FLAT*landia*

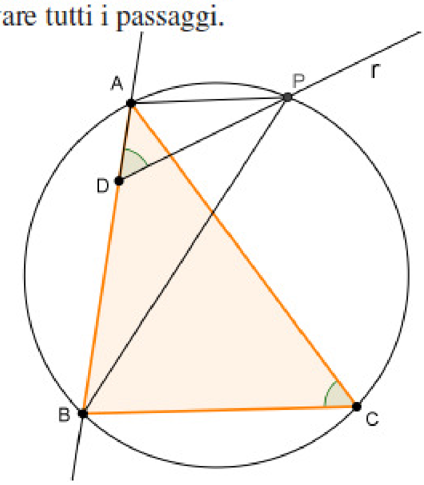
"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *[(Edwin A. Abbott)]*

Flatlandia Problema 13 – 27 febbraio 2017 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Flatlandia - Problema 13-27 Febbraio 2017

Sia ABC un triangolo e sia D un punto su AB tale che $AB=4AD$.
La semiretta r condotta da D dalla stessa parte di C rispetto ad AB forma con DA un angolo uguale ad ACB e incontra il circocerchio di ABC in P (vedi figura).
1) Provare che i triangoli ADP e APB sono simili.
2) Dedurne che $PB=2PD$.
Motivare tutti i passaggi.



Commento

Sono giunte 10 risposte, da classi II di tre Licei Scientifici e da una classe III di Liceo Scientifico.

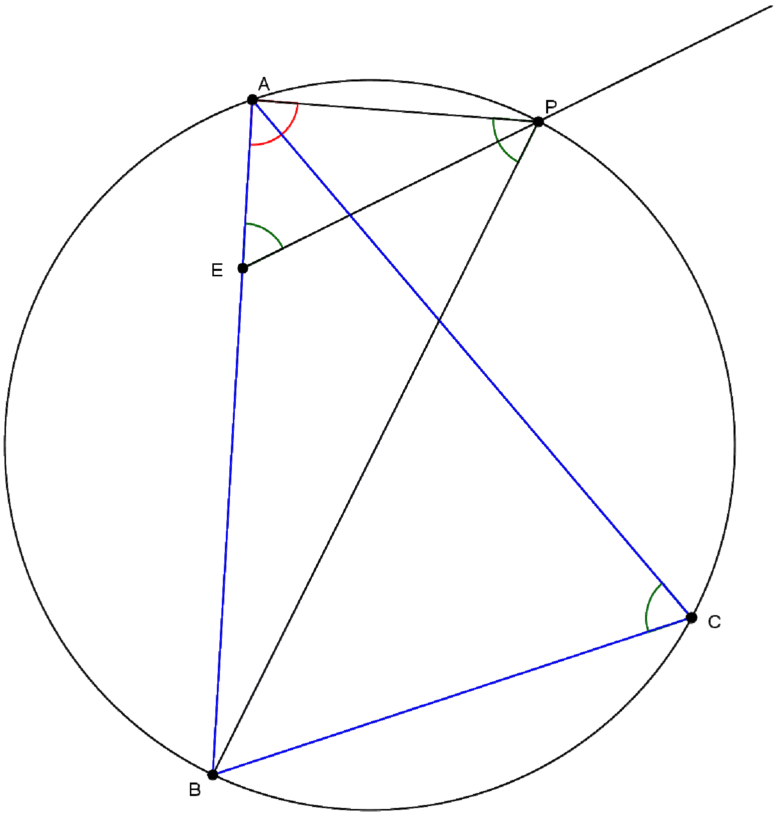
Il problema pone due quesiti relativi a un triangolo inscritto in una circonferenza.
Nel primo si chiede, basandosi sulla figura proposta, di dimostrare che due triangoli sono simili.
Nel secondo si chiede di dimostrare, basandosi anche sul precedente quesito, di dimostrare una relazione tra due segmenti.
Tutti rispondono correttamente, seguendo anche strade diverse, ai due quesiti. Notiamo però un uso un po' approssimativo delle incognite, perché spesso non vengono indicate le grandezze a cui si riferiscono. Inoltre è bene, parlando di angoli alla circonferenza, esplicitare l'arco su cui essi insistono.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo "Aristosseno", Indirizzo Liceo Scientifico, Taranto (TA)
- Liceo Scientifico Scienze Applicate "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)
- Liceo "Bertrand Russell", Indirizzo Scientifico Scienze Applicate, Cles (TN)
- Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria (AL)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni arrivate

1) ***Classe III H Liceo Scientifico, Liceo "Aristosseno", Taranto***



1)

Gli angoli APB e ACB sono congruenti perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco *AB*. Per ipotesi,l'angolo ACB è congruente all'angolo ADP e quindi per la proprietà transitiva risultano congruenti gli angoli APB e ADP.

L'angolo DAP è in comune e quindi per il primo criterio di similitudine i triangoli APB e ADP sono simili.

2)

Nei triangoli simili i lati corrispondenti sono proporzionali e quindi per i triangoli APB e ADP possiamo scrivere $PB : PD = AB : AP = AP : AD$. Essendo però $AB = 4AD$,dalla proporzione continua $AB : AP = AP : AD$ ricaviamo che $AP^2 = 4\ AD^2$ da cui si ha che $AP = 2AD$. Deduciamo quindi che il rapporto di similitudine dei due triangoli è pari a 2 e allora è $PB = 2PD$.

2) Beatrice Podini, 2T I.I.S.-Liceo Scientifico Scienze Applicate "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

<u>IPOTESI</u>:
-AB=4AD;
-l'angolo ADP congruente all'angolo BCA;
-il triangolo ABC inscritto nella circonferenza.

<u>TESI</u>:
-I triangoli ABP e ADP sono simili;
-PB=2PD.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>:

1) I triangoli ABP e ADP hanno:

- l'angolo in A in comune;
- l'angolo ADP congruente all'angolo BPA per la proprietà transitiva. Infatti l'angolo ADP per ipotesi è congruente all'angolo BCA e l'angolo BCA è congruente all'angolo APB perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB.
- l'angolo DPA congruente all'angolo ABP di conseguenza, per differenza di angoli congruenti.

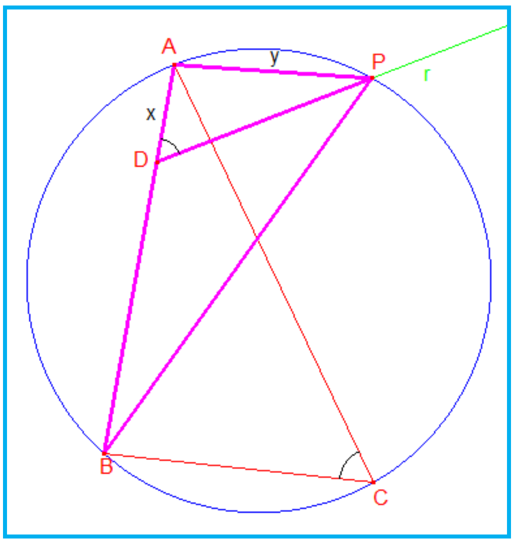
Quindi i triangoli ABP e ADP sono simili perché hanno [i] tre angoli congruenti.

2) Chiamiamo [[AD *x* e AP *y* e di conseguenza AB=4*x* per ipotesi]] [x la misura di AD, di conseguenza la misura di AB e' 4x per ipotesi].

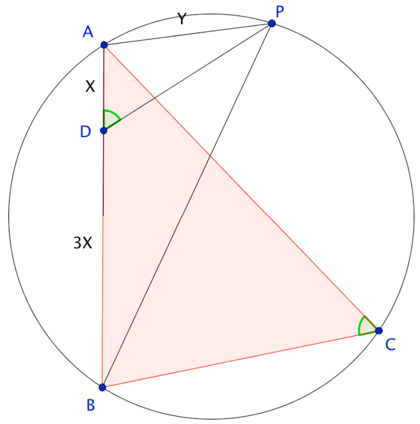
Sapendo che se due triangoli sono simili il rapporto fra i lati omologhi è lo stesso, [[diciamo]] [abbiamo] che $\frac{AD}{AP}=\frac{AP}{AB}$ e quindi:

$$\frac{AD}{AP}=\frac{AP}{AB} \rightarrow AD:AP=AP:AB \rightarrow AP^2=AD\cdot AB \rightarrow AP^2=x\cdot 4x \rightarrow AP^2=4x^2 \rightarrow AP=2x$$

Essendo $AP=2x=2AD$ anche $PB=2PD$.



3) Elisa Ianes, Classe 2^D Liceo “B. Russell”, Cles (TN)



Tesi 1: i triangoli ADP e APB sono simili
Ipotesi 1:
AB = 4AD

gli angoli ADP≅BCA

Dimostrazione 1:

gli angoli APB≅ACB perché sottendono lo stesso arco

gli angoli APB≅ADP per dimostrazione precedente

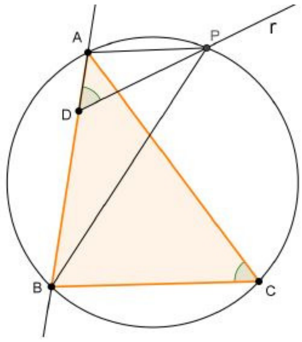
l'angolo PAD in comune

gli angoli APD≅ABP per sottrazione angoli congruenti

=> i triangoli APD e APB sono triangoli simili perché hanno tutti gli angoli congruenti

Tesi 2 [[   ]] [Poniamo AD=x e AP=y. Dalla similitudine dei triangoli segue che AB:AP=AP:AD, ossia 4x:y=y:x, ossia y=2x.]

4) Alessandro Alemagna, 2^ T IIS-Liceo Scientifico Scienze Applicate “Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)



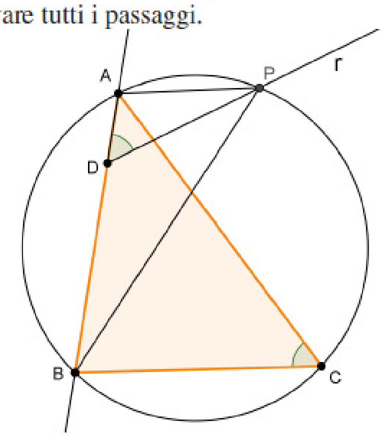
Ipotesi:
-AB=4AD
-ACB=ADP
Tesi:
1. APB simile ad APD
2.PB=2PD

Dimostrazione
1.
ADP=ACB per ipotesi
ACB=BPA perché insistono sullo stesso arco [AB].
Quindi BPA=ADP perché congruenti allo stesso angolo (ACB).
PAB=PAD perché in comune siccome D appartiene ad AB
APB simile ad APD perché (PAD-PDA=PAB-APB)
2.
Poiché APB simile ad APD sui lati posso scrivere
AP/AD=AB/AP
Cioé $(AP)^2=AB*AD=4AD*AD=4(AD)^2$
da cui si ricava AP=2AD , quindi i triangoli sono simili e in particolare i lati di ABP sono doppi [[dell'altro]] [dei corrispondenti lati dell’altro].
Da questo si ricava che PB è doppio del suo corrispondente PD (Cioè PB=2PD).

5) Carola Cambielli, 2T IIS-Liceo Scientifico Scienze Applicate “Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)

Flatlandia - Problema 13-27 Febbraio 2017

Sia *ABC* un triangolo e sia *D* un punto su *AB* tale che *AB=4AD*.
La semiretta *r* condotta da *D* dalla stessa parte di *C* rispetto ad *AB* forma con *DA* un angolo uguale ad *ACB* e incontra il circocerchio di *ABC* in *P* (vedi figura).
1) Provare che i triangoli *ADP* e *APB* sono simili.
2) Dedurne che *PB=2PD*.
Motivare tutti i passaggi.



IPOTESI:

- AB=4AD
- A

TESI

- Triangolo APB simile al triangolo ADP
- PB=2PD

DIMOSTRAZIONE:

- ACB è congruente all'angolo APB perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Per proprietà transitiva quindi l'angolo APB è congruente all'angolo ADP.
- L'angolo [[BAD]] [BAP] è congruente all'angolo DAP perché in comune
- L'angolo ABP è congruente all'angolo APD perché in un triangolo la somma degli angoli interni è 180 gradi e: 180°-[[$(D\hat{A}P + B\hat{A}P) = A\hat{P}D$]] [DAP+ADP=APD] Quindi

180°- $(A\hat{P}B + B\hat{A}P) = A\hat{B}P$

Quindi il triangolo ADP è simile al triangolo APB.
I lati [[AP,AD,AB]] [AP,AD e AB,AP] sono omologhi.

$$\frac{AP}{AD} = \frac{AB}{AP}$$

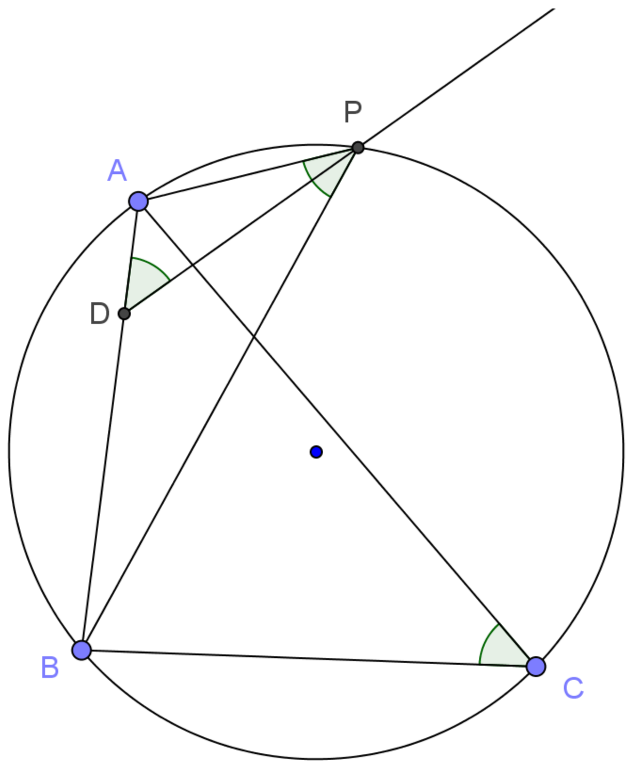
$$AP^2 = AB\ x\ AD$$

$$AB\ x\ AD = 4AD\ x\ AD = 4(AD)^2$$

Da queste equazioni si ricava AP=2AD. Il rapporto tra AP e AD è quindi 2:1. Di conseguenza il rapporto il rapporto tra PB e il suo corrispondente PD è 2:1. Quindi PB=2PD.

6) ***Mattia Corrà, Classe 2^D IIS-Liceo "B. Russell", Cles (TN)***

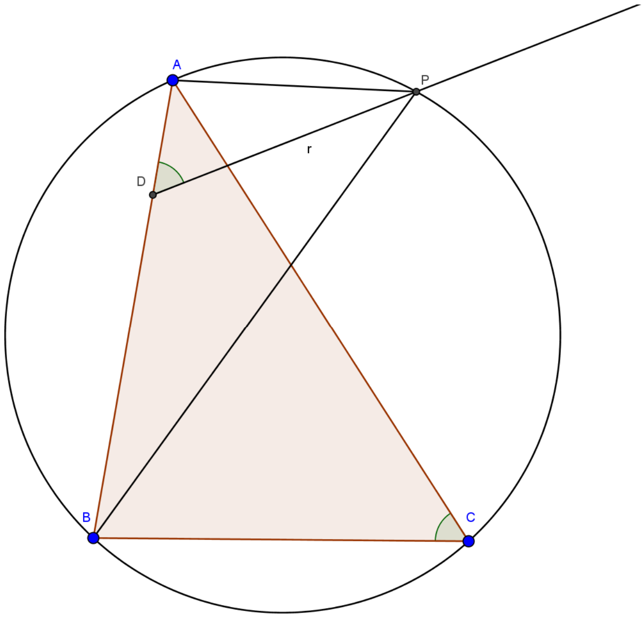
Punto 1)



IP: ABC è un triangolo inscritto in una circonferenza, AB=4AD e gli angoli ADP e ACB sono congruenti.
TS: I triangoli ADP e APB sono simili.
DIM:
Gli angoli alla circonferenza ACB e BPA sono congruenti perché insistono sullo stesso arco [AB] quindi l'angolo BPA è congruente all'angolo ADP per la proprietà transitiva (gli angoli ADP e ACB sono congruenti per ip.).
L'angolo BAP è in comune ai due triangoli ADP e APB e quindi visto che l'angolo BPA è congruente all'angolo ADP anche gli angoli DPA e PBA sono congruenti per differenza di angoli uguali da 180°.
Allora i triangoli ADP e APB sono simili avendo gli angoli congruenti, a due a due.
Punto 2)
IP: ABC è un triangolo inscritto in una circonferenza, AB=4AD, gli angoli ADP e ACB sono congruenti e i triangoli ADP e APB sono simili.
TS: PB=2PD.
Visto che i triangoli ADP e APB sono simili vale la seguente relazione tra i lati: AD:AP=AP:AB=PD:PB.
Allora visto che AB=4AD AD:AP=AP:4AD da cui AP=2AD. Allora [sussiste] anche la relazione PB:PD=2AD(cioè AP):AD da cui PB:PD=2, quindi PB=2PD.

C.V.D.

7) Madalina Cocu, Classe 2^D IIS-Liceo “B. Russell”, Cles (TN)



1) Considero [[l’angolo]] [gli angoli] APB e ACB; questi sono uguali perché insistono [[allo]] [sullo] stesso arco di circonferenza e per proprietà transitiva, siccome l’angolo ADP=ACB per ipotesi, l’angolo APB=ADP.

Considero i triangoli ABP e ADP; questi hanno:

-l’angolo BAP in comune

-l’angolo APB=ADP per il motivo sopra descritto

-APD=ABP per differenza di angoli nei triangoli; siccome 180-APB-PAB =ABP, e i due angoli sottratti sono uguali agli angoli sottratti del triangolo ADP, ABP=APD

Allora i due triangoli APB e ADP sono simili perché hanno [i] tre angoli congruenti.

Da questo deduciamo per i [[principi]] [criteri] di similitudine che AB/AP=PB/PD=AP/AD.

Sappiamo per ipotesi che AD=1/4 di AB

Quindi :

4AD : AP= AP : AD

4 *(AD^2) =AP^2

2AD=AP

Quindi :

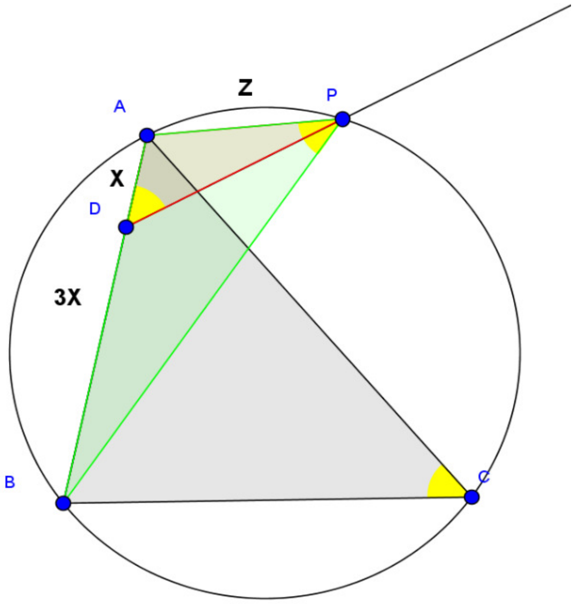
PB/PD=2AD/AD

PB/PD=2

PB=2PD

c.v.d

8) ***Vincenzo Chini, Classe 2^D , Liceo Bertrand Russell, Cles***



1)

Tesi: I triangoli ADP e APB sono simili

Ipotesi: AB =4AD

ACB=ADP

Dimostrazione:

[[APD]] [APB] =ACB poiché sottendono lo stesso arco

[[APD]] [APB] =ADP per la proprietà transitiva

I triangoli ADP e APB sono simili poiché hanno due angoli congruenti:BAP in comune, [[APD]] [APB] e ADP per precedente dimostrazione.

2)

Tesi: PB=2PD

Ipotesi: AB =4AD

ACB [simile] ADP

Dimostrazione:

Poniamo AD=[[X]] [x]

Di conseguenza AB=[[4X]] [4x] e DB=[[3X]] [3x].

Poniamo poi AP=[[Z]] [z].

Essendo i due triangoli simili hanno una relazion tra i loro lati:
AP:AB=AD:AP percui [[Z:4X=X:Z]] [z:4x=x:z]
[[Z^2=4X^2]] [z^2=4x^2]
[[Z=2X]] [z=2x]
I lati del triangolo APB sono quindi il doppio di quelli [corrispondenti] del triangolo ADP.
Per cui il segmento PB è il doppio del segmento PD.

9)Davide Scanzoni, Classe 2^D ,Liceo Bertrand Russell, Cles

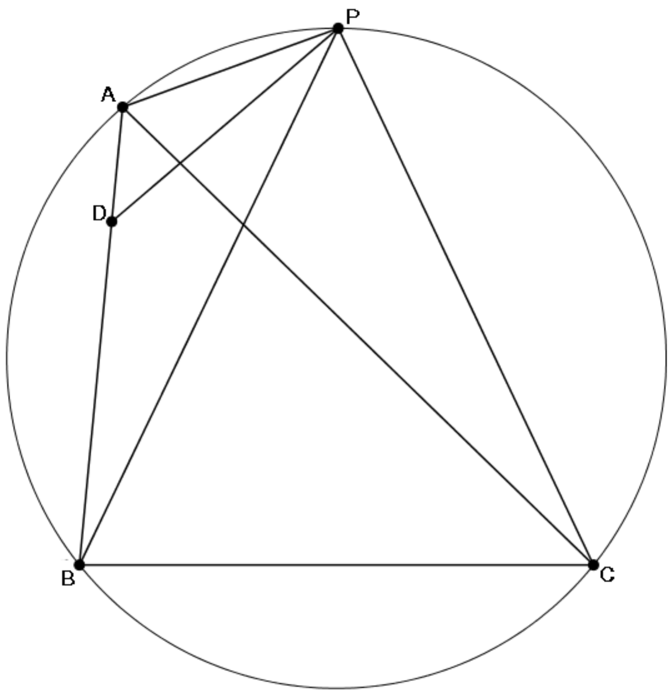
Tesi 1): i triangoli ABP e ADP sono simili
Tesi 2): PB = 2PD

Ipotesi: gli angoli ACB e ADP sono congruenti
AB = 4AD

Dimostrazione 1): gli angoli APB e ACB sono congruenti perché
sottendono lo stesso arco [AB e quindi PDA e' congruente ad APB]
[I triangoli ABP e ADP] hanno l'angolo BAP in comune
l'angolo PDA è congruente all'angolo APB per
precedente dimostrazione
=> i triangoli ABP e ADP sono simili

Dimostrazione 2): y:4x=x:y
$y^2=4x^2$
y=2x
=>BP=2DP perché triangoli simili [cosa indicano x e y ?]

10)Luciano Spettoli, Classe 2^E, Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Alessandria



Ipotesi:

- $\overline{AB} = 4 \cdot \overline{AD}$
- $(ADP)^{=(ACB)}$

Tesi:

- Triangolo ADP simile al triangolo APB
- $\overline{PB} = 2 \cdot \overline{PD}$

La dimostrazione si basa sul notare che gli angoli $(APB)^{\square}$ e $(ACB)^{\square}$ insistono sullo stesso arco e dunque sono congruenti: $(APB)^{=(ACB)^{\square}}$ poiché sono angoli alla circonferenza in una stessa circonferenza e insistono sullo stesso arco. Poiché, per ipotesi, si ha anche $(ADP)^{=(ACB)^{\square}}$, allora, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, si ha $(ADP)^{=(ACB)^{=(APB)^{\square}}}$.

I triangoli ADP e ABP sono simili poiché: $(APB)^{=(ADP)^{\square}}$ (per precedente dimostrazione) e $(BAP)^{\square}$ è in comune; $(APD)^{\square}$ e $(ABP)^{\square}$ sono congruenti per la somma degli angoli interni di un triangolo (ovvero per differenza di angoli congruenti).

Dato che i triangoli ADP e ABP sono simili, allora le coppie di lati corrispondenti stanno in proporzione: $\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}$ e poiché $\overline{AB}=4\cdot\overline{AD}$ (per ipotesi), allora: $\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{4\cdot\overline{AD}}{\overline{AP}}$ e quindi si ricava: $\overline{AP}^2=4\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AD}$ da cui $\overline{AP}=\sqrt{4\cdot\left(\overline{AD}^2\right)}=2\cdot\overline{AD}$ perciò $\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=2$ e per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha: $\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}=2$ ed in particolare $\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}=2\Rightarrow\overline{PB}=2\cdot\overline{PD}$.

C.V.D.