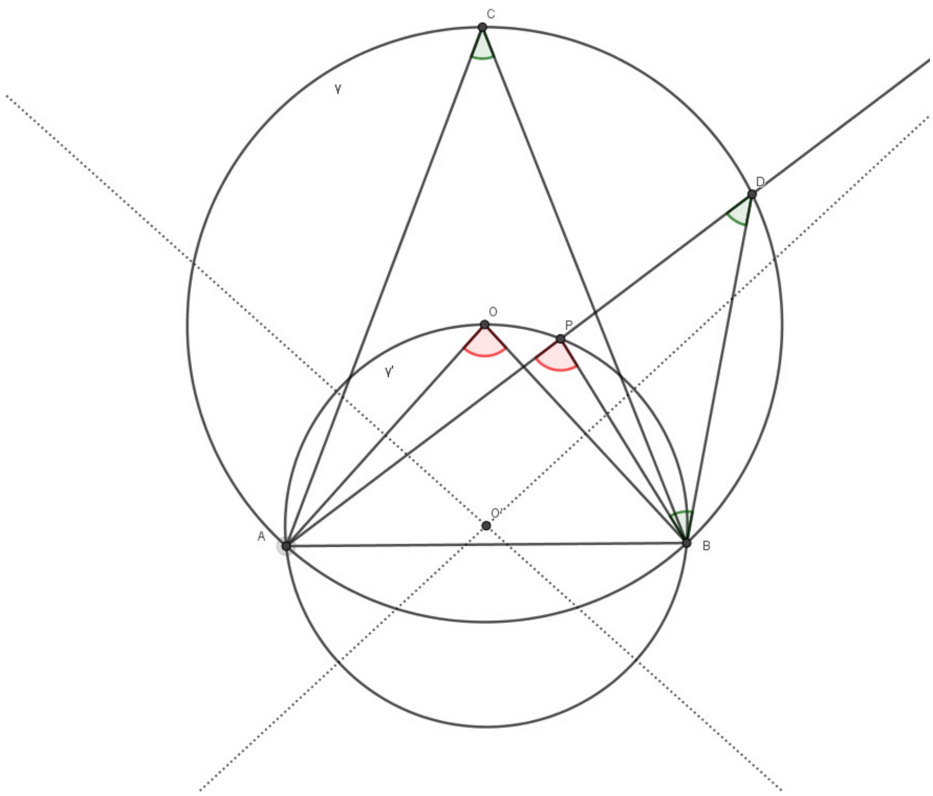
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "Giordano Bruno", Mestre-Venezia
- Liceo Scientifico "E. Fermi", Bologna
- Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)
- Liceo Scientifico Statale "C. Cafiero", Barletta (BT)
- Liceo Scientifico Istituto "Arimondi-Eula", Savigliano (CN)
- Liceo Scientifico "G. Alessi", Perugia

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

1) Soluzione proposta dalla classe 2^ H Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto

a) Costruiamo il triangolo isoscele ABC e la circonferenza γ ad esso circoscritta. Il suo centro O è ottenuto attraverso l'intersezione di due degli assi dei lati del triangolo. L'angolo AOB ha ampiezza doppia dell'angolo ACB in quanto angolo al centro che insiste sullo stesso arco AB di γ . Per determinare il punto P interno al triangolo in modo che l'angolo APB sia il doppio dell'angolo ACB dobbiamo tracciare la circonferenza γ' passante per i tre punti A, O e B, ovvero la circonferenza circoscritta al triangolo ABO . Per fare ciò tracciamo gli assi dei lati OA e OB individuando il suo centro O'. Siccome tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco sono congruenti, se tracciamo dal punto A una qualunque semiretta che intersechi l'arco AOB il suo punto di intersezione P con l'arco sarà vertice di un angolo di ampiezza uguale a quella di AOB e quindi doppia di quella dell'angolo ACB .



b) La semiretta che ha individuato il punto P incontra la circonferenza γ nel punto D e poiché l'angolo ADB insiste sull'arco AB della circonferenza γ esso è congruente all'angolo ACB. Osservato poi che l'angolo APB è esterno al triangolo BDP e quindi è uguale alla somma degli angoli interni non ad esso adiacenti e che:
APB = 2PDB , sarà : DBP = APB-PDB= 2PDB-PDB=PDB. CVD

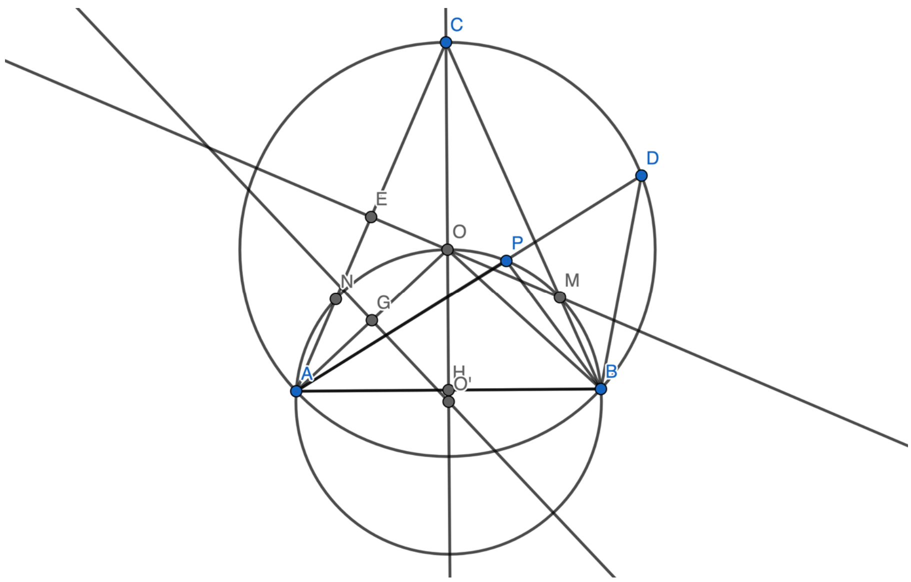
2) Soluzione proposta da Francesco Graziani, 2^G, Liceo Scientifico Statale Enrico Fermi, Bologna

COSTRUZIONE DEL DISEGNO:

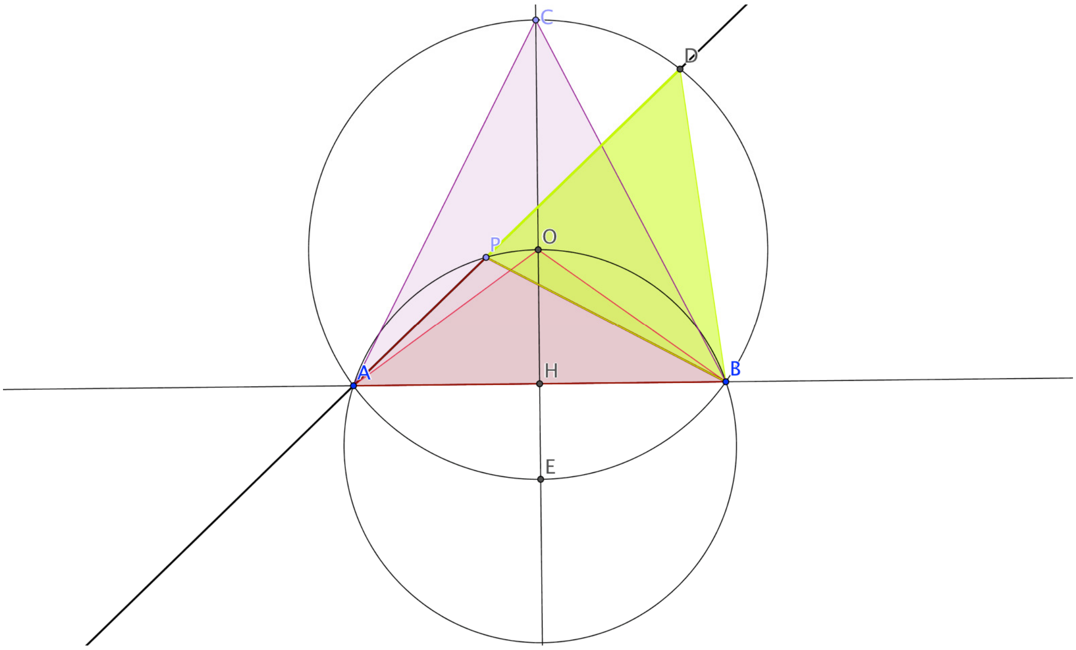
- SI tracci un segmento AB
- Si punti il compasso in A con apertura maggiore di AB e si tracci un arco di circonferenza, congruente circa a un quarto di circonferenza.
- Si ripeta lo stesso procedimento sull'estremo B, e si chiami C il punto d'intersezione fra i due archi.
- Si congiungano i punti A, B, C ottenendo così il triangolo isoscele ABC.
- Tracciando gli assi di ABC si individui il circocentro del triangolo e si descriva la circonferenza circoscritta *C,* di cento O.
- Si considerino i raggi AO e BO, e si traccino gli assi del triangolo AOB per individuarne il circocentro e tracciarne la circonferenza circoscritta *C'*, che interseca i lati AC e CB rispettivamente nei punti N e M.
- Rispetto alla circonferenza *C,* gli angoli [[ABC]] [ACB] e AOB [insistono sullo stesso arco] [[sono corrispondenti]], quindi AOB=2ACB, per la proprietà di angoli al centro e alla circonferenza corrispondenti.
- Il luogo geometrico dei punti che vedono un segmento sotto un determinato angolo, è l'arco della circonferenza [quale ?] che ha il segmento come corda. Quindi tutti i punti che vedono il segmento AB sotto l'angolo AOB [all'arco AB della circonferenza C' su cui sta il punto O] [[appartengono agli archi AB (maggiori)]] .
- Quindi, comunque preso un punto P appartenente [a tale arco] [[all'arco AB (maggiore)]], esso vede il segmento AB sotto [un angolo di ampiezza pari ad] [[l'angolo]] AOB. Quindi AOB è congruente a APB per deduzione precedente e, per proprietà transitiva, APB=2ACB
- Ma P deve essere interno al triangolo ABC, perciò tale punto appartiene all'arco MN [di C' su cui si trova O] [[(minore)]], con P diverso da O, M e N.

b) [[…]]

DISEGNO:



3) Soluzione proposta da Zalla Elena, Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN), classe 2D



Ipotesi:

a) ABC è isoscele

b) $\widehat{APB}$ = 2$\widehat{ACB}$

Tesi:

BDP è isoscele

a)

Tracciare l'altezza relativa alla base AB e scegliere un punto appartenente a tale segmento (nella figura sopra O) [O e' il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC], $\widehat{AOB}$ = 2$\widehat{ACB}$ perché angolo al centro che sottende lo stesso arco AB. Costruire poi la circonferenza passante per A, O e B. Per trovare P si deve scegliere un punto [sulla] [[componente la]] nuova circonferenza e interno al triangolo.

$\widehat{APB} \cong \widehat{AOB}$ perché angoli che sottendono lo stesso arco AB nel cerchio di centro E perciò $\widehat{APB}$ = 2$\widehat{ACB}$.

b)

$\widehat{DPB}$ = 180°- $\widehat{APB}$ = 180°- 2$\widehat{ACB}$ quindi $\widehat{PDB}$ + $\widehat{PBD}$ = 180° - $\widehat{DPB}$ = 2$\widehat{ACB}$.

$\widehat{ADB} \cong \widehat{ACB}$ perché sottendono lo stesso arco [di quale circonferenza ?]. D, P e A sono allineati per ipotesi in quanto PD è prolungamento di AP quindi $\widehat{ADB}$ è lo stesso angolo di $\widehat{PDB}$, perciò $\widehat{PBD}$ = 2$\widehat{ACB}$-$\widehat{PDB}$ = 2$\widehat{ACB}$-$\widehat{ACB}$ = $\widehat{ACB}$.

Pertanto $\widehat{ACB} \cong \widehat{PDB} \cong \widehat{PBD}$.

BDP ha gli angoli alla base ≅ ed è quindi isoscele, come volevasi dimostrare.

4) Soluzione proposta da Gianpaolo Gioieni 2B Liceo Scientifico Statale C. Cafiero Barletta

a) [[…]]

[b) Supponiamo di avere costruito P con APB=2ACB e quindi APB=2ADB.]: $\widehat{ACB} \wedge \widehat{ADB}$ insistono su AB arco x costruzione

⇓ x. corollario teorema angoli alla circonferenza

$\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}$

$\widehat{APB} \cong 2\,\widehat{ADB}$ x ipotesi $2\widehat{ADB} \cong \widehat{ADB}+\widehat{PBD}$ x teorema angolo esterno

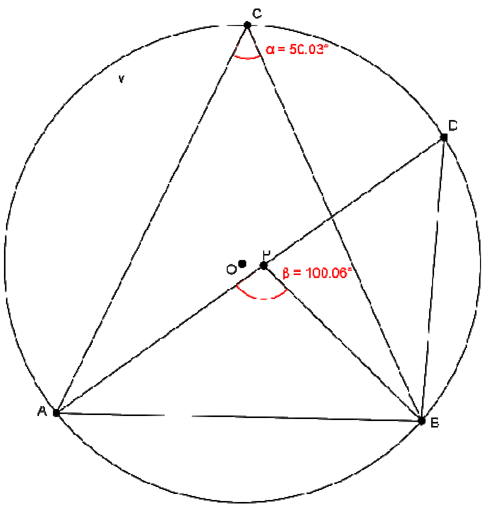
⇓

$\widehat{PBD} \cong \widehat{ADB}$

⇓ x definizione

BPD triangolo isoscele

5) Soluzione proposta da Mariano Lorusso 2B Liceo Scientifico Statale C. Cafiero Barletta



Dim: $\widehat{ACB} \wedge \widehat{ADB}$ alla circonferenza insistono su AB arco x. costruzione

⇓ x. corollario teorema angoli alla circonferenza

$\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}$

$\widehat{APB} \cong 2\,\widehat{ADB}$ x. ipotesi

$2\widehat{ADB} \cong \widehat{ADB}+\widehat{PBD}$ x. teorema angolo esterno

⇓

$\widehat{PBD} \cong \widehat{ADB}$

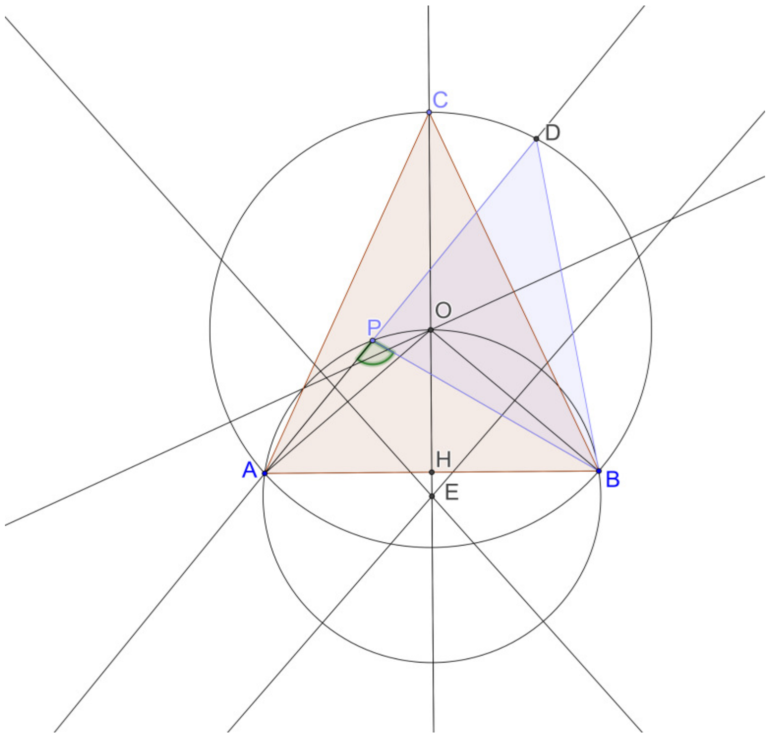
⇓ x. definizione

BPD triangolo isoscele

c.v.d.

Nota: le risposte 4 e 5 sono della stessa scuola, stessa classe e sono praticamente identiche, quasi parola per parola… Era preferibile mandare una sola soluzione.

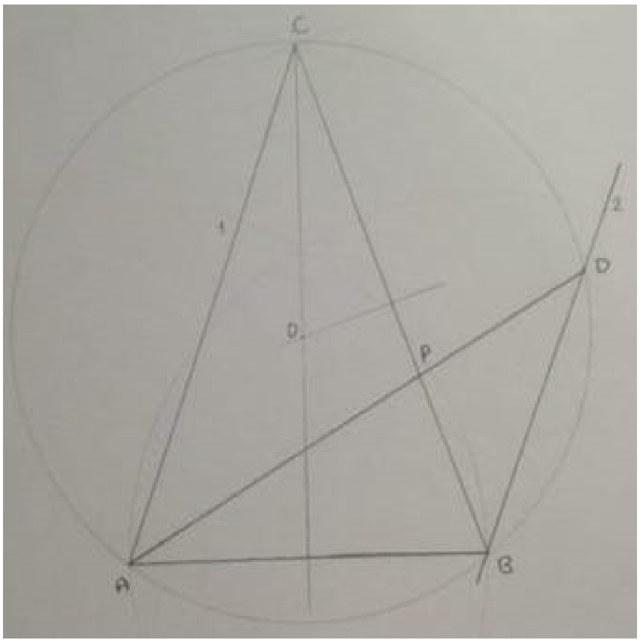
6) Soluzione proposta da Massimiliano-Bergamo-2^D-liceo Bertrand Russell-Cles (TN)



1)
IP: ABC è un triangolo isoscele acutangolo
TS: APB ≅ 2ACB
DIM: Traccio l'asse del segmento AB e l'asse del segmento BC, l'intersezione dei due assi è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC. L'angolo alla circonferenza ACB sottende l'arco AB, anche l'angolo al centro AOB sottende lo stesso segmento, di conseguenza AOB ≅ 2ACB. Traccio l'asse del segmento OB, l'intersezione di quest'asse con l'asse di AB corrisponde al centro della circonferenza circoscritta al triangolo AOB. Prendo un punto casuale sulla circonferenza circoscritta al triangolo AOB interno al triangolo ABC, l'angolo APB è congruente all'angolo AOB perché sottendono lo stesso arco, quindi essendo gli angoli APB ≅ AOB ed essendo gli angoli AOB ≅ 2ACB allora anche gli angoli APB ≅ 2ACB.
2)
IP: APB ≅ 2ACB
TS: BDP è isoscele
DIM: L'angolo PDB è congruente all'angolo ACB perché entrambi sono angoli alla circonferenza che sottendono l'arco AB, posta la misura dell'angolo ACB come α allora anche l'angolo PDB misura α mentre l'angolo APB misura 2α, quindi l'angolo BPD misura $180°-2\alpha$. L'angolo DBP misura $180°$ - PDB – BPD = $180°- \alpha - (180° - 2\alpha)=\alpha$, quindi il triangolo BDP è isoscele perché ha gli angoli alla base DBP e PDB congruenti (entrambi misurano α).

7) Soluzione proposta da MARCO FIORANI BORRACCINO, CLASSE 2^F, LICEO SCIENTIFICO E. FERMI BOLOGNA (BO)

FLATLANDIA GENNAIO 2019



IPOTESI:	TESI:
ABC è isoscele / acutangolo	angolo APB = 2 ACB
Crf, centro O	BDP è isoscele
$A, B, C \in Crf$	
$P \in ABC$	
$P \notin altezzadiAB$	
$D = rettaAP \cap Crf$	
(Costruzione con riga e compasso)	

[Ricordare che P deve essere interno al triangolo]

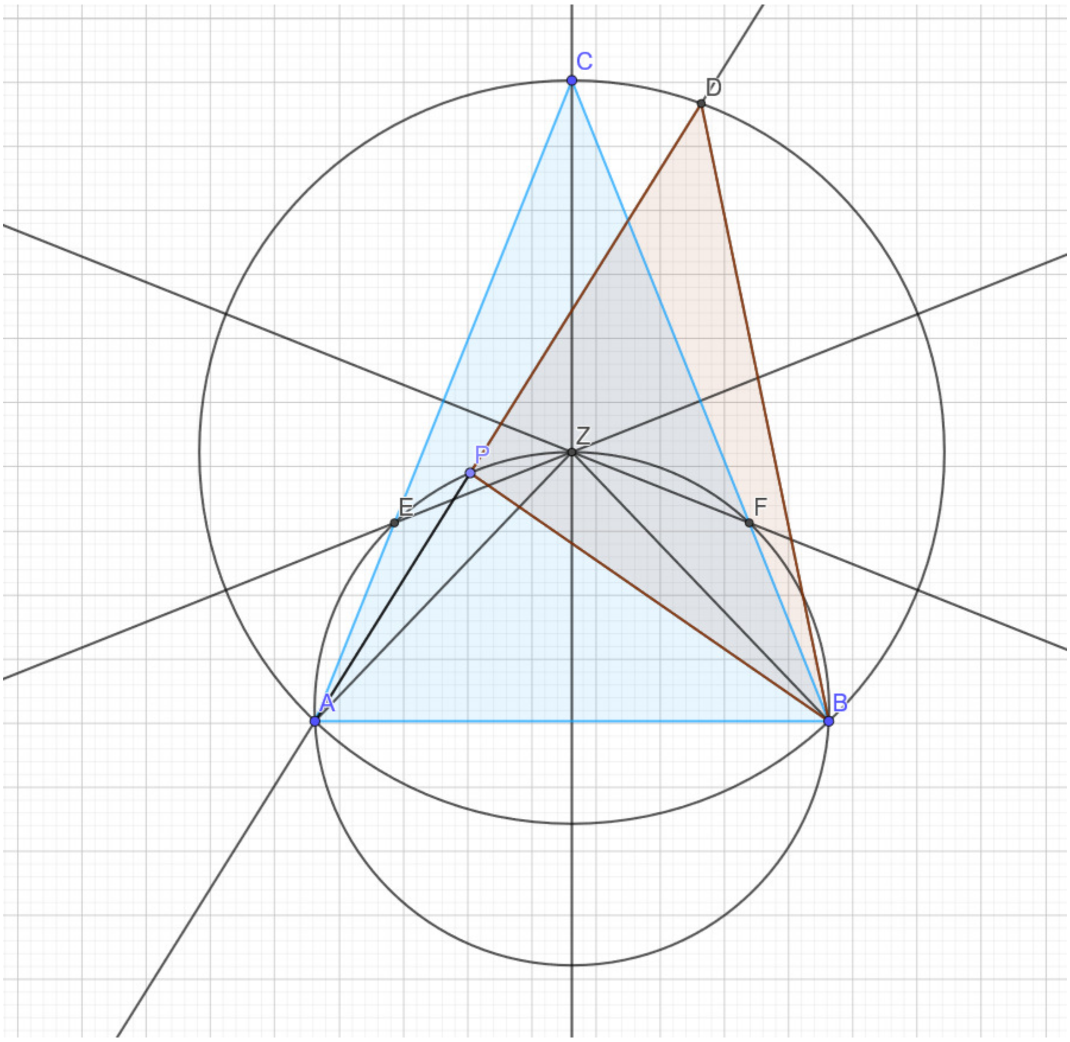
[[…]] Bisogna trovare prima il punto P e di conseguenza poi il punto D. Interno al triangolo non vuol dire sul bordo del triangolo.

8) Soluzione proposta da Panizzutti Giorgio - 3^C , Liceo Scientifico Giordano Bruno, indirizzo scienze applicate, Mestre (VE)

Hp:AC≅CB

APB≅2ACB

Th:BDP isoscele



a)Per ottenere un punto P tale che APB≅2ACB troviamo il circocentro Z del triangolo, tracciando i tre assi dei lati del triangolo ABC.

Il circocentro è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo, tracciamo tale circonferenza, osservando che AZB≅2ACB, poiché angoli al centro e alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB.

Il punto P deve essere esterno all'altezza relativa alla base AB, la quale coincide con l'asse del segmanto AB, quindi dobbiamo trovare un punto P≠Z per cui APB≅AZB, quindi tracciamo l'unica circonferenza passante per i tre punti A, Z e B (con riga e compasso è sufficiente tracciare gli assi dei segmenti AZ e BZ e disegnare una circonferenza con centro nell'intersezione di essi)

Quindi osserviamo che tutti i punti di tale circonferenza interni al triangolo (arco EF), saranno possibili punti P che formano angoli APB congruenti, in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB

b) ACB≅ADB perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB

APB≅2ACB come dimostrato precedentemente

quindi APB≅2ADB

quindi DPB≅π-2PDB perché angoli supplementari

PBD≅ π-(DPB+PDB) poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è conguente a π

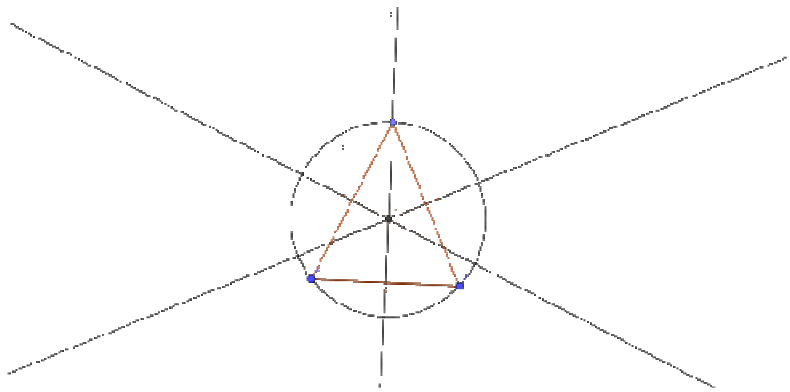
quindi PBD≅ π- (π-2ADB + PDB) → PBD ≅ PDB

quindi il triangolo PBD è isoscele

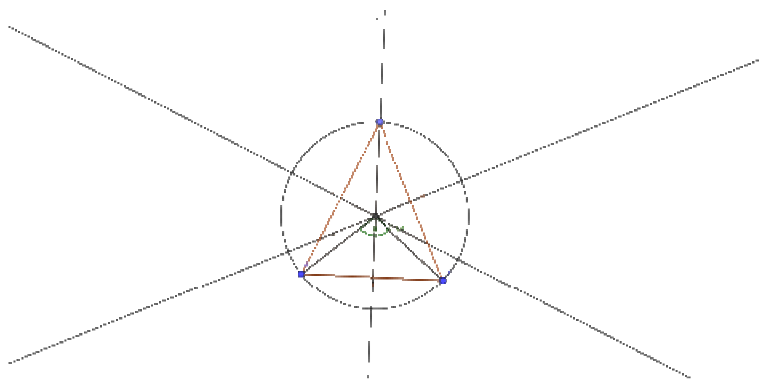
9) Soluzione proposta da Ferlemann Sara, Classe 2^B Liceo Scientifico Istituto Arimondi-Eula, Savigliano (CN)

Ipotesi ABC è un triangolo isoscele
$\overline{AB} \equiv \overline{BC}$
Tesi: **a)** costruisco con riga e compasso un punto P interno al triangolo, ma non appartenente l''altezza relativa alla base AB, in modo che l'angolo APB sia il doppio dell'angolo in C;
b) prolungare il segmento AP fino ad incontrare la circonferenza circoscritta al triangolo ABC nel punto D. Provare che il triangolo BDP è isoscele.

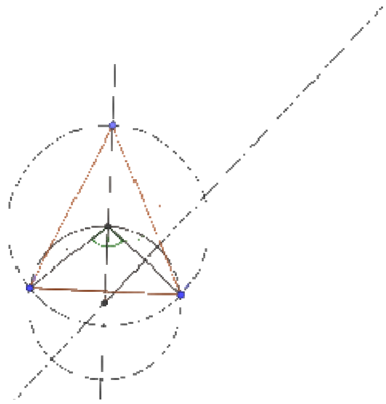
Dimostrazione: [Le lettere sono invisibili; non si sa usare GeoGebra!!!]
a)
Costruzione: traccio gli assi del triangolo ABC. Questi si incontrano in un punto$O$ e individuano il circocentro di ABC.Traccio la circonferenza circoscritta al triangolo e considero l'angolo$A\hat{O}B$. Questo corrisponde all'angolo alla circonferenza $A\hat{C}B$che insiste sull'arco AB quindi$A\hat{O}B \cong 2A\hat{C}B$.



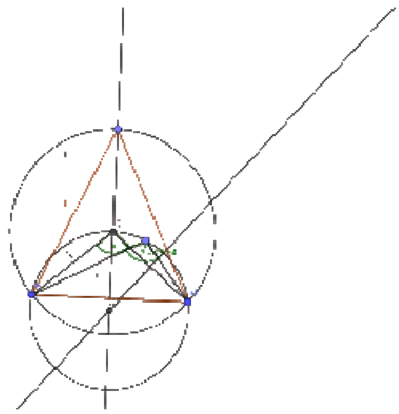
Il centro della circonferenza appartiene all'altezza del triangolo perché, essendo un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base appartiene all'asse della base stessa, perciò O non può essere il punto P cercato.



Individuo il circocentro del triangolo AOB e la circonferenza di centro O' passante per A, O e B.



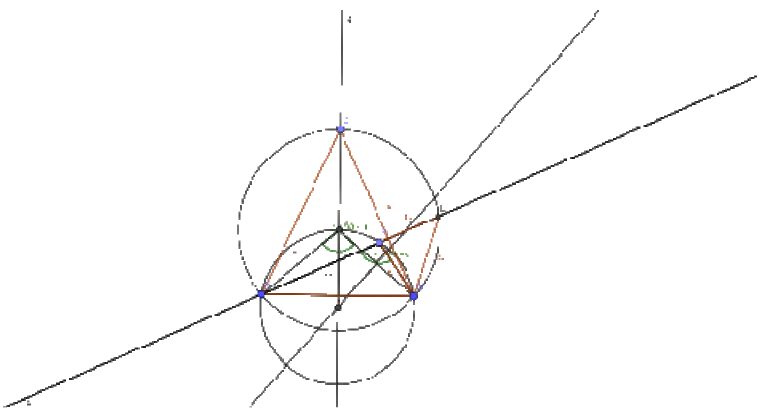
Sia P un punto qualsiasi distinto da O e che appartiene all'arco interno al triangolo ABC della circonferenza di centro O',poiché $A\hat{P}B$ insiste sull'arco AB avrò $A\hat{P}B \equiv A\hat{O}B \equiv 2A\hat{C}B$.



b)

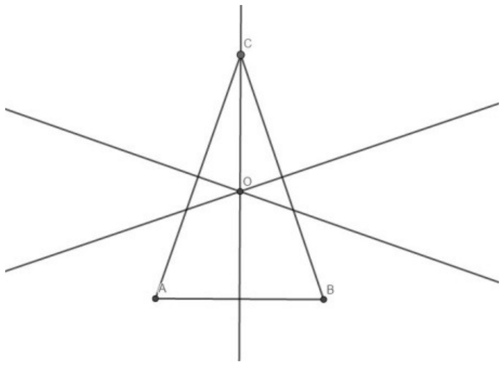
Sia D il punto in cui il prolungamento di AP incontra la circonferenza di centro O. Considero il triangolo DBP. Esso ha $P\hat{D}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = \frac{1}{2}A\hat{P}B$ per quanto dimostrato precedentemente inoltre , per il teorema dell'angolo esterno, $A\hat{P}B \equiv \frac{1}{2}A\hat{P}B + D\hat{B}P \Rightarrow A\hat{P}B \equiv \frac{1}{2}A\hat{P}B + \frac{1}{2}\ D\hat{B}P \Rightarrow A\hat{P}B - \frac{1}{2}A\hat{P}B \equiv D\hat{B}P \Rightarrow \frac{1}{2}A\hat{P}B \equiv D\hat{B}P \equiv P\hat{D}B$

[la prima implicazione va tolta perché evidentemente errata], quindi il triangolo PBD ha $D\hat{B}P \equiv P\hat{D}B$ ed è isoscele poiché avere [due] [[gli]] angoli [[alla base]] congruenti è una condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia isoscele. C.D.D.

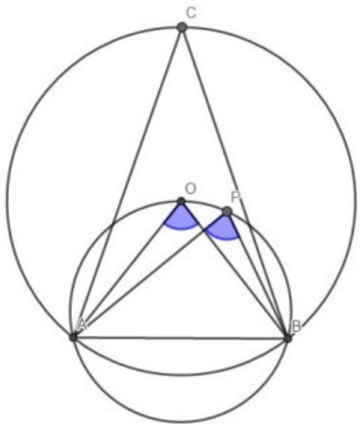


10) Soluzione proposta da Bozzato Pietro, Bacciolo Beatrice, Baldan Gianluca e Todesco Carlotta della classe 2A del Liceo Scientifico Bruno-Franchetti di Venezia

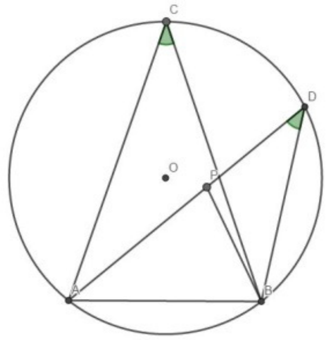
Per prima cosa è necessario tracciare gli assi dei lati del triangolo ABC.
Si prenda il compasso con apertura a piacere e lo si punti in A, da lì si traccino due archi, uno sopra e uno sotto il segmento AB, ora si ripeta il procedimento puntando il compasso in B senza cambiarne l'apertura. Fatto ciò si tracci la retta passante per i due punti di intersezione tra gli archi per ottenere l'asse. Analogamente si traccino gli assi di BC e AC; il loro punto di incontro O sarà il centro della circonferenza circoscritta ad ABC.



Nella circonferenza di centro O, ACB è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AB, e AOB è un angolo al centro che insiste sullo stesso arco, da ciò AOB≅2ACB. Si disegni ora la circonferenza passante per i tre punti A, O e B, in cui AOB è un angolo alla circonferenza, e si scelga un punto P diverso da O lungo l'arco di circonferenza compreso tra lati del triangolo ABC.
Quindi AOB≅APB perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB, e per la proprietà transitiva APB≅2ACB.

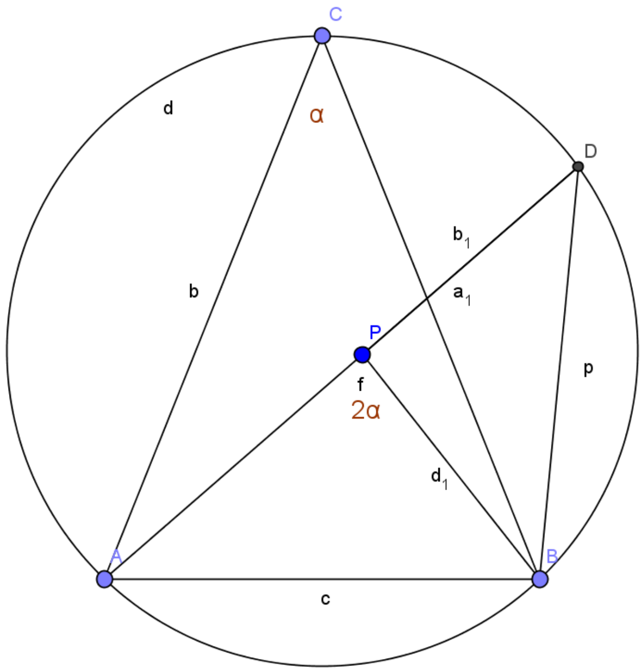


A questo punto si prolunghi il segmento AP fino alla circonferenza di centro O e si chiami D il punto di intersezione.
L'angolo ADP è congruente all'angolo ACB perché insistono sullo stesso arco AB, e quindi per la proprietà transitiva 2PDB≅APB.



APB+BPD≅π perché angoli supplementari, quindi BPD≅π-APB, da cui BPD≅π-2PDB.
BPD+PDB+DBP≅π perché somma degli angoli interni di BPD, che è un triangolo.
Sostituendo i dati si ha:
π-2PDB+PDB+DBP≅π
-2PDB+PDB+DBP≅π-π
-PDB+DBP≅0
DBP≅PDB
[Dalla relazione ottenuta] [[Dall equazione]] si ricava che il triangolo BPD ha gli angoli alla base congruenti (DBP≅PDB). Quindi è isoscele.

11) Soluzione proposta da PIERLUIGI LACERENZA 2^A LICEO SCIENTIFICO "CARLO CAFIERO", BARLETTA



IPOTESI

AC = CB

$\widehat{APB} = 2\ \widehat{ACB}$

TESI

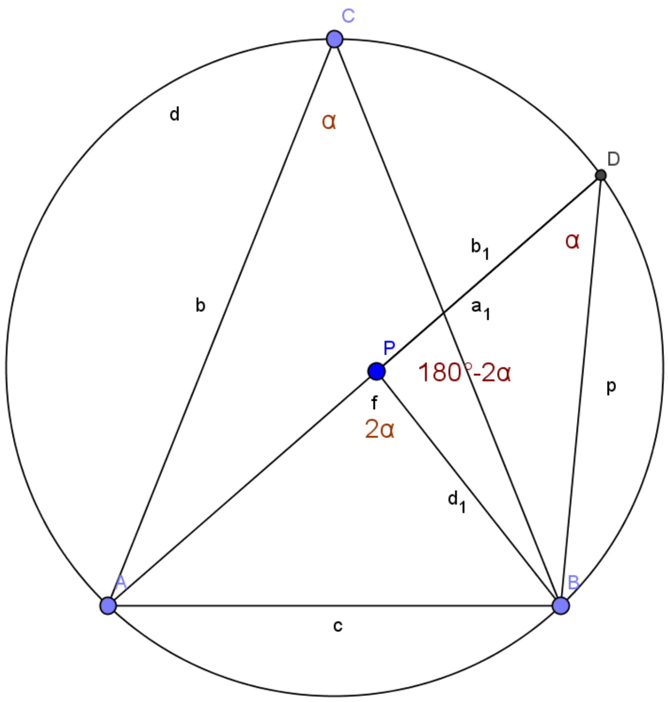
PBD ISOSCELE

SVOLGIMENTO

a) [[…]]

b) $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (Due angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco)

$\widehat{BPD} = 180° - 2α$

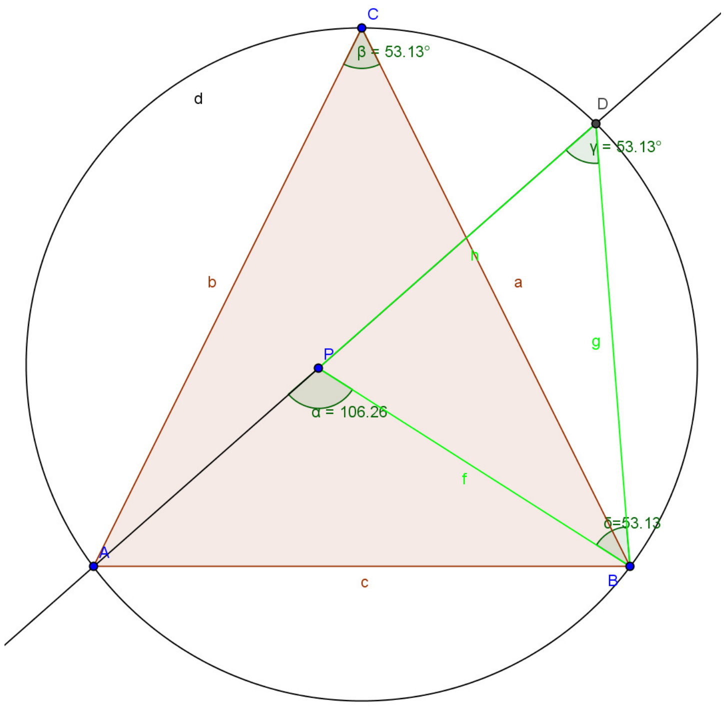


Consideriamo il triangolo PBD:

$\widehat{PBD} = 180° - \widehat{BPD} - \widehat{PDB} = \alpha \quad (180°-180°+2\alpha-\alpha)$

$\widehat{PBD} = \widehat{PDB}$

Pertanto il triangolo PBD ha gli angoli alla base congruenti e quindi è isoscele.



12) Soluzione proposta da PAOLO BORGIA – CLASSE 2 B – LICEO SCIENTIFICO CARLO CAFIERO – BARLETTA (BT)

Ipotesi

ABC triangolo isoscele

$A\hat{P}B \cong 2\, A\hat{C}B$

Tesi

BPD triangolo isoscele

a) [[…]]

b) Dim:

$\gamma \cong \beta$	perché insistono sullo stesso arco
$\alpha \cong 2\beta$	per ipotesi
$\Downarrow$	per proprietà transitiva
$\alpha \cong 2\gamma$	
$\alpha \cong \gamma + \delta$	per teorema angolo esterno
$\Downarrow$	
$\delta \cong \gamma$	
$\Downarrow$	per teorema
BPD triangolo isoscele	

13) Soluzione proposta da Gianmarco Dibitonto-Liceo Carlo Cafiero-Barletta Classe????????? Sezione?????????

Ipotesi: ABC triangolo isoscele

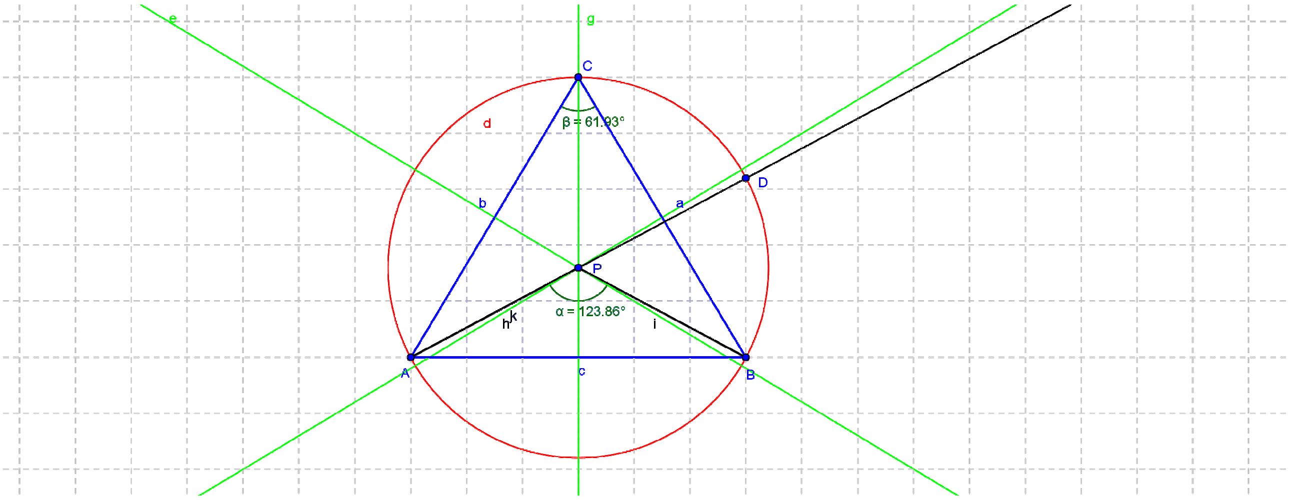
AC ≅ BC

P ∈ ABC triangolo / APB angolo ≅ 2C angolo

P ∉ altezza [relativa ad] [[di]] AB

AD ∩ γ (circonferenza) = D

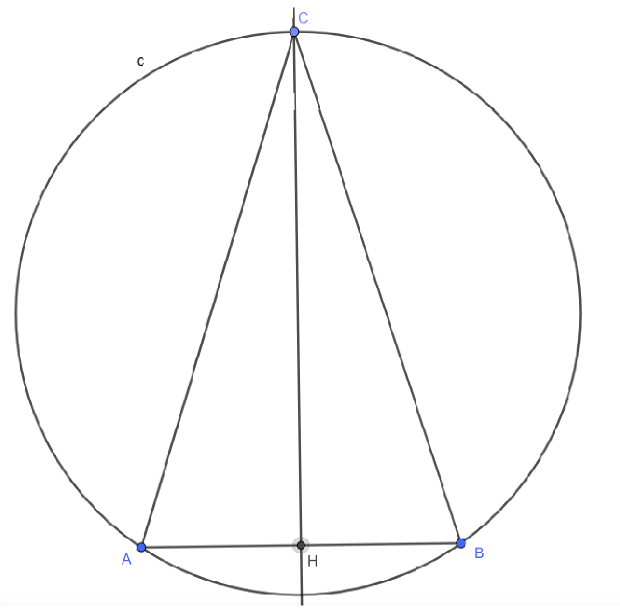
Tesi: BDP triangolo isoscele



[[…]]

14) Soluzione proposta da BUCHICCHIO GIOVANNI, FIFI MIZAR, NARDI PAOLO, CLASSE 2M, LICEO SCIENTIFICO GALEAZZO ALESSI PERUGIA

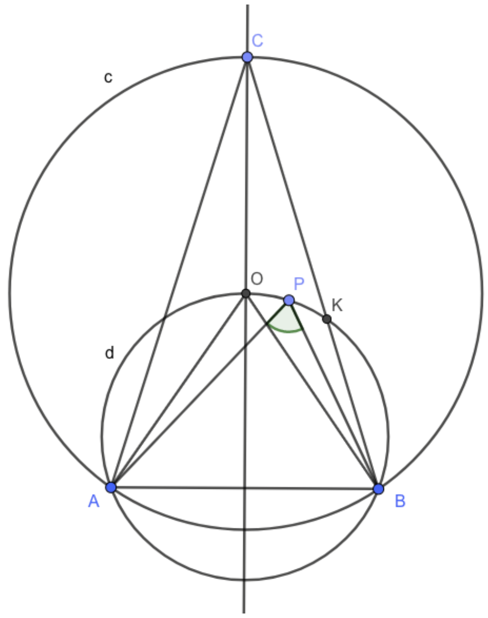
a) Di seguito dimostreremo come costruire un punto P interno al triangolo ABC, non appartenente all'altezza relativa alla base AB, tale che l'angolo $A\hat{P}B$ sia il doppio dell'angolo in C



Disegno la circonferenza c circoscritta al triangolo avente come centro O.(1)

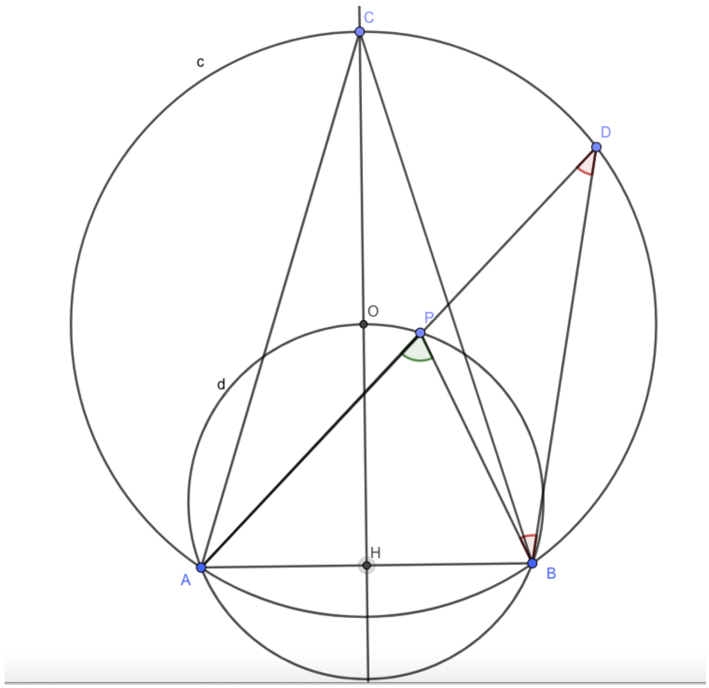
$A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$ perché è il suo corrispondente angolo al centro

Costruisco la circonferenza d passante per i punti A, O, B .(1)



Dato K il punto di intersezione tra la circonferenza d e il lato BC del triangolo ABC; per identificare P posso considerare tutti i punti appartenenti all'arco OK (i punti O e K esclusi) perché, così facendo $A\hat{P}B \cong A\hat{O}B$ poichè insistono sullo stesso arco AB della circonferenza d

b) Prolungo il segmento AP sino a intersecare la circonferenza circoscritta al triangolo ABC nel punto D. Di seguito dimostreremo che il triangolo BPD è isoscele.



P$\hat{D}B$ ≅ A$\hat{C}$B perché insistono sullo stesso arco AB della circonferenza c

$A\hat{P}B \cong A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$ per affermazioni precedenti

Posto $A\hat{C}B = x$ e $A\hat{P}B = 2x$

B$\hat{P}$D= $180 - 2x$ perché è il supplementare di $A\hat{P}B$

$P\hat{B}D$= $180 - (B\hat{P}D + B\hat{D}P) = 180 - (180 - 2x + x) = x$ per somma di angoli interni di un triangolo

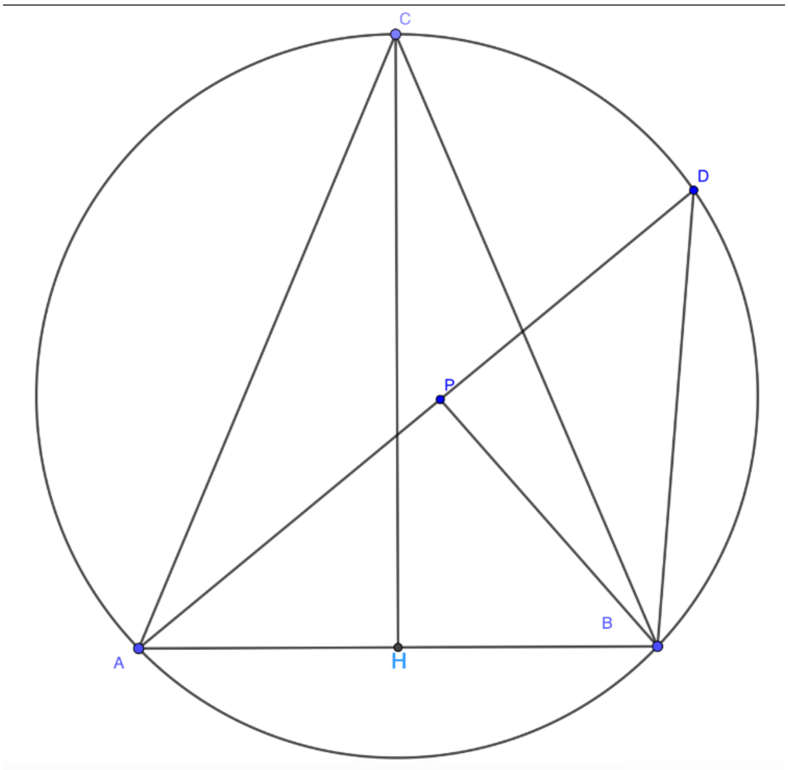
$P\hat{B}D \cong B\hat{D}P = x$ di conseguenza il triangolo BPD è isoscele in quanto ha due angoli congruenti

.[1] Esiste una e una sola circonferenza passante per tre punti non allineati, e il centro di questa è l'intersezione tra gli assi dei segmenti che hanno come estremi i tre punti.

Per costruire l'asse con riga e compasso: dato un segmento AB, punto il compasso in A e, con apertura a piacere maggiore della metà del segmento traccio un arco. Con la stessa apertura punto in B e traccio un altro arco che interseca il precedente nei punti P_1. e P_2. La retta passante per i punti P_1 e P_2 è l'asse del segmento dato.

15) Soluzione proposta da Baldelli Chiara, Trovato Massimo, 2M, Liceo Scientifico G. Alessi di Perugia

Dimostrazione



a) [[...]]

Seconda Parte:

$A\hat{P}B = A\hat{D}B + D\hat{B}P$ per il secondo teorema dell'angolo esterno

$A\hat{P}B = 2A\hat{C}B$ per costruzione

$A\hat{C}B = A\hat{D}B$ perché sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco
Perciò di conseguenza $2A\hat{C}B = A\hat{C}B + D\hat{B}P$; quindi $A\hat{C}B = D\hat{B}P$
Conseguentemente il triangolo BDP è isoscele

(N.B, l'intera dimostrazione si riferisce alla figura sovrastante)