FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia - Problema 12 – 26 febbraio 2018 – Commento alle soluzioni ricevute

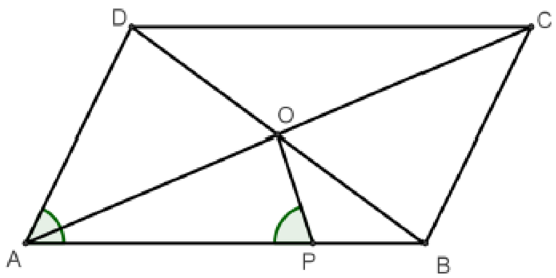
Il testo del problema

Problema di Flatlandia - 12 - 26 febbraio 2018

$ABCD$ è un parallelogramma e O il punto di incontro delle sue diagonali.

Un punto P situato sul lato AB è tale che l'angolo $P\hat{A}D$ è congruente all'angolo $A\hat{P}O$.

Provare che i segmenti PC e PD sono congruenti.



Motivare la risposta.

Commento

Sono giunte sette risposte, tutte da classi seconde di Licei scientifici (tranne una di cui non si capisce la classe).
Il problema poneva un quesito relativo a un parallelogrammo e alla congruenza tra due particolari segmenti.
Tutte le risposte giunte sono sostanzialmente corrette e denotano anche una buona intuizione visuale. Notiamo però che nessuno si è chiesto se il punto P fosse sempre interno al segmento AB o non potesse anche risultare ad esso esterno o addirittura coincidere con B.

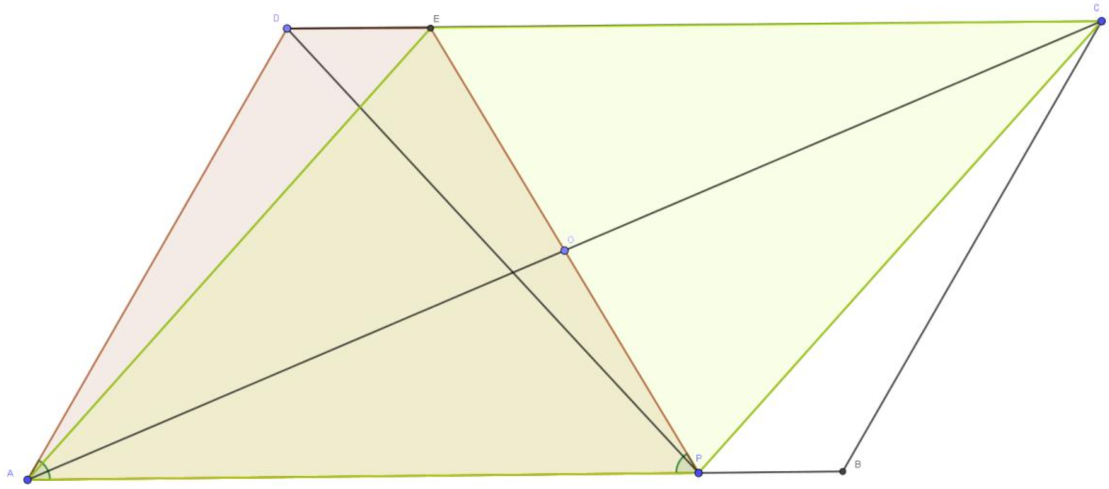
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- L.S. "Aristosseno", Taranto (due risposte)
- Liceo Scientifico – scienze applicate - "S. Cantone", Pomigliano D'Arco (NA)
- Liceo scientifico scienze applicate "Cesaris", Casalpusterlengo (Lodi)
- Liceo Scientifico "Archimede" con opzione Potenziamento in Matematica e Fisica, Messina
- Liceo Scientifico "G.Rummo", Benevento
- Liceo Scientifico "Nomentano", Roma.

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

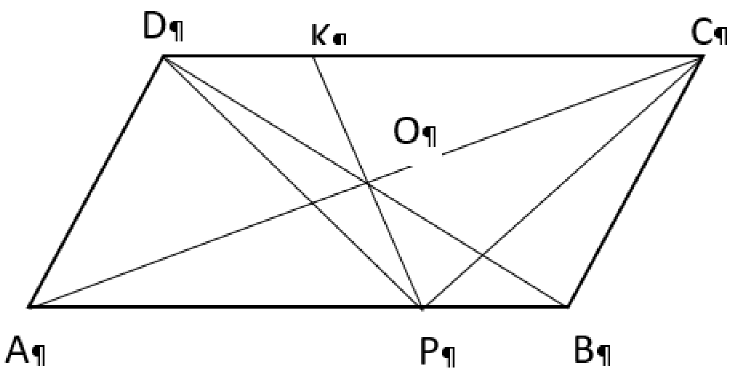
Soluzioni

1)Soluzione proposta dalla classe II H Liceo Scientifico Aristosseno, Taranto



Prolunghiamo il segmento PO, dalla parte di O, fino ad incontrare il lato CD del parallelogramma nel punto E . Osserviamo quindi che il quadrilatero APED è un trapezio isoscele, perché ha gli angoli adiacenti alla base maggiore AP congruenti per ipotesi. In questo trapezio le due diagonali AE e PD sono congruenti. Essendo inoltre i due punti P ed E sui lati opposti del parallelogramma ABCD ,ed il punto O il suo centro di simmetria, sono congruenti i segmenti OE ed OP come anche OA ed OC . Per questo il quadrilatero APCE è un parallelogramma (esso ha le due diagonali che si incontrano nel loro punto medio O) e pertanto si ha che i suoi lati opposti AE e PC sono congruenti. Ma essendo AE congruente a PD come già detto, per la proprietà transitiva della congruenza sarà anche PD congruente a PC.

2)Soluzione proposta da Crescentini Francesco Paolo, Trabucco Angelo Alfonso
Classe II F liceo scientifico – scienze applicate - "S. Cantone" Pomigliano D'Arco (NA)



Ipotesi: ABCD è parallelogramma

O = AC ∩ BD

P appartiene a AB

angolo OPA ≅ angolo DAP

Tesi: PC ≅ PD

DIM: Tracciare il prolungamento di OP che interseca CD in K. APKD è trapezio isoscele perché, essendo DK appartenente a DC e AP appartenente a AB, DK // AP e angolo DAP ≅ angolo KPA per ipotesi allora AD ≅ KP Considerare i triangoli AOP e KOC, essi hanno:

- AO ≅ OC perché O è il punto di incontro delle diagonali del parallelogramma e le diagonali di un di un parallelogramma si bisecano
- angolo OKC ≅ OPA perché alterni interni di DC // AB intersecate dalla trasversale KP
- angolo OAP ≅ OCK perché alterni interni di AB // DC intersecate dalla trasversale AC

allora AOP ≅ KOC per il secondo criterio di congruenza dei triangoli generalizzato allora AP ≅ KC

Considerare i triangoli ADP e KPC, essi hanno:

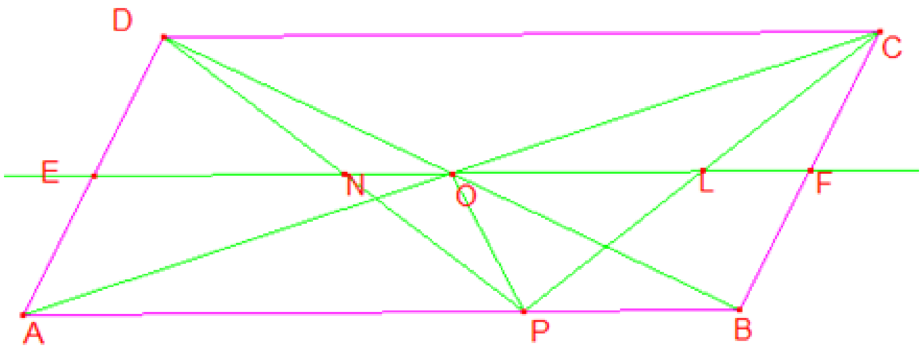
- AP ≅ KC per quanto provato
- KP ≅ AD per quanto provato
- angolo DAP ≅ angolo PKC perché angolo DAP ≅ angolo KPA e angolo KPA ≅ angolo PKC

allora ADP ≅ KPC per il primo criterio di congruenza allora PD ≅ PC

□

3)Soluzione proposta da Zanoni Chiara classe 2^T Liceo scientifico scienze applicate Cesaris Casalpusterlengo (Lodi)

IPOTESI:



- $ABCD$ parallelogramma;
- AC e BD diagonali;
- [[$E\hat{A}P \cong O\hat{P}A$;]] [D al posto di E]

TESI:

- $PD \cong PC$;

DIMOSTRAZIONE:

Nel parallelogramma $ABCD$ le diagonali AC e BD si tagliano a metà, quindi O è il loro punto medio. Traccio la retta parallela al lato AB, passante per O, che interseca i lati AD e BC nei rispettivi punti E e F.

Il quadrilatero $EAPO$ è un trapezio isoscele in quanto, per ipotesi, $E\hat{A}P \cong O\hat{P}A$.

Di conseguenza $EA \cong OP$.

Anche il quadrilatero $OPBF$ è un trapezio ($la\ base\ FO//alla\ base\ PB$).

Considero il trapezio $OPBF$: per il teorema di Talete, essendo $AB//EF//DC$ e $DO \cong OB$, $CF \cong FB$. Poiché $CF \cong FB \cong EA \cong ED$ ed $EA \cong OP$, $FB \cong OP$.

Chiamo l'incontro della retta EF con la retta DP con il punto [[P]] [N] e l'incontro della retta EF con la retta PC con il punto L.

Considero ora i triangoli NOP e LFC.

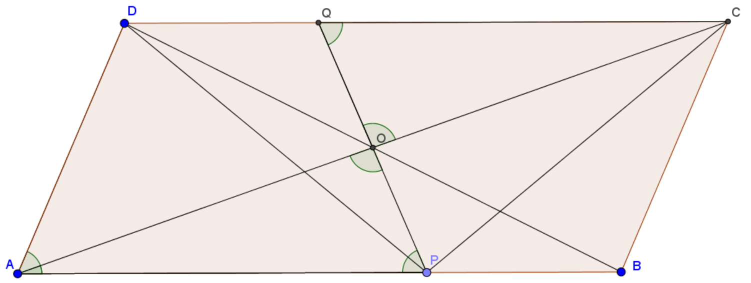
Essi hanno:

- $NO \cong LF$ perché, se considero i triangoli BPD e PCB, il segmento $NO \cong \frac{1}{2}PB$ e il segmento $LF \cong \frac{1}{2}PB$ per il teorema della retta parallela condotta dal punto medio di un lato del triangolo. Per proprietà transitiva $NO \cong LF$.
- $FC \cong OP$ per quanto detto in precedenza.
- $N\hat{O}P \cong C\hat{F}L$ perché entrambi supplementari di angoli congruenti ($F\hat{O}P \cong L\hat{F}B,\ angoli\ alla\ base\ del\ trapezio\ isoscele$).

I triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza, in particolare $NP \cong CL$. Essendo quindi L e N punti medi dei lati del triangolo DPC, per il teorema di Talete, $PC \cong PD$.

4)Soluzione proposta da Marta Cannata, 2[a]B, Liceo Scientifico Archimede con opzione *Potenziamento in Matematica e Fisica*, Messina

Problema di Flatlandia 12-26 febbraio 2018

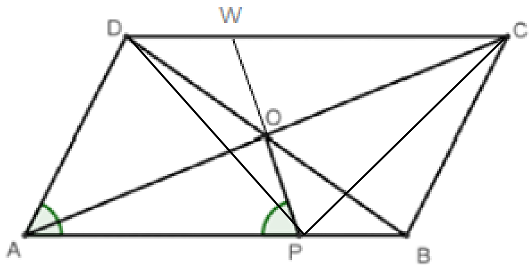


Tracciamo i segmenti PC e PD.
Tracciamo il prolungamento di PO fino ad incontrare il lato DC nel punto Q.
Osserviamo quindi i due triangoli QOC e AOP. Essi hanno: AO$\cong$OC perché metà della diagonale AC (in un parallelogramma le diagonali hanno lo stesso

punto medio, quindi si tagliano scambievolmente per metà); $\widehat{QCO} \cong \widehat{OAP}$ perché angoli alterni interni, formati dall'incontro della trasversale AC con le parallele DC e AB; $\widehat{QOC} \cong \widehat{AOP}$ poiché angoli opposti al vertice. Ne segue che, per il II criterio di congruenza dei triangoli, i triangoli AOP e QOC sono congruenti. Quindi QC$\cong$AP perché lati opposti ad angoli congruenti in triangoli congruenti.
Osserviamo adesso i triangoli ADP e QPC. Essi hanno: QC$\cong$AP; DA$\cong$QP, perché lati obliqui del trapezio isoscele DAPQ (gli angoli $\widehat{DAP}$ e $\widehat{QPA}$ sono congruenti per ipotesi, e sono quindi gli angoli alla base); $\widehat{DAP} \cong \widehat{PQC}$, in quanto $\widehat{DAP} \cong \widehat{QPA}$ per ipotesi, $\widehat{QPA} \cong \widehat{PQC}$ (angoli alterni interni, formati dall'incontro della trasversale PQ con le parallele DC e AB) e per la proprietà transitiva della congruenza $\widehat{DAP} \cong \widehat{PQC}$. Per il I criterio di congruenza DAP$\cong$QCP. Ne segue che PD$\cong$PC perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

5)Soluzione proposta da Mariachiara Rosella, Classe ???? -Liceo Scientifico G.Rummo-Benevento

Dimostrazione relativa al problema di Febbraio 2018 di Flatlandia.



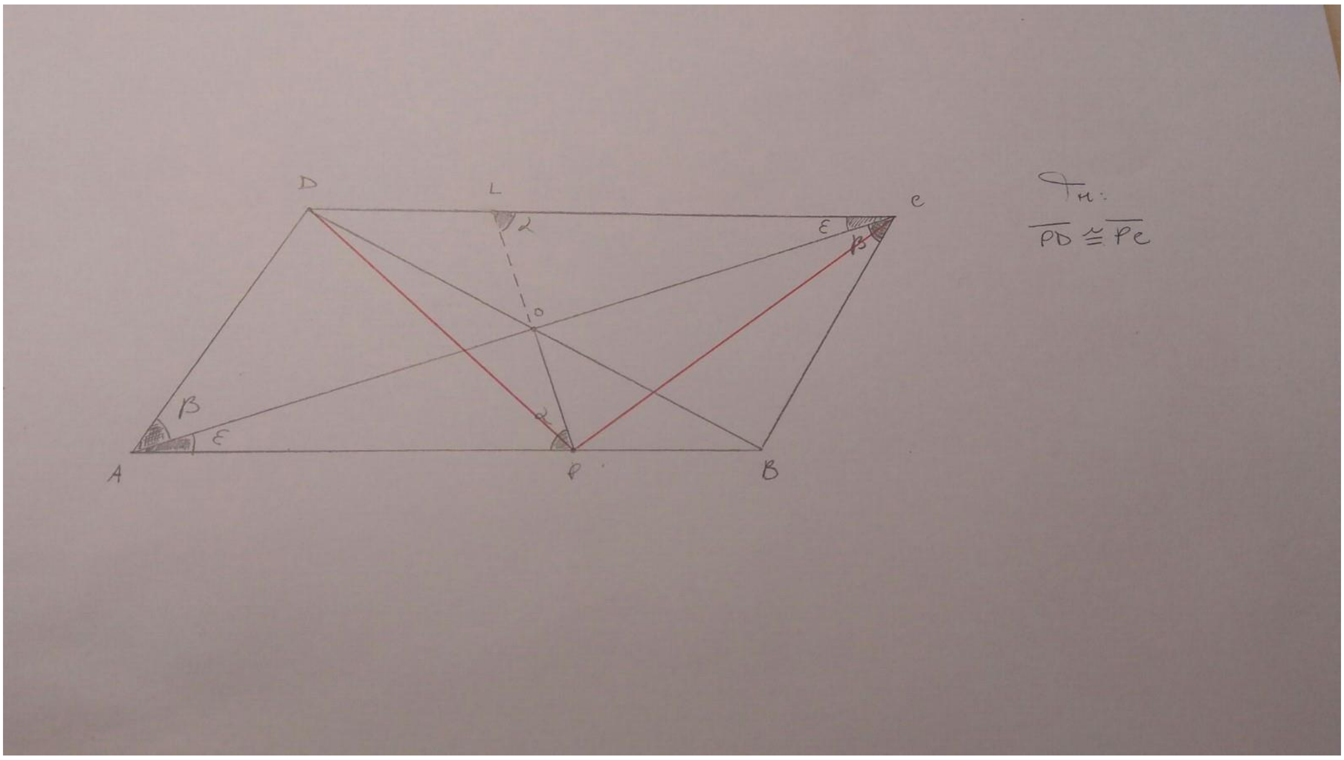
IP: ABCD parallelogramma
L'angolo PAD è congruente all'angolo APO.
TH: PC è congruente a PD

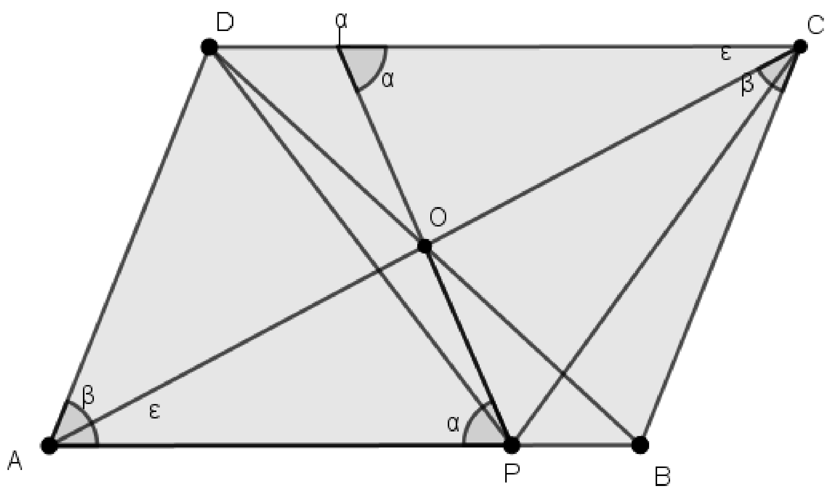
1. Tracciamo i segmenti PC e PD.
2. Prolunghiamo il segmento OP fino ad incontrare DC nel punto W.
3. Considero i triangoli OPB e OWD. Essi hanno:
   -OD e OB congruenti perché nei parallelogrammi le diagonali si dividono scambievolmente a metà.
   -Gli angoli DOW e POB congruenti poiché opposti al vertice.
   -Gli angoli WDO e OBP congruenti perché alterni interni delle rette parallele DC e AB tagliate dalla trasversale DB.
   I triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza.

4. I segmenti DW e PB sono congruenti perché si oppongono a elementi congruenti in triangoli congruenti.
5. I segmenti WC e AP sono congruenti perché uguali alla differenza di segmenti congruenti (AB e DC/ WD e PB).
6. Considero il quadrilatero APWD. Possiamo dire che è un trapezio isoscele perché ha le basi parallele (DC e AP parallele per ipotesi) e gli angoli alla base congruenti(PAD e APO congruenti per ipotesi).
   Quindi DA è congruente a WP perché lati obliqui del trapezio isoscele.
7. Gli angoli APW e CWP sono congruenti perché alterni interni delle rette parallele DC e AB tagliate dalla trasversale WP. Quindi gli angoli CWP e DAP sono congruenti per la proprietà transitiva.
8. Considero i triangoli DAP e CWP. Hanno:
   -WC e AP congruenti come dimostrato nel punto 5.
   -DA e WP congruenti come dimostrato nel punto 6.
   -gli angoli CWP e DAP congruenti come dimostrato nel punto 7.
   Sono congruenti per il primo criterio di congruenza.
   In particolare PC è congruente a PD perché si oppongono a elementi congruenti in triangoli congruenti.

6)Soluzione proposta da Sulpizi Francesco, Roma, liceo scientifico Nomentano, classe II A

Dimostrazione n. 1   (figura di riferimento su file GeoGebra)





[I soprassegni sui segmenti vanno tolti tutti in quanto non si parla di misure]

Ipotesi:

1. Il quadrilatero (ABCD) è un parallelogramma;
2. I segmenti $\overline{AC}$ e [[$\overline{AD}$]] [BD] sono le sue diagonali, che si incontrano in O;
3. Un punto P, sul lato $\overline{AB}$, è tale che O$\hat{P}$A(α) = DÂP[OÂP(ε) + DÂO(β)].

Tesi:

1. $\overline{PD} \cong \overline{PC}$.

Dimostrazione:
1- Gli angoli BÂD e BĈD sono uguali (perché angoli opposti del parallelogramma), in particolare OÂP = OĈL (per angoli alterni interni, considerando $\overline{AC}$ trasversale e [[$\overline{CB}//\overline{DA}$]] [AB//CD] , poiché lati opposti del parallelogramma) quindi per differenza di angoli uguali OÂD = OĈB.
2- Tracciando il prolungamento del segmento $\overline{PO}$ fino ad incontrare il lato $\overline{DC}$, si ottiene il segmento $\overline{PL}$. [Dirlo subito perché il punto L viene usato nel punto 1]
3- Essendo $\overline{DC}$ e $\overline{BA}$ lati opposti del parallelogramma, essi sono paralleli. Dunque, per angoli alterni interni, si ha che O$\hat{P}$A(α) = O$\hat{L}$C, considerando $\overline{PL}$ come trasversale.
4- Osservando la figura si possono distinguere due quadrilateri: (DAPL) e (PBCL).
5- Avendo rispettivamente $\overline{DL}//\overline{AP}$, $\overline{PB}//\overline{CL}$ e due lati obliqui ($\overline{DA}$ e $\overline{LP}$ il primo, $\overline{LP}$ e $\overline{CB}$ il secondo), i quadrilateri sono trapezi.
6- Considerando gli angoli alla base α e (ε + β), si ha che α = ε + β (per ipotesi), quindi i due trapezi sono isosceli, dunque $\overline{DA} \cong \overline{LP} \cong \overline{CB}$.
7- Presi i triangoli (OAP) e (LOC), dal momento che essi hanno:

- L$\hat{O}$C = P$\hat{O}$A (perché angoli opposti al vertice);
- $\overline{OC} \cong \overline{OA}$ (dato che le diagonali del parallelogramma si incontrano nel loro punto medio);
- [[ε in comune]] [OÂP = OĈL per dimostrazione n.1];

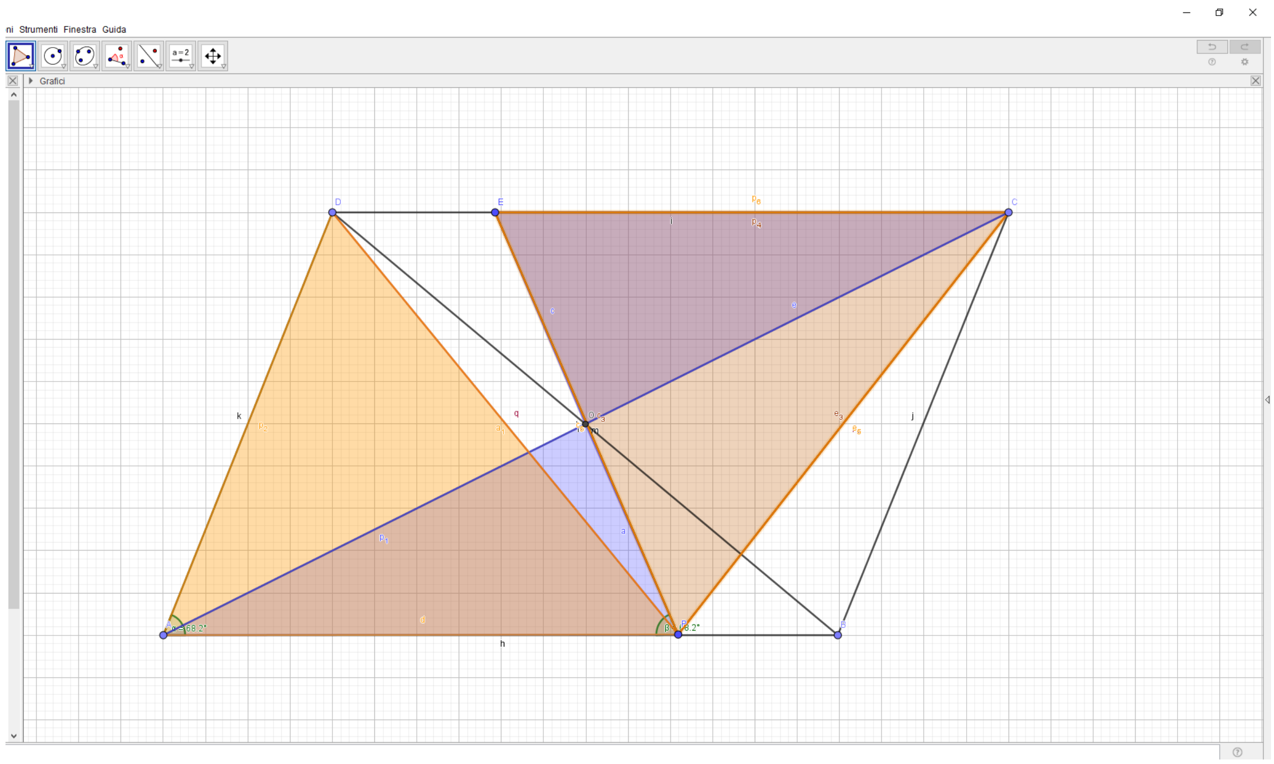
sono congruenti (per il II criterio di congruenza dei triangoli) [da cui LC=PA].
8- Infine, considerando i due triangoli (DAP) e (CLP), essi hanno:

- $\overline{DA} \cong \overline{LP}$ (perché lati obliqui del trapezio isoscele);
- [[$\overline{LC} \cong \overline{PA}$]] [PA=LC] (per dimostrazione precedente);
- [[α = ε + β (per ipotesi)]] [DAP=PLC per precedente dimostrazione]

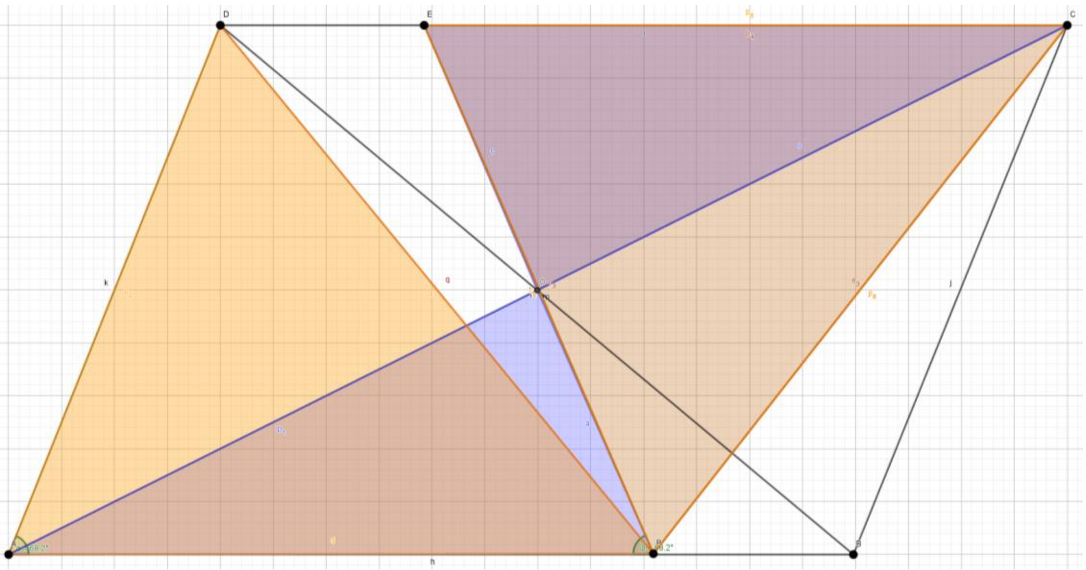
Dunque, sono congruenti (per il I criterio di congruenza dei triangoli), in particolare, $\overline{DP} \cong \overline{PC}$, che è la Tesi iniziale.

7)**Soluzione proposta da** Chiara Bono 2^H, Liceo Aristosseno (Taranto)

Rappresentazione della figura su Geogebra



Ingrandimento della figura



Ipotesi:
ABCD parallelogramma
Angolo APO ≅ DAP

Tesi:
DP ≅ PC

Procedimento:

- Prolungare il segmento PO fino al punto d'incontro E con il lato CD
- Considerando il trapezio APED, osserviamo che è isoscele, in quanto gli angoli adiacenti alla base maggiore AP sono congruenti per ipotesi. Deduciamo perciò che AD≅PE perché lati obliqui di un trapezio isoscele.
- Gli angoli CEP e APE sono congruenti perché alterni interni di rette parallele tagliate dalla trasversale EP. Essendo l'angolo APE coincidente con APO e APO congruente a DAP per ipotesi, deduciamo per proprietà transitiva che gli angoli CEP e DAP sono congruenti.

- [Consideriamo adesso i triangoli AOP e EOC.]
- AO≅OC perché il punto di incontro O delle diagonali le dimezza
- Gli angoli AOP e EOC sono congruenti in quanto opposti al vertice
- Gli angoli OAP e ECA sono congruenti perché alterni interni di rette parallele tagliate dalla trasversale AC
- Per il secondo criterio di congruenza [[affermiamo che]] il triangolo AOP e il triangolo EOC sono congruenti, in quanto abbiamo dimostrato che hanno rispettivamente congruenti un lato (AO ≅ OC) e gli angoli ad esso adiacenti (AOP ≅ EOC e OAP ≅ ECA). Dalla congruenza di tali triangoli, deduciamo che AP≅ EC
- [Consideriamo adesso i triangoli ADP e PEC.]
- [Essi sono congruenti per il primo criterio] [[Per il primo criterio, definiamo i triangoli ADP e PEC congruenti]], in quanto hanno rispettivamente congruenti due lati (AD≅PE e AP≅ EC) e l'angolo fra essi compreso ([[CEP ≅ DAP]] [DAP ≅ CEP]). Dalla congruenza di questi triangoli deduciamo infine che DP ≅ PC, come volevasi dimostrare.