FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

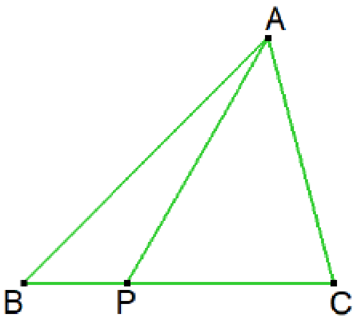
Flatlandia - Problema 10 – 24 Maggio 2018 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Problema di Flatlandia – 10 - 24 maggio 2018

Il triangolo ABC ha l'angolo in B che misura 45°. Sul lato BC è dato il punto P che lo divide in due parti BP e PC tali che $PC = 2\,BP$. Inoltre l'angolo $A\hat{P}C$ misura 60°.

a) Costruire la figura con riga e compasso.
b) Determinare la misura dell'angolo $A\hat{C}B$.



Motivare tutte le risposte.

Commento
Sono giunte 3 risposte, da due classi seconde e da una classe terza di Liceo scientifico

Il problema poneva un quesito su un triangolo ABC in cui il lato BC era diviso dal punto P in due parti, una doppia dell'altra (PC=2BP). Inoltre l'angolo in B del triangolo era di 45° e l'angolo APC di 60°. Veniva richiesto di fornire una costruzione con riga e compasso della figura, e di trovare la misura dell'angolo in C.
Le risposte pervenute risolvono correttamente il problema, però due ricorrono alla geometria analitica e anche alla trigonometria, mentre una soltanto ricorre a ragionamenti geometrici "elementari" come dovrebbe essere nello spirito di Flatlandia.

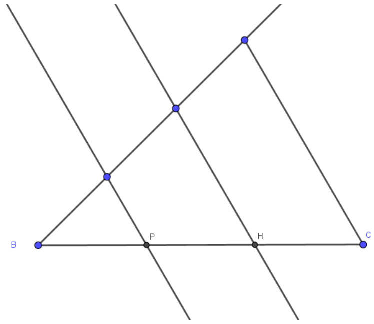
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "Galilei", Alessandria
- Liceo Scientifico-Linguistico "Pitagora", Rende(CS)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

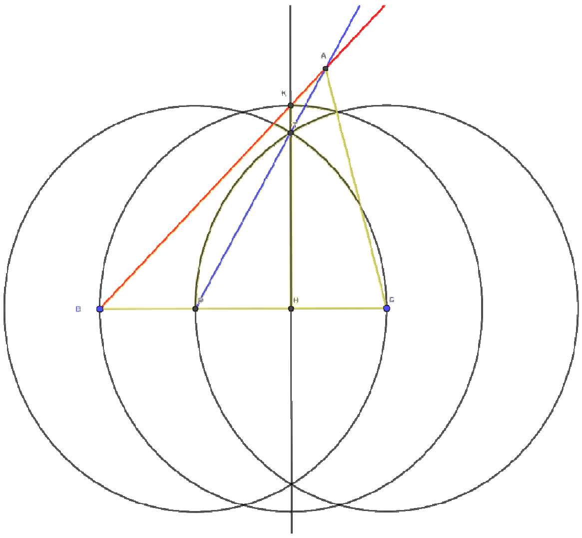
Soluzioni

1)Soluzione proposta dalla Classe 2^H scientifico, Liceo Aristosseno Taranto

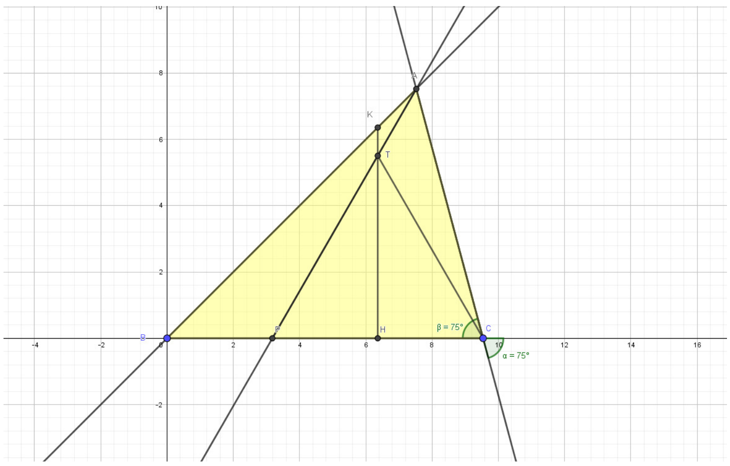
a) Dividiamo il segmento BC in tre segmenti congruenti, BP,PH e HC utilizzando la corrispondenza di Talete.



Costruiamo ora , utilizzando il compasso, il triangolo rettangolo isoscele che ha i cateti HB e HK e poi il triangolo equilatero di base PC e vertice T . Le semirette di BK e di PT si intersecano nel punto A, che è il terzo vertice del triangolo ABC che si doveva costruire.



b) Per determinare l'ampiezza dell'angolo di vertice C del triangolo che abbiamo costruito, scegliamo un riferimento cartesiano con l'origine nel vertice B del triangolo e l'asse x coincidente con la retta del lato BC. Avendo diviso il segmento BC in tre segmenti congruenti, assegniamo a ciascuno di essi una misura a , in modo che il punto C avrà coordinate $(3a,0)$ e il punto P avrà coordinate $(a,0)$.



Determiniamo le coordinate del vertice A attraverso il sistema lineare formato dall' equazione della retta BA: $y = x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante, inclinata di 45° sull'asse x) ,e dall' equazione della retta passante per il punto P inclinata di 60° sull'asse x che ha equazione $y = \sqrt{3}(x-$

a) .Risolvendo il sistema otteniamo le coordinate del punto A ($\frac{(3+\sqrt{3})a}{2}, \frac{(3+\sqrt{3})a}{2}$) . Calcoliamo quindi la pendenza della retta AC :

m[A,C] = (*y*A-*y*C)/(*x*A-*x*C) = $\frac{\frac{(3+\sqrt{3})a}{2}}{\frac{(3+\sqrt{3})a}{2}-3a} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3} = -2-\sqrt{3}$.

La pendenza di una retta è la tangente dell'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse x; questo angolo ha ampiezza $tan^{-1}(-2-\sqrt{3}) = -75°$ (esso è negativo perché valutato in senso orario a partire dall'asse x) e quindi l'angolo ad esso opposto al vertice ,che è l'angolo ACB del triangolo ,ha un' ampiezza di 75 °.

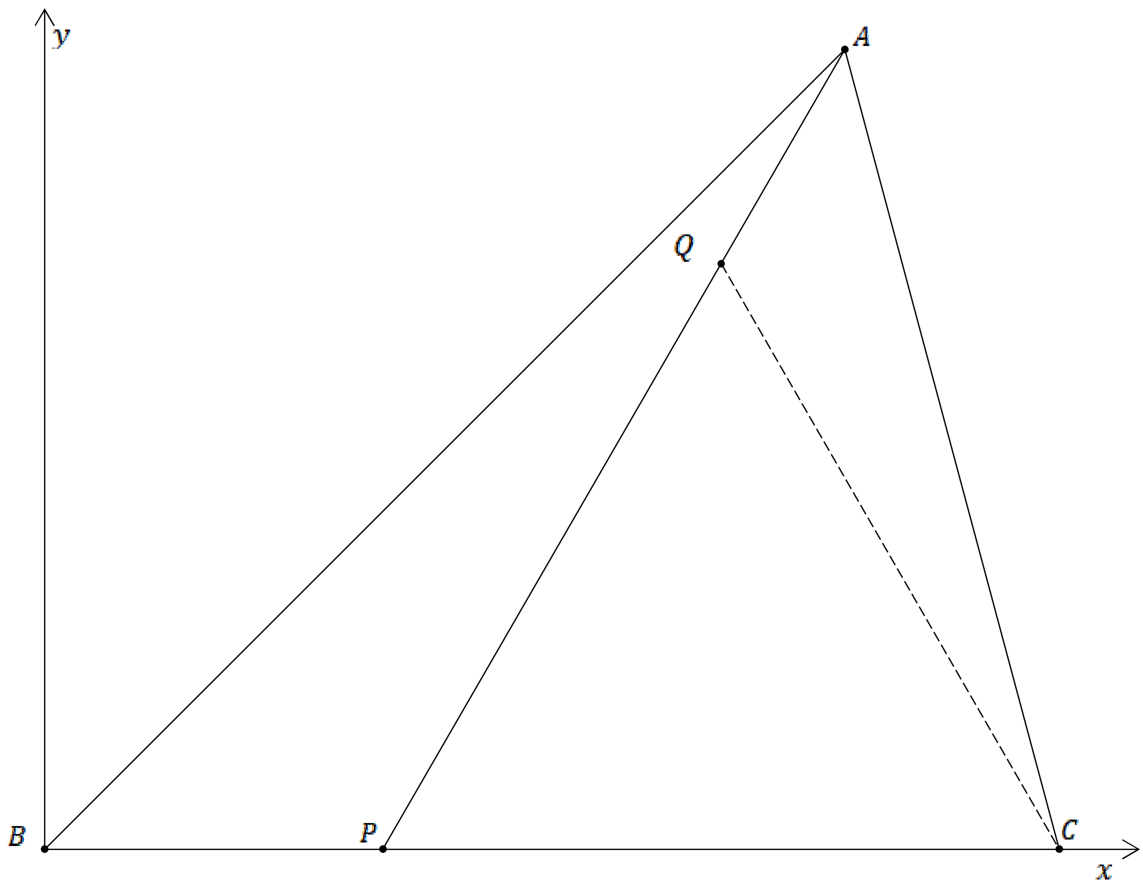
2) Soluzione proposta da Luciano Spettoli, III E, Liceo Scientifico Statale "Galilei", Alessandria

Ipotesi:

- $\widehat{ABC} = 45°$
- $\widehat{APC} = 60°$
- $\overline{CP} = 2\overline{BP}$

Tesi:

- Costruire la figura con riga e compasso
- Trovare la misura dell'angolo $\widehat{ACB}$



Dimostrazione:

Poniamo $\overline{BP} = a$. Avremo, dunque, $\overline{CP} = 2a$. Se consideriamo la figura su un piano cartesiano di origine B e con l'asse x su $\overline{BC}$, avremo: $B\ (0;0)$, $P\ (a;0)$ e $C\ (3a;0)$. La retta AB ha equazione $y = x$ poiché è inclinata di $45°$ rispetto agli assi cartesiani.

Prendiamo un punto Q su $\overline{AP}$ tale che $\overline{PQ} \cong \overline{CP}$; CPQ è dunque un triangolo equilatero (in quanto isoscele e con un angolo di $60°$) e pertanto Q ha ascissa pari a $2a$ e ordinata pari all'altezza del triangolo equilatero CPQ. Quindi $Q\ \left(2a; a\sqrt{3}\right)$. L'equazione della retta PQ può essere determinata imponendo il passaggio per Q e P in questo modo: $y - y_P = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_P)$. Quindi:

$$y = \frac{a\sqrt{3} - 0}{2a - a}(x - 2a) + a\sqrt{3} \Rightarrow y = x\sqrt{3} - a\sqrt{3}$$

Il punto A è l'intersezione fra la retta AB e la retta PQ, che si determina mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x\sqrt{3} - a\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a\dfrac{\sqrt{3}+3}{2} \\ y = a\dfrac{\sqrt{3}+3}{2} \end{cases} \Rightarrow A\ \left(a\frac{\sqrt{3}+3}{2}; a\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$$

Per il Teorema di Pitagora:

$$\overline{AP} = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{\left(a\frac{\sqrt{3}+3}{2} - a\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}+3}{2} - 0\right)^2} = a\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Per il Teorema di Pitagora:

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{\left(a\frac{\sqrt{3}+3}{2} - 3a\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}+3}{2} - 0\right)^2} = a\sqrt{6}$$

Inoltre $\overline{CP} = 2a$

Per il Teorema del coseno, $\overline{AP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CP} \cdot \cos\left(\widehat{ACB}\right)$, dunque:

$$\left(a\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^2 = \left(a\sqrt{6}\right)^2 + (2a^2) - 2 \cdot a\sqrt{6} \cdot 2a \cdot \cos\left(\widehat{ACB}\right) \Rightarrow \cos\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ è il coseno di $75°$, dunque $\widehat{ACB} = 75°$. Si suppone, ovviamente, che a sia diverso da 0.

Costruzione con riga e compasso:

1) Si fissano i due punti B e P;
2) Si traccia la retta BP
3) Si disegna la circonferenza di centro P e raggio $\overline{BP}$;

4) Si chiama H il punto di intersezione della circonferenza con BP non coincidente con B;

5) Si disegna la circonferenza di centro H e raggio $\overline{HP}$;

6) L'intersezione di questa circonferenza con BP (non coincidente con P) è C;

7) Si chiama R l'intersezione tra le due circonferenze; [una delle due]

8) Si traccia la retta PR, che risulta inclinata di $60°$ rispetto a BP in quanto R è vertice del triangolo equilatero HPR;

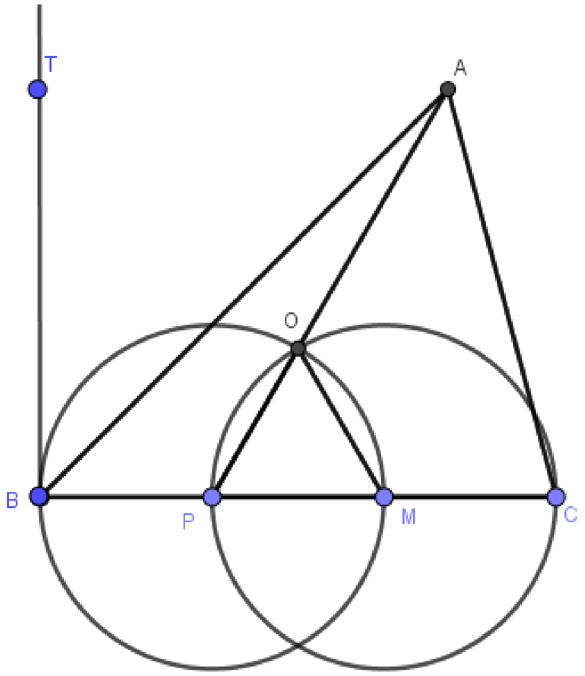
9) Si traccia la perpendicolare a BP per P (operazione sempre possibile con riga e compasso);

10) Si chiama K il punto di intersezione di tale retta con la circonferenza disegnata al punto 3, in modo che giaccia dalla stessa parte di R rispetto a BP;

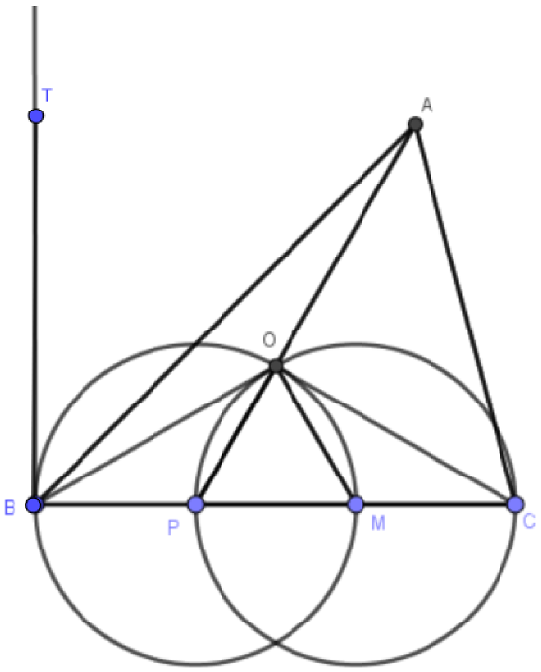
11) Si traccia la retta BK, che risulta essere inclinata di $45°$ rispetto a BP;

12) L'intersezione tra BK e PR è A, e la figura è completa.

3) Soluzione di Roberta Capocasale e Giorgia Delle Donne, classe 2° sez. A, Liceo Scientifico-Linguistico Pitagora", Rende(CS)



Costruiamo dapprima il segmento BC dividendolo in 3 parti congruenti utilizzando il compasso. In seguito per ottenere l'angolo $A\hat{P}C$ di 60°, costruiamo il triangolo equilatero sulla base PM ottenuto dall'intersezione della circonferenza di raggio PM e centro P e dalla circonferenza di raggio PM e centro M. Il triangolo POM che si viene a formare è equilatero perché i lati sono i raggi di circonferenze congruenti. Per ottenere l'angolo $A\hat{B}C$ di 45°, tracciamo la perpendicolare al segmento PC e poi la bisettrice AB dell'angolo $T\hat{B}C$ di 90°. AB interseca il prolungamento del lato PO nel punto A, uniamo poi il punto A e il punto C e si forma il triangolo ABC.



I triangoli BMO e PCO sono rettangoli perché iscritti in semicirconferenze e poiché PO e PM risultano rispettivamente le loro mediane relative all'ipotenusa, quindi congruenti alle loro metà, allora i triangoli BOP e OMC sono isosceli. I loro angoli alla base misurano 30° poiché rispettivamente complementari agli angoli $O\hat{M}$B e $O\hat{P}C$ di 60° perché angoli del triangolo equilatero POM. L'angolo $B\hat{P}O$ è di 120° poiché supplementare all'angolo $O\hat{P}M$ di 60°. Consideriamo il triangolo BOA: l'angolo $B\hat{O}A$ è 150° perché è l'angolo supplementare dell'angolo [[$B\hat{O}C$]] [BOP] e l'angolo $A\hat{B}O$ è di 15° poiché è il risultato della differenza tra gli angoli $A\hat{B}C$ e [[$A\hat{B}O$]] [OBC]. L'angolo $B\hat{A}P$ è di 15° per differenza di angoli interni di un triangolo. Poiché $A\hat{B}O$ è congruente a $B\hat{A}O$,allora il triangolo BOA è isoscele. Il triangolo AOC è isoscele [[per dimostrazioni precedenti e,]] poiché BO è congruente a OC e BO è congruente a [[BA]] [OA], quindi per la proprietà transitiva OA è congruente a OC. L'angolo $A\hat{O}C$ è 90° per differenza di angoli esplementari di centro O.
Poiché il triangolo AOC è rettangolo-isoscele gli angoli adiacenti ad AC misurano 45°. Sommando gli angoli $B\hat{C}O$ e $A\hat{C}O$ l'angolo$B\hat{C}A$ misura 75°.