FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia 10 - 24 ottobre 2017 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia ABC un triangolo acutangolo inscritto in un cerchio di centro O e sia H il suo ortocentro.

1) Provare che gli angoli $\widehat{BAH}$ e $\widehat{CAO}$ sono congruenti.
2) Se il triangolo ABC è ottusangolo in A, come si modifica la precedente relazione?

Motivare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte sei risposte, da classi II di due Licei Scientifici.

Il problema poneva due quesiti relativi a un triangolo e al suo ortocentro.
Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare, la congruenza di due angoli, nell'ipotesi che il triangolo fosse acutangolo.
Nel secondo quesito si chiedeva di trovare la relazione tra gli stessi due angoli nel caso in cui il triangolo fosse ottusangolo.

In una sola risposta il problema viene risolto correttamente nella sua interezza. Nelle altre risposte, al di là di alcune imprecisioni sulla figura che ne impediscono la comprensione, non è stato capito il secondo quesito, laddove, chiaramente, non era richiesto di provare che i due angoli fossero congruenti.

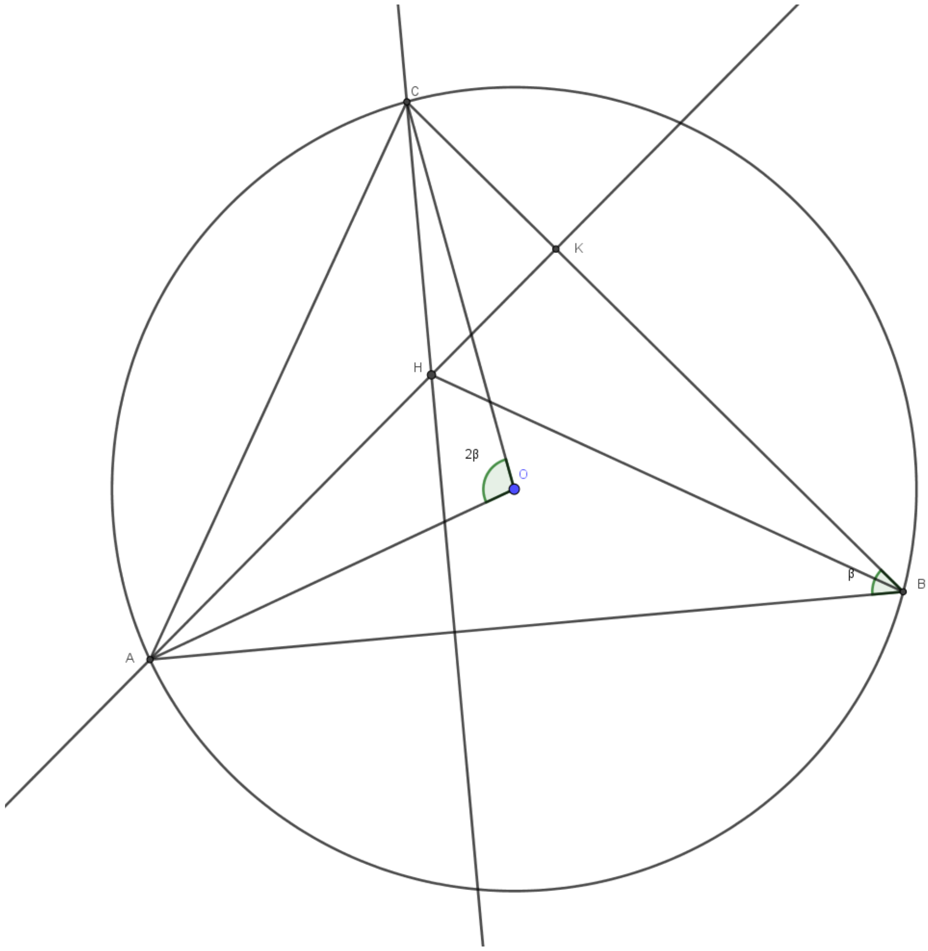
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- LS Aristosseno, Taranto
- LS Nomentano, Roma (cinque soluzioni trovate in un lavoro di gruppo)

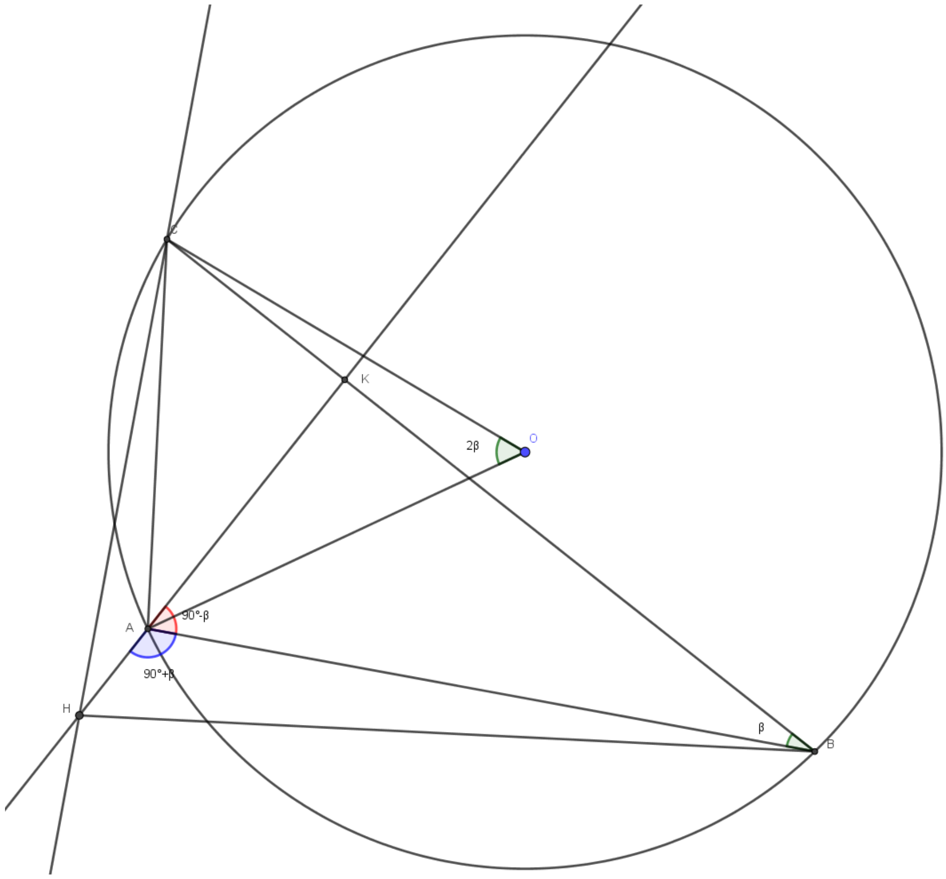
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

1) Soluzione proposta dalla Classe II H liceo Scientifico “Aristosseno”, Taranto



1) Indichiamo con K il piede dell’altezza condotta dal vertice A del triangolo ABC al lato BC.
Se l’angolo $\widehat{ABK}$ =β , sarà $\widehat{BAH}$ = 90°-β ,poiché il triangolo ABK è rettangolo.
L’angolo$\widehat{COA}$ è il doppio dell’angolo $\widehat{ABK} = \widehat{ABC}$, in quanto è angolo al centro che insiste sullo stesso arco AC su cui insiste l’angolo $\widehat{ABC}$, per cui $\widehat{COA}$ = 2β .
Osserviamo poi che il triangolo AOC è isoscele, perché OA e OC sono raggi della stessa circonferenza. Esso ha gli angoli alla base congruenti e, sapendo che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari un angolo piatto, si ha che : $\widehat{CAO}$=(180°-$\widehat{COA}$)/2 =(180°-2β)/2=90°-β
Da questo segue che gli angoli $\widehat{BAH}$ e $\widehat{CAO}$ sono congruenti.

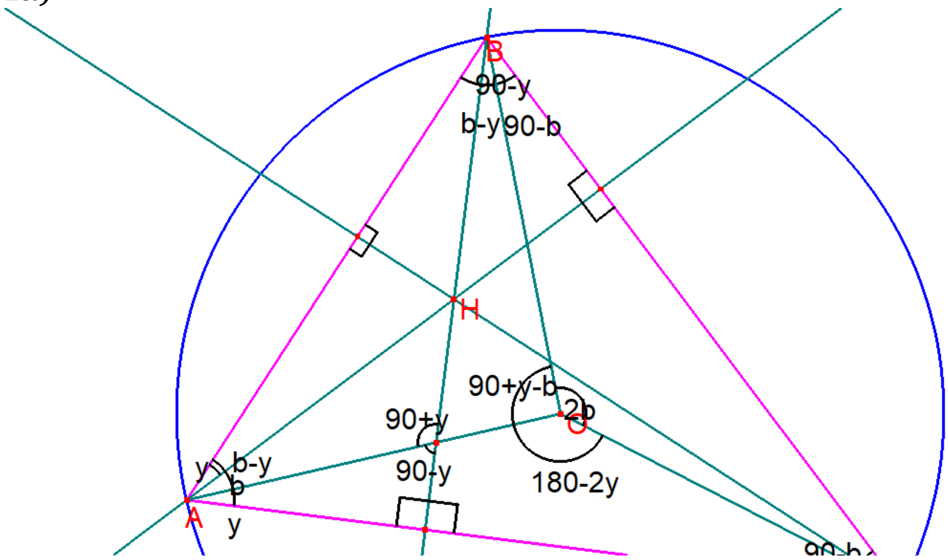


2) Se il triangolo ABC è ottusangolo in A , nel triangolo rettangolo ABK l'angolo $\widehat{BAK}$ = 90°-β in quanto è complementare dell'angolo $\widehat{ABK}$ = β . L'angolo $\widehat{BAH}$ è supplementare dell'angolo $\widehat{BAK}$ in quanto è ad esso adiacente : $\widehat{BAH}$= 180°-$\widehat{BAK}$ =180°-(90°-β))=90°+β . Essendo $\widehat{COA}$ = 2β e $\widehat{CAO}$=90°-β ,come già detto, la relazione fra i due angoli i $\widehat{BAH}$e $\widehat{CAO}$ cambia, in quanto essi ora sono supplementari :

$\widehat{BAH}$ + $\widehat{CAO}$ =[90°+β+90°-β] [[90°-β+90°+β]] =180°.

2) Cinque soluzioni provenienti da un lavoro di gruppo della Classe 2^A del Liceo Scientifico "Nomentano", Roma (sperimentazione di liceo matematico)

Dimostrazione n. 1 (figura di riferimento su file Cabri: Cabri n.1a)

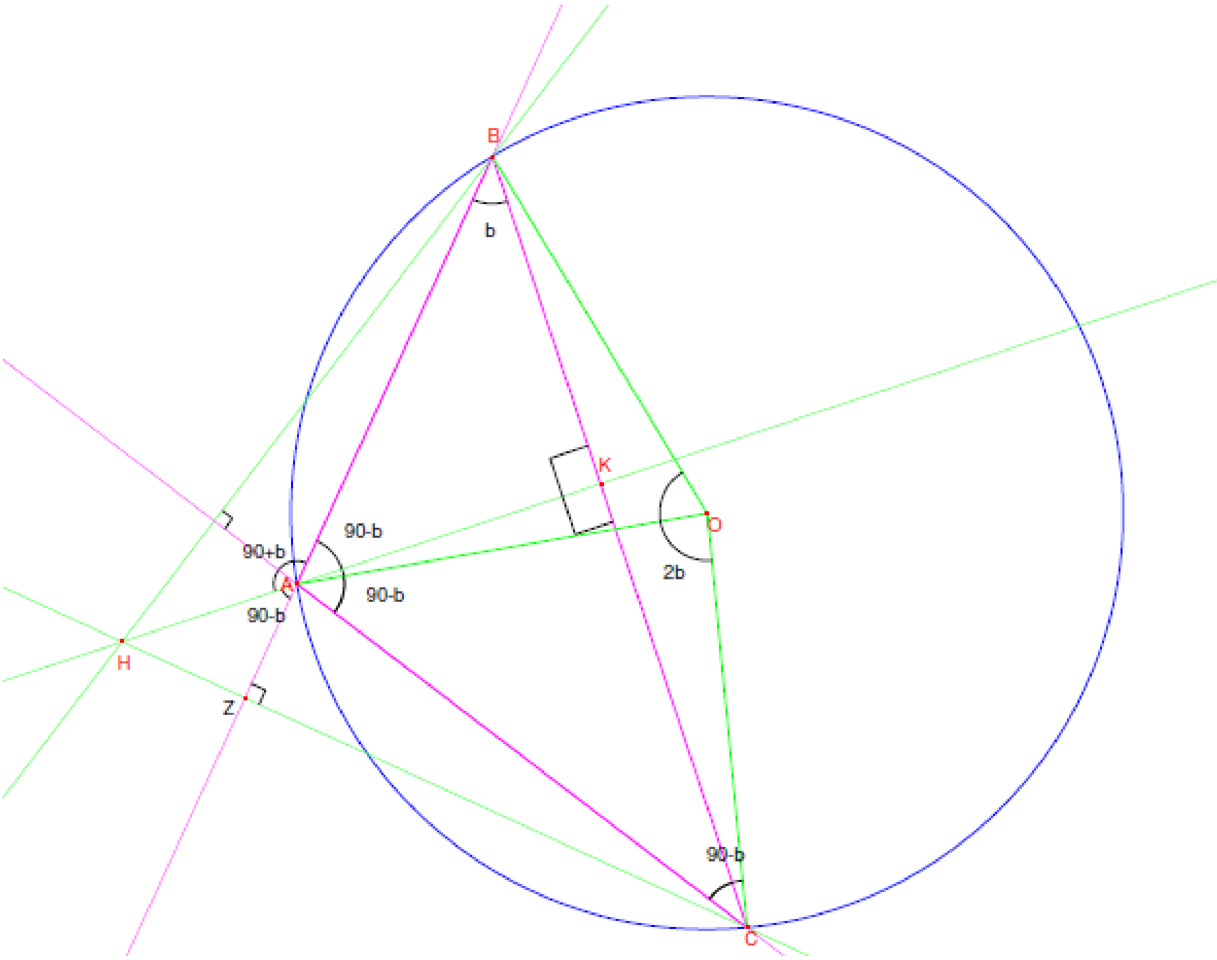


1.Hp:
H=ortocentro
Triangolo (ABC) acutangolo
Inscritto in un cerchio

Th:
BÂH=CÂO

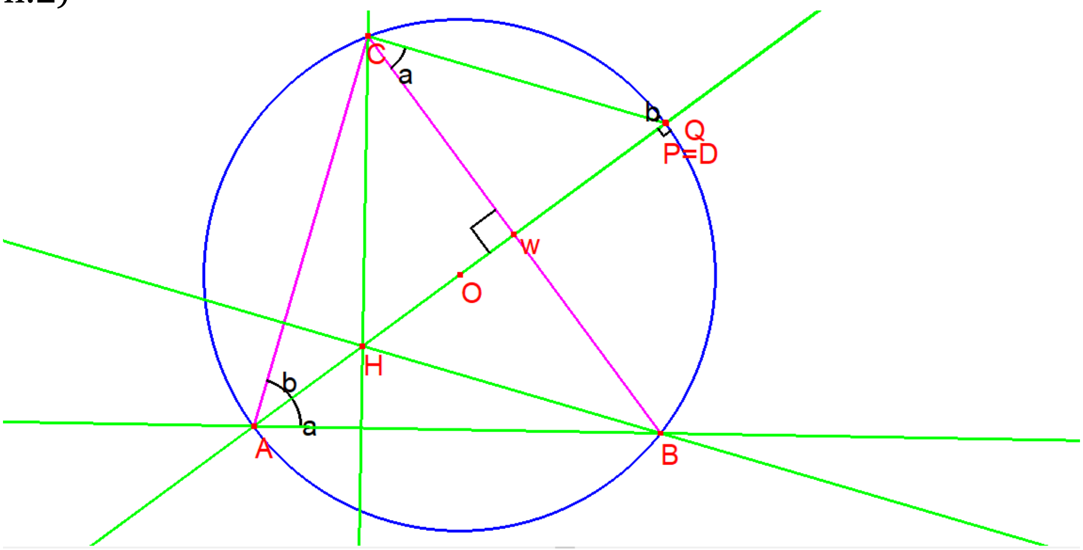
Dim.
AO=CO=BO=raggio del cerchio
Consideriamo il triangolo (AOC) esso ha:
AO=OC quindi anche gli angoli OÂC=OĈA e poniamoli uguali a y poiché il triangolo è isoscele. Consideriamo la corda AC il suo angolo al centro AÔC = 180-2y e l'angolo alla circonferenza (ABC) = 90-y.
Consideriamo la corda BC e poniamo l'angolo al centro BÔC =2b e l'angolo alla circonferenza BÂC = b.
Consideriamo la corda AB che ha AÔB (ang. al centro) = 360-(180-2y) -2b= =180+2y-2b e quindi il triangolo isoscele AOB (avendo AO=OB) ha l'angolo ABO=BÂO= (180- 180-2y +2b):2=-y+b.
[[Abbiamo posto che BÂC=y e quindi BÂH= b-(-y+b) =y]] [Non si capisce perche'] quindi BÂH=CÂO
c.v.d.

(figura di riferimento su file Cabri: Cabri n.1b)



[[...]]

<u>Dimostrazione n. 2</u> (figura di riferimento su file Cabri: Cabri n.2)



[[....]] [La figura e' fatta male, sembra che AH passi per O e questo impedisce di seguire correttamente la dimostrazione]

<u>Dimostrazione n. 3</u> (figura di riferimento su file Cabri: Cabri n.3)

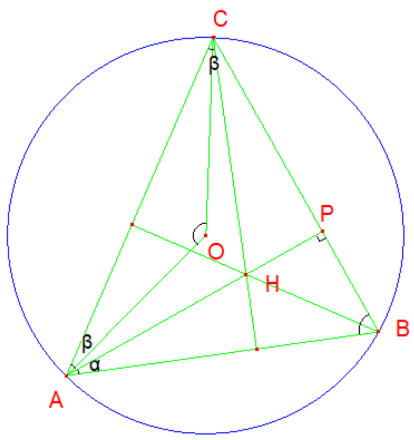
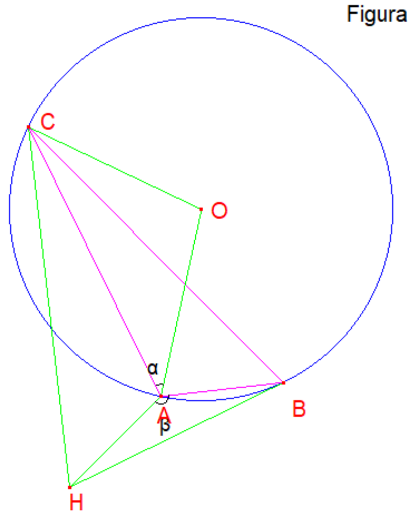


Figura 2



Ipotesi:

Triangolo ABC acutangolo;
H ortocentro;
Triangolo ABC inscritto in circonferenza con centro "O".

Tesi:

a) CÂO = BÂH (α = β);
b) Se triangolo ABC è ottusangolo in A, descrivi cosa accade alla relazione CÂO = BÂH.

Dimostrazione:

a) Poniamo CÂO = β e BÂH = α;
OC = OA (perché raggi), quindi il triangolo (AOC) è isoscele e gli angoli: OĈA = OÂC
Essendo (CÔA) angolo al centro, rispetto alla corda AC, allora il corrispettivo angolo alla circonferenza segue la relazione (CÔA) = 2(CBA).

Prolunghiamo il segmento AH fino a toccare la corda CB in P.

Consideriamo triangolo (ABP), rettangolo in P:
somma angoli interni: ABP + BPA + PAB = CBA + 90° + α = 180°;
quindi, CBA + α = 90° (anche perché complementari).

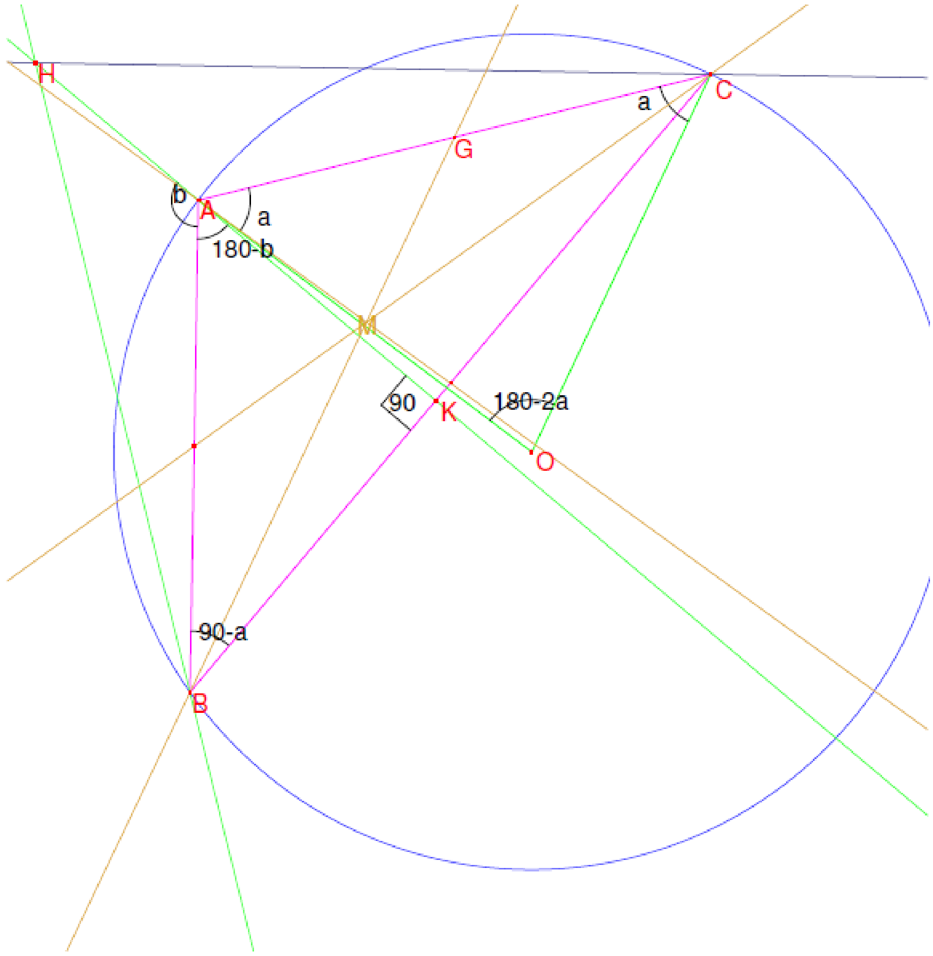
Consideriamo triangolo (AOC):

somma angoli interni: OCA + CAO+AOC = β + β + 2CBA = 2β + 2CBA = 180°;
quindi, CBA + β = 90°.

Allora CBA + α = CBA + β;
ne segue:
α = β

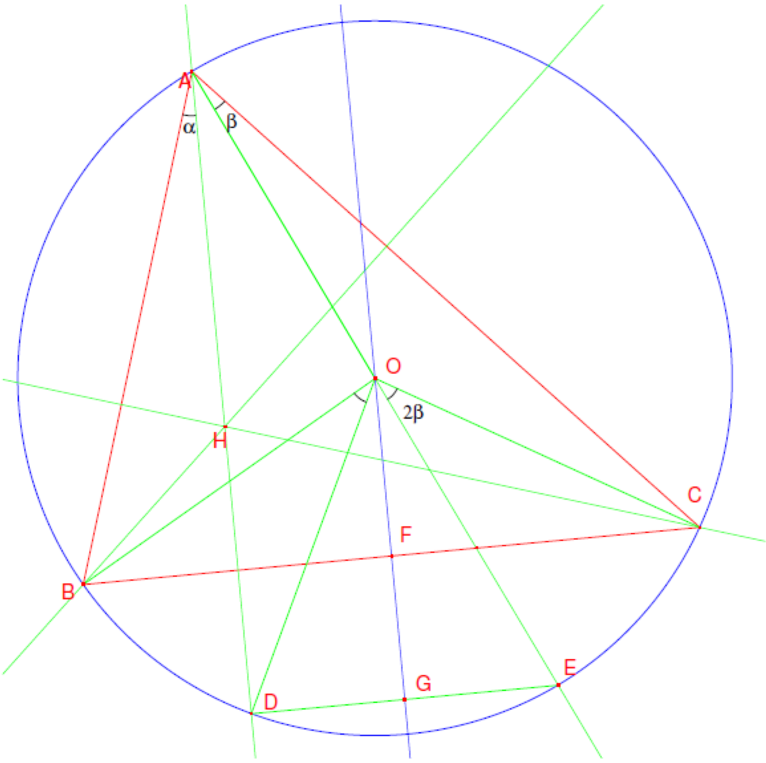
b) [[...]]

Dimostrazione n. 4 (figura di riferimento su file Cabri: Cabri n.4)



[[...]] [nella figura ABC è ottusangolo !]

Dimostrazione n. 5 (figura di riferimento su file Cabri: Cabri n.5)



1.Hp:
H=ortocentro
Triangolo (ABC) acutangolo
Inscritto in un cerchio
Dim.

Th:
BÂH=CÂO

2.Hp:
H=ortocentro
Triangolo (ABC) ottusangolo in A
Inscritto in un cerchio

Th:
BÂH=CÂO

[Chiarire meglio chi sono D ed E] Prendiamo in considerazione gli angoli BÔD=2α e EÔC=2β: essi sono gli angoli al centro rispetto agli archi BD ed EC, BÂH e CÂO sono angoli alla circonferenza rispettivamente agli archi BD ed EC.
Quindi BÂH=α e CÂO=β
Dividiamo con una bisettrice l'angolo BÔC che va a formare i triangoli BOF e COF i quali hanno OC=OB perché raggi della circonferenza, BÔF=CÔF perché divisi dalla bisettrice ed OF in comune.
Per il primo principio di congruenza i due triangoli sono uguali.
Prendo in considerazione i triangoli GOD e GOE essi hanno DO=OE perché raggi della circonferenza, OG in comune e ODˆG=OÊG perché angoli alla base di un triangolo isoscele.
Per il primo principio di congruenza i due triangoli sono uguali.

Ora considero gli angoli BÔG=2α+DÔG e CÔG=2β+GÔE, essendo BÔG=CÔG e DÔG=GÔE [2α e 2β] sono uguali per differenza di angoli uguali [e quindi α= β].