FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia - Problema 8 - 22 dicembre 2018 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia *ABC* un triangolo di lati *AB* =6 cm, *AC* = 8 cm e *BC* =10 cm. Siano *D* ed *E* punti, rispettivamente su *BC* e *AC*, tali che *BD*=*AE*=6 cm.
Verificare che il triangolo *ADE* è rettangolo.
Motivare la risposta.

Commento

Sono giunte tre risposte da altrettante classi II di liceo scientifico.
Il problema partiva da un triangolo rettangolo in cui bisognava inscrivere un altro triangolo e dimostrare che questo risultava rettangolo.

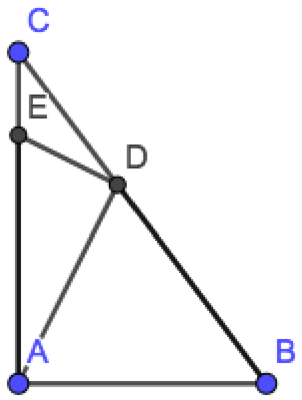
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- Liceo Scientifico “Enrico Fermi”, Bologna
- Liceo Scientifico “Aristosseno”, Taranto
- Liceo Scientifico “Giordano Bruno”, Mestre-Venezia

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

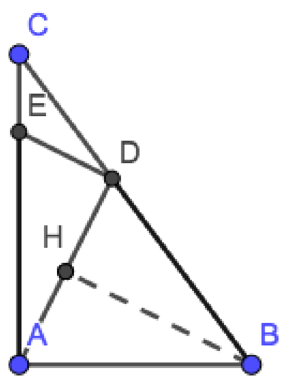
1) MARCO FIORANI BORRACCINO, classe 2^F, Liceo Scientifico Enrico Fermi, Bologna(BO)



IPOTESI:
ABC è un triangolo
AB=6 cm, AC=8cm, BC=10 cm
DϵBC, EϵAC
BD=6 cm, AE= 6cm

TESI :
ADE è un triangolo rettangolo

Considerando il triangolo ABC, il lato maggiore è di 10 cm, perciò se il triangolo fosse rettangolo in A significherebbe che CB dovrebbe essere uguale all'estrazione di radice della somma dei quadrati degli altri due lati (AB,AC) secondo il teorema di Pitagora. Si nota che 6 cm, 8 cm e 10 cm è una terna pitagorica infatti $\sqrt{(6^2+8^2)} = 10$.
Ciò significa che ABC è rettangolo in A, con ipotenusa BC. Dopo di che se ABC è rettangolo allora il coseno dell'angolo in B moltiplicato per l'ipotenusa sarà uguale alla base, AB; semplificando l'equazione e considerando come incognita l'angolo in B, codesto angolo risulterà circa di 53°.
$BC \cdot \cos(B) = AB \rightarrow 10 \cdot \cos(B) = 6 \rightarrow\ B = \cos^{-1}(\frac{6}{10}) \rightarrow B\ \approx 53°$
Considerando il triangolo ABD, BD è di 6 cm per ipotesi e anche AB, per cui esso è isoscele, ciò implica che gli angoli alla base sono congruenti ($dAb \cong bDa$). Da ciò si ricava anche che dAb è di $\frac{180-53}{2}$ ovvero 63.5°.
Si traccia la bisettrice BH dell'angolo dBa (H è il punto di intersezione della bisettrice di dBa su AD) perciò l'angolo in B vera diviso in due angoli più piccoli aventi misura di 26.5° ciascuno ($\frac{53}{2}$).
Essendo bisettrice è anche mediana e altezza perché ABD è isoscele, in questo modo si formeranno due triangoli rettangoli in H.



Per procedere con la dimostrazione è necessario calcolare il lato AD, che si calcolerà in questo modo:

dato che BH è mediana del alto AD, AH e HD saranno congruenti, inoltre corrispondono a due dei cateti dei triangoli formatosi con la bisettrice (ABH e BHD). Per calcolare AD basterà sommare AH con HD, i quali essendo cateti di triangoli rettangoli saranno uguali ad $AB \cdot \sin\frac{53}{2} = AH\ e\ BD \cdot \sin\frac{53}{2} = HD$ (ricordiamo che per ipotesi AB e BD sono congruenti e di 6 cm), eseguendo i calcoli AH e DH risulteranno di circa 2,7 cm, per cui AD sarà di circa 5,4 cm.
Considerando il triangolo ADE, l'angolo in A sarà congruente a 90°- 63.5° che è uguale a 26.5° come gli angoli hBa e hBd.
Ragionando per assurdo, se ADE fosse rettangolo in D, allora il coseno di 26.5° moltiplicato per AE, ovvero 6 cm, sarebbe uguale ad AD ovvero 5,4 cm.
Verificando, $AE \cdot \cos 26.5 = AD\ e\ 6 \cdot \cos 26.5 \approx 5{,}4\ cm$
Possiamo concludere che ADE è rettangolo perché se non lo fosse AD sarebbe diverso da 5,4 cm.
Per confermare la dimostrazione, AD calcolato mediante i due seni (AH e HD) sarà uguale allo stesso AD calcolato con il coseno del triangolo ADE se e solo se questo è rettangolo e per verificarlo: se si sottraessero i due valori di AD e verrebbe 0 significherebbe che il valore dell' AD calcolato con il coseno rispettivo al triangolo AED sarebbe congruente al valore della somma de seni degli altri due triangoli rettangoli (AHB e DHB) e ciò avverrebbe solo nel caso in cui AED fosse rettangolo in D.

$((BD \cdot \sin(\frac{\cos^{-1}(\frac{AB}{BC})}{2}) + (AB \cdot \sin(\frac{\cos^{-1}(\frac{AB}{BC})}{2}))) - (AE \cdot \cos(bAc - \frac{180 - \cos^{-1}(\frac{AB}{BC})}{2})) = 0 \rightarrow$ ADE è un
triangolo rettangolo

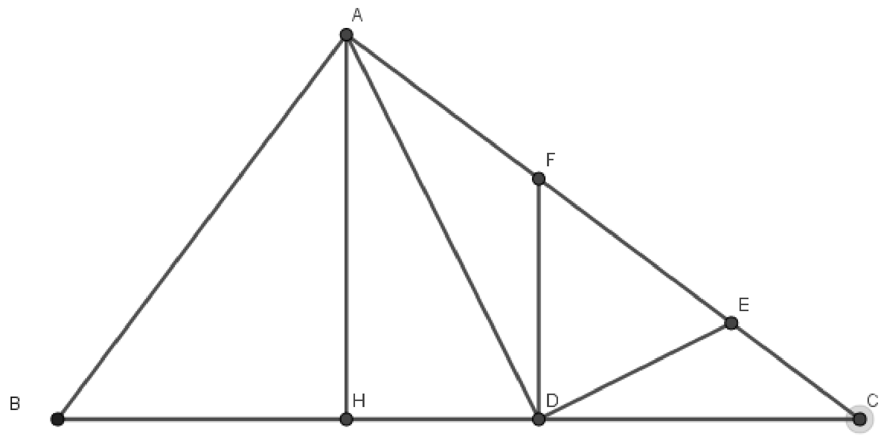
$((BD \cdot \sin(\frac{\cos^{-1}(\frac{AB}{BC})}{2}) + (AB \cdot \sin(\frac{\cos^{-1}(\frac{AB}{BC})}{2}))) - (AE \cdot \cos(bAc - \frac{180 - \cos^{-1}(\frac{AB}{BC})}{2})) \neq 0 \rightarrow$ ADE non è un triangolo rettangolo

E

$$((6 \cdot \sin(\frac{\cos^{-1}\left(\frac{6}{10}\right)}{2}) + (6 \cdot \sin(\frac{\cos^{-1}\left(\frac{6}{10}\right)}{2}))) - (6 \cdot \cos(90 - \frac{180 - \cos^{-1}\left(\frac{6}{10}\right)}{2})) = 0$$

Perciò ADE è un triangolo rettangolo.

2) Soluzione proposta dalla classe 2^ H Liceo Scientifico “Aristosseno”, Taranto



Date le misure dei tre lati del triangolo, osserviamo che esso è un triangolo rettangolo essendo : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ ovvero 100 = 36+64 . Tracciamo l’altezza AH relativa all’ipotenusa ; la sua misura è ottenuta dal prodotto delle misure dei sue cateti che viene diviso per la misura dell’ipotenusa :

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB}\ x\ \overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{6x8}{10} = 4.8\ cm$$

Calcoliamo la misura del segmento BH applicando il primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC :

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}\ x\overline{BH}$ da cui $\overline{BH} = \frac{36}{10}$ = 3.6 cm

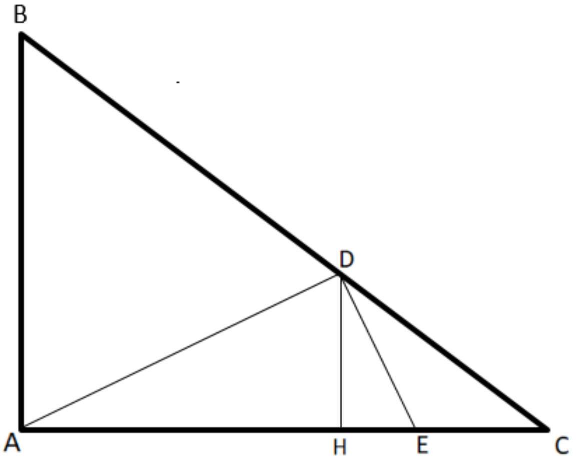
Tracciamo ora i punti D ed E con $\overline{BD} = \overline{AE} = 6$ cm e dal punto D tracciamo il segmento DF , perpendicolare a BC . Esso è parallelo ad AH (i due segmenti sono entrambi perpendicolari a BC) e quindi i due triangoli AHC e FDC sono triangoli rettangoli simili avendo l’angolo di vertice C in comune. Ricaviamo la misura del segmento DF dalla proporzionalità fra i lati omologhi dei triangoli :

$\overline{CD}:\overline{CH} = \overline{CH}:\overline{AH}$, dove CD misura 4 cm ,$\overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH}$ = 10-3.6 = 6.4 cm e AH misura 4.8 cm per cui si ha :

$\overline{DF} = \frac{4x4.8}{10} = 3\ cm$ Ma essendo la misura di AE pari a 6 cm , il punto F è punto medio di AE e quindi ,nel triangolo ADE ,DF è la mediana relativa al lato AE. Ma DF è la metà di AE e questo ci garantisce che il triangolo ADE è un triangolo rettangolo. (in un triangolo rettangolo la mediana relativa all’ipotenusa è la metà dell’ipotenusa ed è vero anche il viceversa).

3) Soluzione proposta da Basso Aurora e Silvestro Giulia-classe 2B, Liceo Scientifico “Bruno-Franchetti”, Venezia

Disegno:



Ipotesi:

$\overset{\triangle}{ABC}$ triangolo

AB= 6 cm

AC= 8 cm

BC= 10 cm

D $\in$ BC

E $\in$ AC

BD=AE= 6 cm

Tesi:

$\overset{\triangle}{ADE}$ triangolo rettangolo

Dimostrazione:

- Il triangolo ABC è un triangolo rettangolo poiché le misure dei suoi lati (6,8,10) sono una terna pitagorica che si ottiene raddoppiando la terna primitiva (3,4,5)
- Costruisco l’altezza del triangolo ADE $\rightarrow$ DH $\perp$ AE
- L’altezza DH e il lato BA sono paralleli poiché formano angoli coniugati interni supplementari

  $\rightarrow$ i triangoli ABC e DHC sono simili siccome formati da angoli congruenti
- Considero i triangoli ABC e DHC: siccome conosciamo la misura di BC, DC e BA e i due triangoli sono simili tra loro possiamo fare una proporzione per trovare $\rightarrow$ la misura di DH BC:DC=BA:x

  $\rightarrow$ 10:4=6:x $\rightarrow$ x=DH= 2,4 cm
- Tramite il teorema di Pitagora possiamo ricavarci la misura di $HC=\sqrt{DC^2-DH^2}=\sqrt{4^2-2,4^2}=3,2$ cm
- Per differenza di segmenti ci possiamo ricavare HE=HC-EC=HC-(AC-AE)=3,2-2=1,2 cm

- A questo punto per dimostrare che ADE è un triangolo rettangolo basta verificare il secondo teorema di Euclide che dice che $\rightarrow p_1:h=h:p_2 \rightarrow x:2,4=2,4:4,8$ x=HE=1,2 cm
- Come volevasi dimostrare ADE è un triangolo rettangolo poiché è stato verificato il teorema di Euclide.