FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

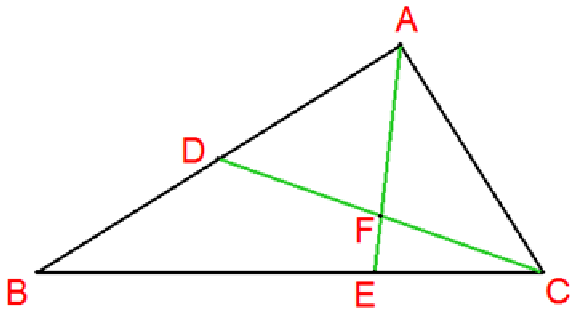
Flatlandia Problema 13 – 27 gennaio 2017 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia, 16-30 gennaio 2017

Nel triangolo ABC, rettangolo in A, D è il punto medio di AB ed E è il punto di BC tale che $BE = 2CE$.

a) Costruire con riga e compasso il punto E.
b) Provare che gli angoli ADC e BAE sono congruenti.
c) Dimostrare che il triangolo AFC è isoscele.



Motivare tutte le risposte.

Commento
Sono giunte tre risposte, da due classi II e da una classe III di tre Licei Scientifici.

Il problema pone tre quesiti relativi a un triangolo rettangolo.
Nel primo punto si chiede di costruire con riga e compasso un punto E in modo che E divida il segmento in rapporto 2:1.
Nella seconda domanda si deve dimostrare la congruenza di due angoli.
Nella terza domanda, infine, si chiede di provare che un dato triangolo è isoscele.

Delle risposte giunte solo una risponde correttamente alle tre domande. Nelle altre due sono presenti prolissità e lungaggini sia nella costruzione in risposta al primo quesito che nelle dimostrazioni vere e proprie.
La divisione di un segmento in n parti congruenti e' una delle costruzioni piu' importanti e note della geometria euclidea e non richiede certamente molto passaggi.

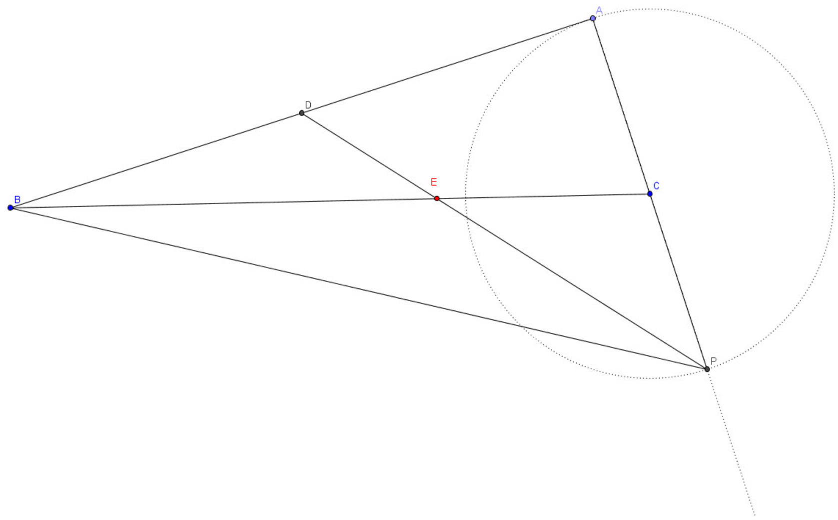
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo “Aristosseno”, Indirizzo Liceo Scientifico, Taranto (TA)
- Liceo Scientifico “G. Galilei”, Alessandria (AL)
- Liceo “Bertrand Russell” - Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

1) ***Classe III H ad indirizzo Liceo Scientifico, Liceo "Aristosseno", Taranto***

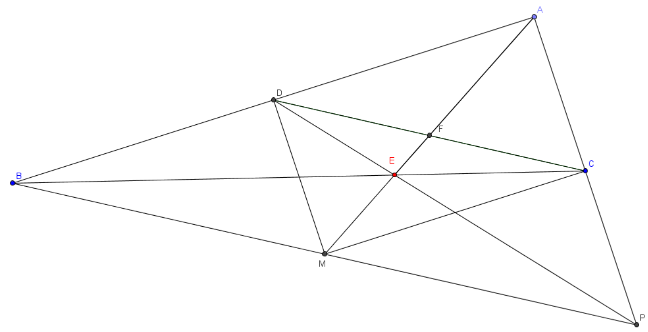
Problema Gennaio 2017
Soluzione proposta dalla classe 3 H Liceo Aristosseno Taranto



a)

Costruito il triangolo rettangolo ABC ,prolunghiamo il cateto AC dalla parte di C ,di un segmento CP congruente ad esso. Congiungiamo quindi il punto P con B ed osserviamo che nel triangolo BAP il segmento BC è la mediana relativa al lato AP e PD è la mediana relativa al lato AD. Sappiamo che in un triangolo le mediane si incontrano in un unico punto(il baricentro),dividendosi in due parti di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra. Nel triangolo BAP il punto E è il baricentro e pertanto si ha che BE = 2CE .

b) Tracciamo il punto medio M del lato BP e osserviamo che il segmento CM è parallelo al lato AB ed è la sua metà e l'angolo MCA,dato il parallelismo, è retto .Il quadrilatero MCAD è quindi un rettangolo avendo i lati opposti congruenti e paralleli e gli angoli retti. Le diagonali di questo rettangolo sono congruenti e i triangoli rettangoli CAD ed MAD ,essendo congruenti,hanno gli angoli acuti ADC ed [DAE] [[MAE]] (o,che è lo stesso BAE) congruenti.



c) Il triangolo AFC è isoscele poiché i suoi lati FA ed FC sono le metà delle diagonali congruenti del rettangolo MCAD.

2) ***Luciano Spettoli , 2° sez. E Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria (2 versioni)***

Versione 1

Autore: Luciano Spettoli
Classe 2 sez. E
Scuola Liceo Scientifico Galileo Galilei
Città Alessandria

PROBLEMA FLATLANDIA

-Ipotesi

$(BAC)^{=90}$°

$\overline{BD} \cong \overline{AD}$

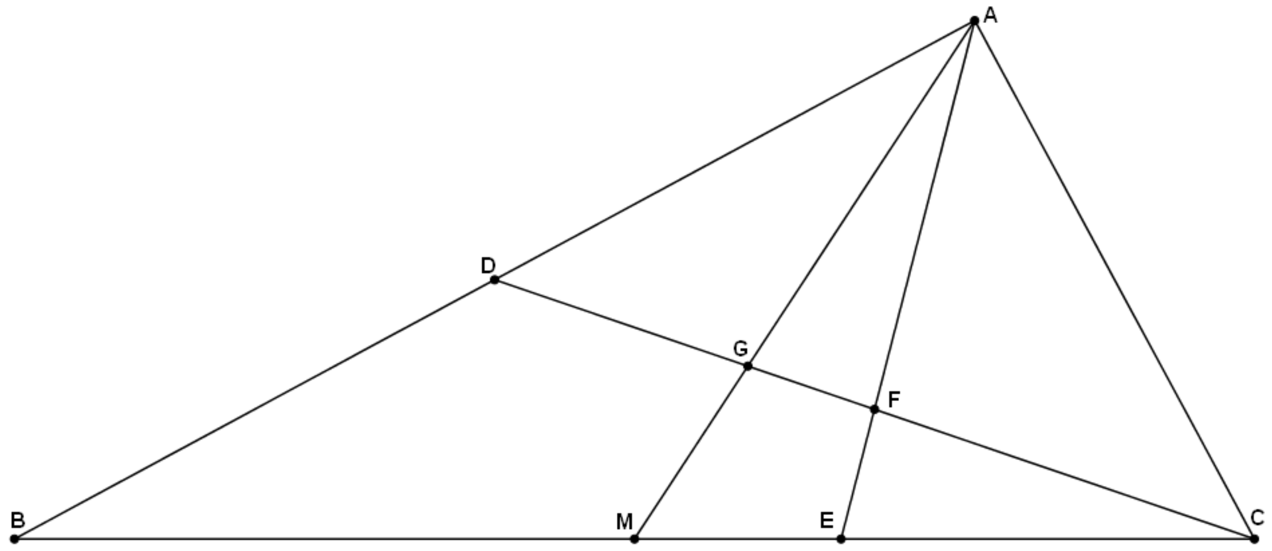
$\overline{BE} \cong 2\overline{EC}$

-Tesi:

1) $(ADC)^{\cong (BAE)}$

2) Triangolo AFC è isoscele

- Costruire con riga non graduata e compasso il punto E e dimostrarne la costruzione



[Parte 2] [[Parte 1]] –

Dimostrare che $(ADC)^{\cong(BAE)}$ e che il triangolo AFC è isoscele

Costruiamo M su $\overline{BC}$ in modo che $\overline{BM} \cong \overline{MC}$. Dunque $\overline{AM}$ è una mediana relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC e dunque $\overline{BM} \cong \overline{MC} \cong \overline{AM}$.

Poiché $\overline{BE} \cong 2\overline{EC}$ (per ipotesi), allora $\overline{BC} \cong 2\overline{EC} + \overline{EC} \cong 3\overline{EC}$ da cui $\overline{EC} \cong \frac{\overline{BC}}{3}$.

Poiché $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ (per costruzione), allora $\overline{BC} \cong 2\overline{BM} \cong 2\overline{MC}$ dunque $\overline{MC} \cong \frac{\overline{BC}}{2}$

Il segmento $\overline{ME}$ è la differenza tra $\overline{MC}$ ed $\overline{EC}$, perciò $\overline{ME} \cong \overline{MC} - \overline{EC} \cong \frac{\overline{BC}}{2} - \frac{\overline{BC}}{3} \cong \frac{(3\overline{BC} - 2\overline{BC})}{6} \cong \frac{\overline{BC}}{6}$

dunque $\overline{ME} \cong \frac{\overline{BC}}{6}$.

Poiché D è il punto medio di $\overline{AB}$ (per ipotesi), allora $\overline{DC}$ è mediana relativa al cateto $\overline{AB}$.

Dunque l'intersezione G tra la mediana $\overline{MA}$ e la mediana $\overline{DC}$ è il baricentro del triangolo e per tale motivo $\overline{GA} \cong 2\overline{GM}$ e $\overline{GC} \cong 2\overline{DG}$.

Dunque $\overline{AM} \cong \overline{GA} + \overline{GM} \cong 2\overline{GM} + \overline{GM} \cong 3\overline{GM}$ e poiché $\overline{AM} \cong \frac{\overline{BC}}{2}$ (per precedente dimostrazione), allora $\frac{\overline{BC}}{2} \cong 3\overline{GM}$ dunque $\overline{GM} \cong \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)\overline{BC} \cong \frac{\overline{BC}}{6}$ e poiché anche $\overline{ME} \cong \frac{\overline{BC}}{6}$ (per precedente dimostrazione) allora si ha $\overline{ME} \cong \overline{MG}$.

Dimostriamo che il triangolo MEA è congruente al triangolo MGC :

L'angolo $(CMA)^{\square}$ è in comune

$\overline{ME} \cong \overline{MG}$ (per precedente dimostrazione)

$\overline{AM} \cong \overline{MC}$ (per precedente dimostrazione)

Dunque per il primo criterio di congruenza i due triangoli sono congruenti ed essi hanno rispettivamente congruenti tutti i loro elementi ed in particolare $(MCG)^{\cong(EAM)^{\square}}$.

L'angolo $(BCA)^{\square}$ è la somma dell'angolo $(MCG)^{\square}$ con l'angolo $(GCA)^{\square}$ ma lo si può anche definire sfruttando la somma degli angoli interni di un poligono: $(BCA)^{\cong} 180° - (BAC)^{-(ABC)^{\cong 180}} ° - 90° - (ABC)^{\cong 90} ° - (ABC)^{\square}$ perciò $(MCG)^{+(GCA)^{\cong 90}} ° - (ABC)^{\square}$.

L'angolo $(BAC)^{\square}$ è retto (90°), per ipotesi, ed è anche uguale a $(EAC)^{+(MAE)^{+(BAM)^{\square}}}$.

Il triangolo BMA è isoscele (di base $\overline{AB}$) in quanto $\overline{BM} \cong \overline{MA}$ (per precedente dimostrazione); dunque $(MAB)^{\cong(ABC)^{\square}}$. Perciò avendo $(BAC)^{\cong(EAC)^{+(MAE)^{+(BAM)^{\square}}}}$, si ottiene $90° = (EAC)^{+(MCG)^{+(ABC)^{\square}}}$ e perciò si ha $90° - (ABC)^{\cong(MCG)^{+(EAC)^{\square}}}$.

Poiché si ha anche $(MCG)^{+(GCA)^{=90}} ° - (ABC)^{\square}$ (per precedente dimostrazione) allora si può affermare che $(MGC)^{+(GCA)^{\cong(MCG)^{+(EAC)^{\square}}}}$ e dunque $(GCA)^{\cong(EAC)^{\square}}$.

Per questo motivo il triangolo CAF è isoscele (di base $\overline{AC}$) poiché i suoi angoli alla base sono congruenti ($(GCA)^{\cong(EAC)^{\square}}$). (*Dimostrata tesi [3] [[1]]*)

Il triangolo DCA è rettangolo in quanto l'angolo $(DAC)^{\square}$ è retto per ipotesi.

Poiché $(GCA)^{\cong(EAC)^{\square}}$ (per precedente dimostrazione) e poiché $(DAC)^{\cong(DAE)^{+(EAC)^{\square}}}$ allora è possibile dire che $(ADC)^{\cong 180} ° - (DAC)^{-(ACD)^{\cong 180}} ° - 90° - (ACD)^{\cong 90} ° - (ACD)^{\square}$.

Poiché $(DAC)^{\cong(DAE)^{+(EAC)^{\square}}}$ e $(ACD)^{\cong(EAC)^{\square}}$ (per precedente dimostrazione), allora $90° = (DAE)^{+(ACD)^{\square}}$ e dunque $90° - (ACD)^{\cong(DAE)^{\square}}$.

Poiché si ha anche che $90° - ACD \cong (ADC)^{\square}$, allora $(ADC)^{\cong(EAD)^{\square}}$. (*Dimostrata tesi 2*)

C.V.D.

Parte 2 [[…]]

Versione 2

PROBLEMA FLATLANDIA (versione 2)

[[….]]

3) ***Mattia Corrà, 2D, scuola superiore "Bertrand Russell" Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)***

[[…]]