FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 12 - 26 ottobre 2015 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sono dati i triangoli ABD e CBD, aventi $AB \cong CB$ e $A\hat{D}B \cong C\hat{D}B$.

1) Costruire la figura con riga e compasso e dire perché in generale i triangoli ABD e CBD non sono congruenti.
2) Nell'ipotesi che ABD e CBD non siano congruenti e siano situati da parti opposte rispetto alla retta BD, sia C' il punto sulla semiretta DA tale che $DC' \cong DC$. Provare che i triangoli BCD e $BC'D$ sono congruenti. Dedurne che gli angoli $B\hat{C}D$ e $B\hat{A}D$ sono supplementari.

Motivare le risposte.

Commento

Sono giunte sette risposte, da classi II e III di cinque Licei Scientifici.

Il problema poneva due quesiti relativi a due triangoli. Nel primo quesito si chiedeva di costruire con riga e compasso i due triangoli e di dire perché, in generale, i due triangoli non fossero congruenti.
Nel secondo quesito, supponendo i due triangoli non congruenti, si chiedeva di dimostrare che allora avevano due angoli tra loro supplementari (ovvero che il quadrilatero ottenuto, unendo i due triangoli, è ciclico).
L'idea alla base del problema è di sottolineare come i criteri di congruenza dei triangoli abbiano una formulazione ben precisa che ne richiede una attenta applicazione per essere utilizzati. In particolare nel primo criterio l'angolo congruente deve essere necessariamente quello compreso tra i lati congruenti.

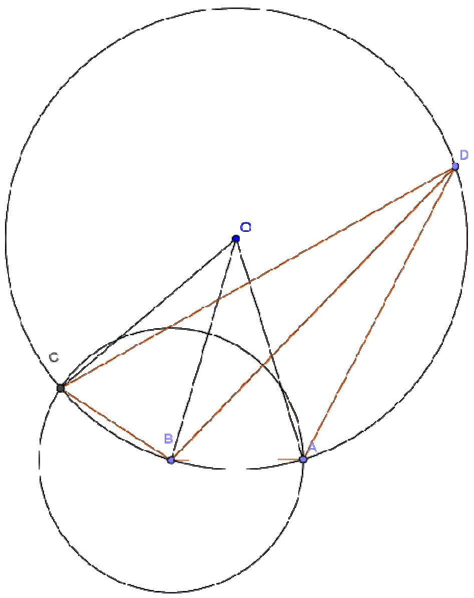
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- LS "U. Dini", Pisa
- LS "Aristosseno", Taranto
- Liceo Classico "F. Stabili", Ascoli Piceno
- Liceo Scientifico "G. Terragni" Olgiate Comasco (CO)
- Liceo Scientifico "XXV Aprile" Portogruaro (VE)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

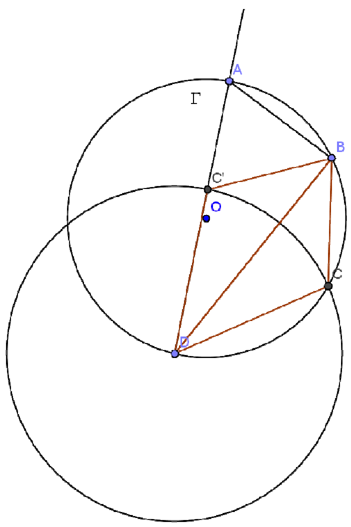
Simmaco De Lillo, Classe 3G, Liceo Scientifico "U. Dini", Pisa



1) Costruire con riga e compasso due triangoli ADB e CDB tali che $\overline{AB}=\overline{CB}$ e $\angle ADB=\angle CDB$

Sia Γ una circonferenza di centro O e raggio r e siano A,B,D 3 punti sulla circonferenza.
Si punti il compasso in B e con apertura AB si tracci una circonferenza.
Sia C il punto, diverso da A, d' intersezione delle circonferenze.
$\angle AOB=2\angle ADB$, $\angle COB=2\angle BDC$ perché l'angolo al centro che insiste su una corda è doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste sulla medesima corda.
I triangoli AOB e COB sono congruenti per il 3 criterio di congruenza (3 lati congruenti) infatti:
$\overline{CO}=\overline{AO}$ perché raggi, $\overline{AB}=\overline{CB}$ per costruzione e il terzo lato BO in comune.

Essendo AOB e COB congruenti $\angle AOB=\angle COB$ [risulta] [[quindi]] $2\angle BDC=2\angle ADB$ [e quindi] $\angle BDC=\angle ADB$.
I triangoli ABD e BCD hanno $\overline{AB}=\overline{CB}$ e $\angle ADB=\angle CDB$
I triangoli ABD e BCD non sono congruenti perché per esserlo devono avere congruenti 2 lati e l'angolo compreso (1° criterio di congruenza dei triangoli) e non 2 lati e un angolo [opposto ad uno dei lat congruenti] come in questo caso.



Ipotesi: Sia C' il punto sulla semiretta DA tale che $\overline{DC}=\overline{DC'}$
Tesi: a) I triangoli BCD e BC'D sono congruenti
b) $\angle BCD$ e $\angle BAD$ sono supplementari

Dimostrazione :

a) I triangoli C'DB e BCD sono congruenti per il 1° criterio di congruenza (2 lati e l'angolo compreso congruenti) : $\overline{DC}=\overline{DC'}$ per ipotesi, il lato DB è in comune e $\angle BDC'=\angle BDC$ inf atti $\angle BDC'=\angle BDA$ perc hé D,C' e A appartengono alla stessa semiretta. Q. E. D.

b) Il quadrilatero ABCD è inscritto [in] una circonferenza [perché ?] quindi gli angoli opposti sono supplementari quindi $\angle BCD$ e $\angle BAD$ essendo opposti sono supplementari. Q. E. D.

Classe 3N
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)

La costruzione della figura che abbiamo individuato è la seguente:
Tracciato un angolo acuto di vertice D ,prendiamo sulla sua bisettrice un punto B e tracciamo poi una circonferenza di centro B , osservando che, se questa circonferenza è tangente ai lati dell'angolo e i vertici A e C dei due triangoli da costruire sono proprio i punti di contatto, i due triangoli ABD e CBD risultano rettangoli e congruenti (fig. 1) .

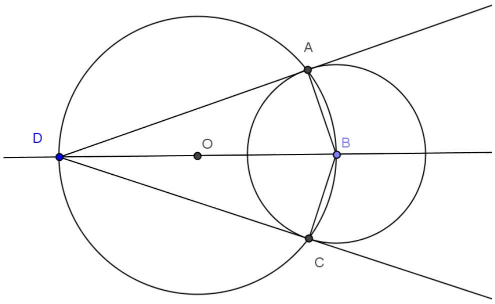


fig. 1

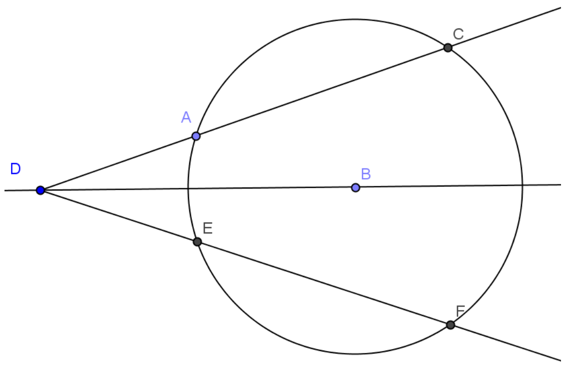


fig. 2

Consideriamo allora una circonferenza di centro B e di raggio maggiore della distanza di B dai lati dell'angolo(fig. 2) [ma minore di BD]. Tale circonferenza incontra i lati dell'angolo in quattro punti ,tutti equidistanti da B in quanto raggi della stessa circonferenza.

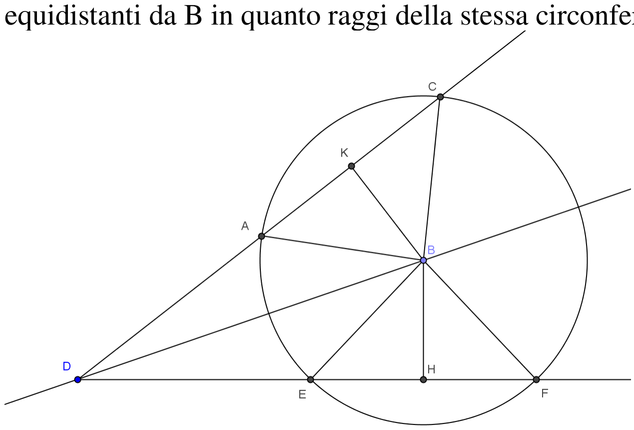


fig. 3

Osserviamo anzitutto che il punto B ,essendo sulla bisettrice dell'angolo, è equidistante dai suoi lati e perciò sarà : BH = BK (fig. 3).Da ciò si deduce che le corde AC ed EF ,equidistanti dal centro,sono congruenti : AC = EF . I triangoli rettangoli DBH e DBK sono allora congruenti essendo congruenti i cateti BH e BK e avendo l'ipotenusa DB in comune. Si ha quindi che gli altri cateti DH e DK sono congruenti ed essendo AC = EF , si deduce che : DA =DC-AC=[[DF-DF]]=[DK-AK =DH-EH] = DE .

Individuiamo ora i due triangoli ADB e CDB , osservando che ,dovendo avere il lato DB in comune, i vertici A e C possono occupare le posizioni dei punti A ,E ,C oppure F della figura 2 e possono trovarsi dalla stessa parte della semiretta DB ,oppure da parti opposte.

Consideriamo il caso in cui i vertici A e C dei due triangoli sono da parti opposte rispetto alla retta DB come in figura 4.

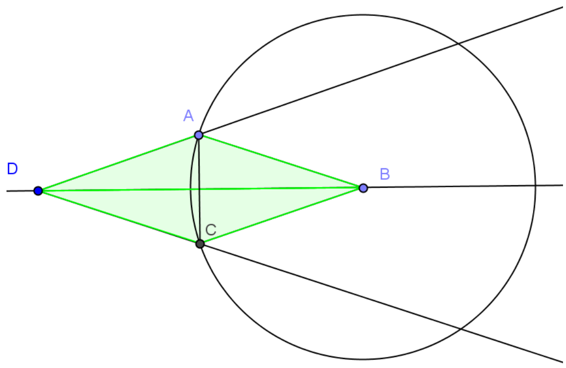


fig. 4

In questo caso i triangoli ADB e DBC sono congruenti per il terzo criterio di congruenza : essi hanno il lato DB in comune , AB = CB (raggi della stessa circonferenza) e DA congruente a DC (per quanto già osservato).Analogo ragionamento si avrebbe considerando i vertici A e C come in figura 5, e quest'ultimo caso risponde al punto 2) del problema.

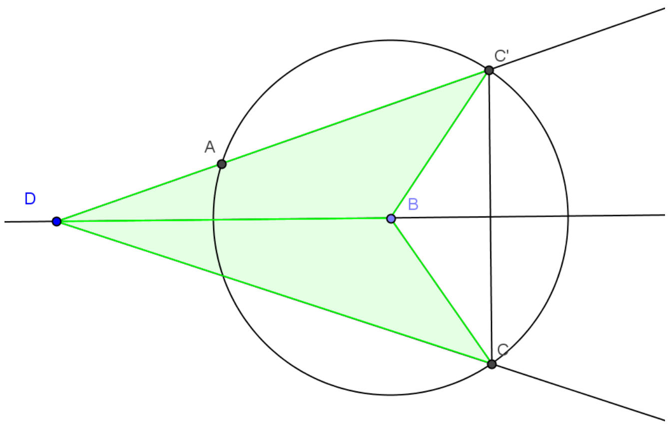


fig. 5

In tal caso,infatti, DC' = DC , DB è in comune [[e gli angoli CDB]] e BC e BC' sono raggi della stessa circonferenza..Osservato che il triangolo ABC' isoscele sulla base AC' , gli angoli BAC' e BC'A sono congruenti fra loro e per la congruenza dei triangoli BCD e BC'D sono anche congruenti all'angolo BCD. L'angolo BAD è angolo esterno al triangolo [[ABC]] [ABC'] , adiacente all'angolo [[BAD]] [BAC'] e quindi è il suo supplementare. Ne viene quindi che BAD è supplementare anche di BCD.

Vediamo ora perché in generale i triangoli ADB e DBC non sono congruenti.
Se A e C sono dalla stessa parte di DB, i triangoli hanno l'angolo BDC in comune (fig. 6)

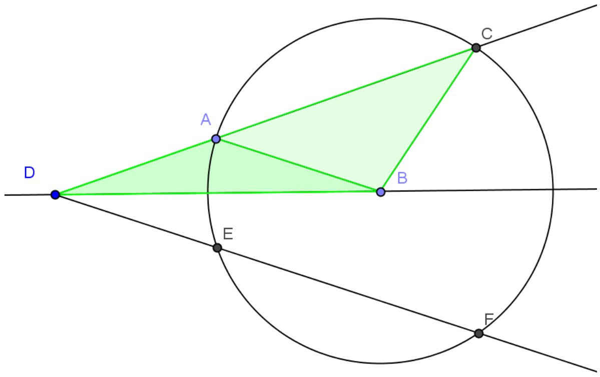


fig. 6

In questo caso i triangoli ABD e CBD non sono evidentemente congruenti ; essi hanno due lati congruenti,(DB in comune e AB = CB) e un angolo in comune (CDB) ,ma il triangolo ABD è una parte del triangolo CBD ;il suo terzo lato DC è maggiore di DA per quanto già osservato (DC=DA+AC).

Se i triangoli hanno i vertici A e C come in figura 7 ,essi non sono congruenti pur avendo due lati ed un angolo congruenti ; per esserlo dovrebbero essere congruenti gli angoli DBA e DBC che sono gli angoli compresi fra i lati congruenti e questo non è ,poiché DC è congruente a DC’ che è maggiore di DA (DC = DC’ = DA+AC’= DA’+A’C).

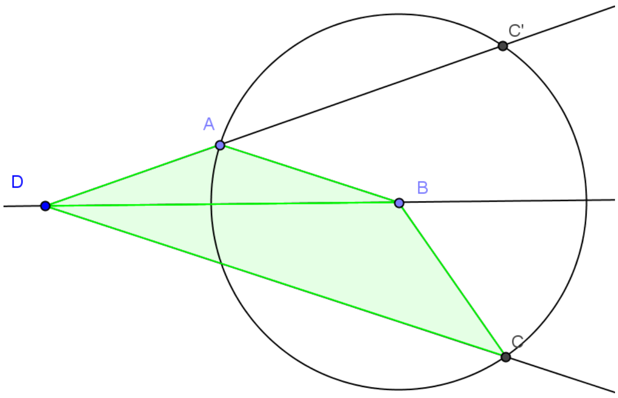


fig. 7

Ferretti Alberico e Rosati Valerio – Classe 3B
Liceo classico "F. Stabili" di Ascoli Piceno

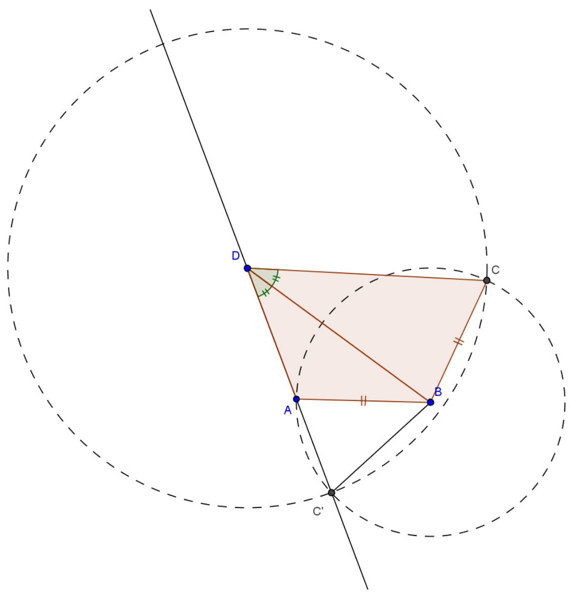
DIMOSTRAZIONE

Punto 1

Data una retta r , punto il compasso in un punto che chiamo D con apertura DC . Trovo la bisettrice dell'angolo tra la retta r e DC . Trovo sulla bisettrice un punto qualsiasi detto B e lo unisco con C nel segmento BC . Costruisco una circonferenza di raggio BC e centro in B . Individuo come punto A il punto d'intersezione tra tale circonferenza e la retta r, che non appartenga alla circonferenza di centro D e raggio DC. In tal caso i triangoli ADB e BDC [ma tali triangoli hanno i requisiti richiesti ?] non sono congruenti perché AD non è congruente a DC.

(Il punto d'intersezione tra la retta r , la circonferenza di centro B e la circonferenza di centro D sarà il punto C' *di* 2)).

Punto 2



Ipotesi:
- $AB \cong CB$
-
- $C' \in AD$
- $DC' \cong Dc$

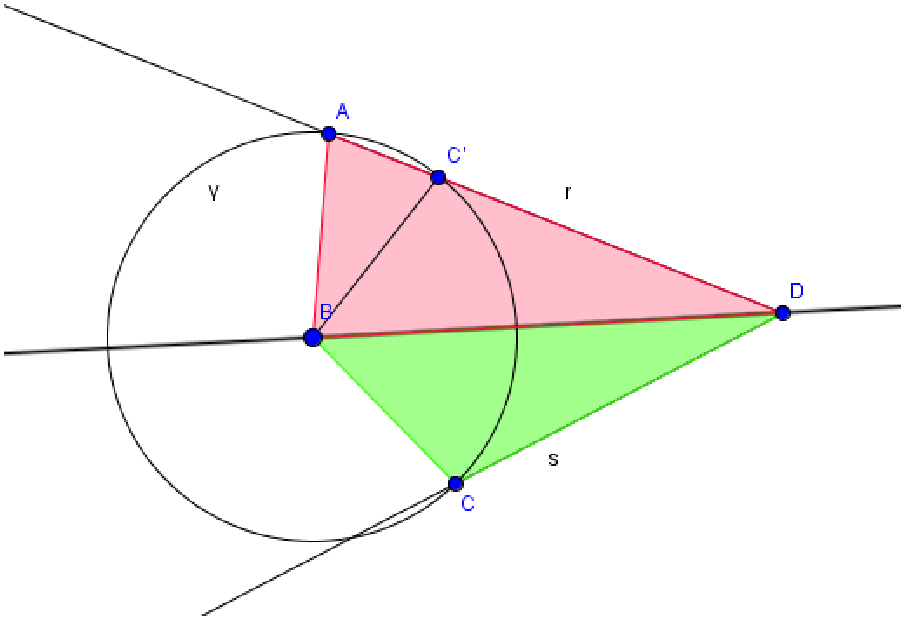
Tesi:
- $BC'D \cong BCD$
- [???? Non leggibile]

Considero i triangoli BCD e $BC'D$ essi hanno: [?? Non leggibile]

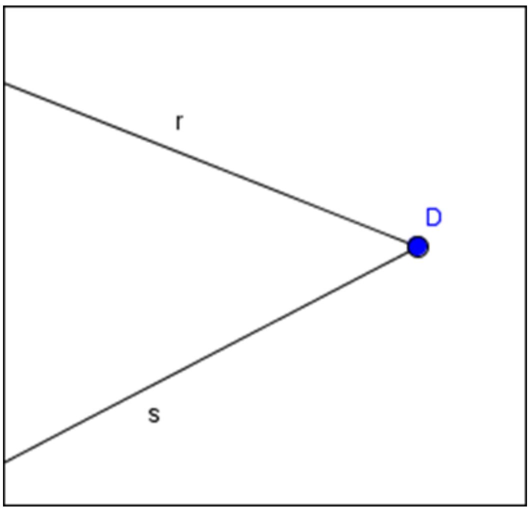
Essendo
$AB \cong BC'$ *(per la proprietà transitiva della relazione di congruenza dei segmenti)* allora BAC' è isoscele e quindi $B\hat{A}C' \cong A\hat{C}'B$.
Ma (sopra dimostrato), pertanto
(per la proprietà transitiva della relazione di congruenza degli angoli).
Poiché [???]

c.v.d.

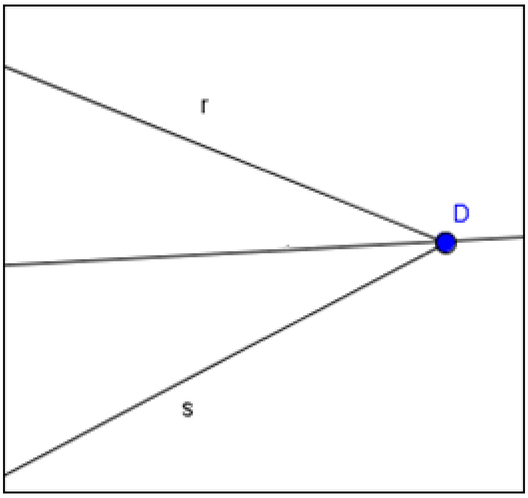
Soluzione della classe 2A
Liceo Scientifico “G. Terragni” Olgiate Comasco (CO).



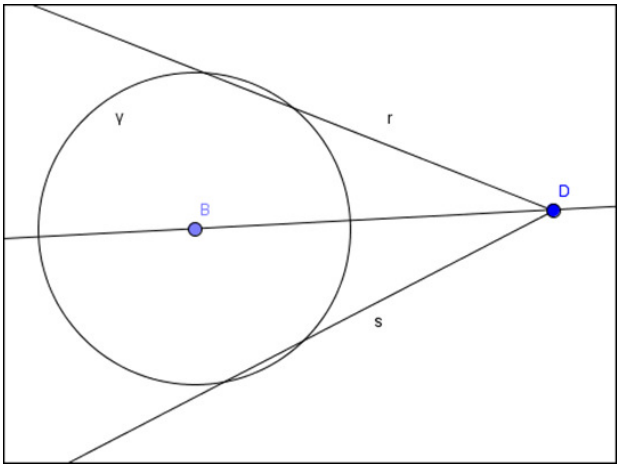
Tracciamo due semirette s e r con l’origine in comune che chiamiamo D, consideriamo l’angolo convesso, avente per lati le semirette s e r e per vertice D.



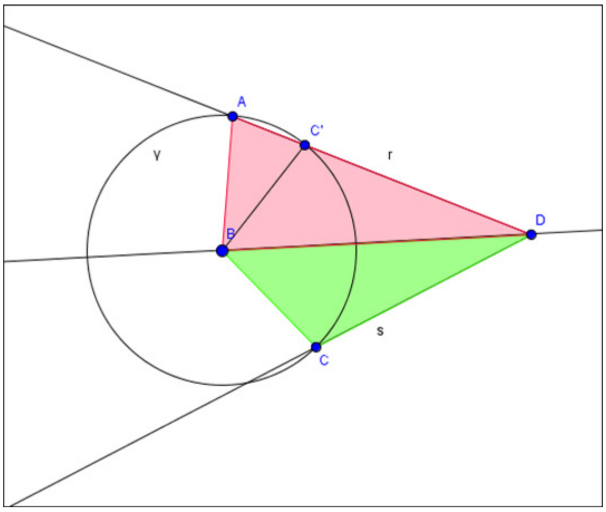
Costruiamo la bisettrice dell’angolo con vertice in D, centrando nel punto D, aprendo il compasso a piacere e tracciando una [[semi]]circonferenza che interseca le semirette s e r, lati dell’angolo, in due diversi punti(B’ e A’). Centriamo prima in B’ e tracciamo una [[semi]]circonferenza con raggio a piacere; facciamo lo stesso partendo da A’ [con lo stesso raggio]. Troviamo così il punto d’intersezione tra le due [[semi]]circonferenze, congiungiamo questo punto con il vertice D: questa è la bisettrice [costruzione non del tutto precisa].



Costruiamo una circonferenza γ di centro B, con B $\in$ alla bisettrice, in modo tale che γ sia secante ad entrambi i lati dell'angolo di vertice D.



Chiamiamo A il secondo punto di intersezione tra la circonferenza e la semiretta r, chiamiamo C il primo punto di intersezione tra la circonferenza e la semiretta s. Unisco A con B e B con C.
Formiamo così due triangoli, *ABD* e *CBD*, aventi congruenti gli angoli $A\hat{D}B$ e i lati AB e BC. Troviamo C', ovvero il punto sulla semiretta DA tale che CD $\cong$C'D.



1)
Consideriamo i triangoli ABD e CBD osserviamo che AB $\cong BC$, che $A\hat{D}B$ $\cong$ BDC [e BD è in comune], quindi non sono congruenti perché non possiamo usare nessun criterio di congruenza. Ad

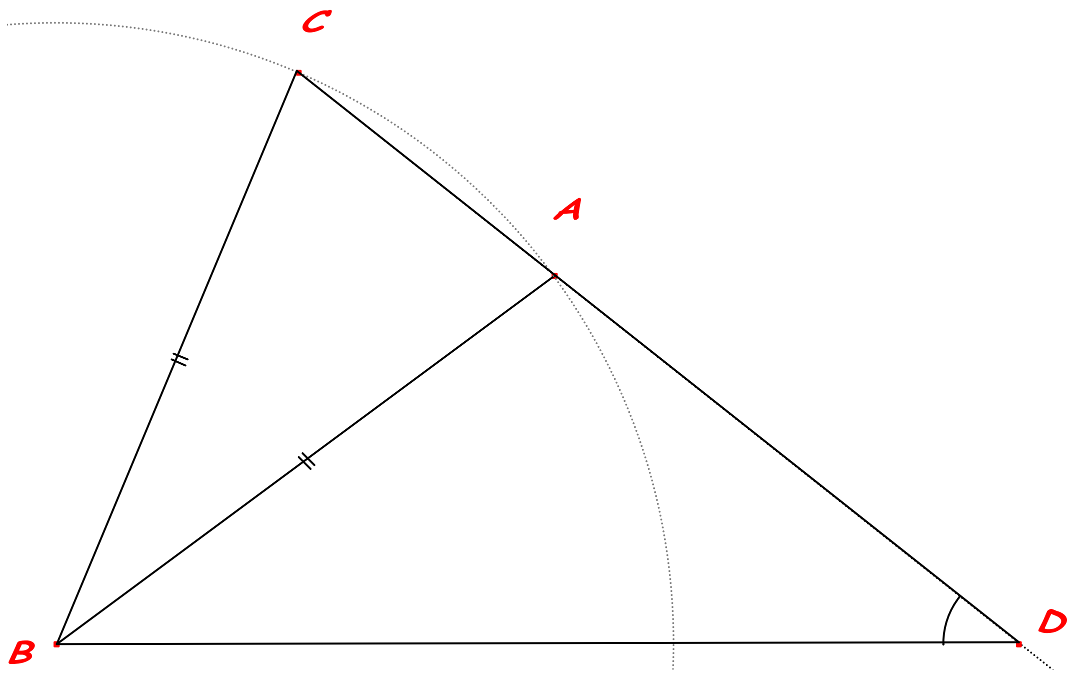
esempio non hanno congruenti due lati e un angolo compreso tra essi, e quindi non posso applicare il 1° criterio e così anche per il 2° e il 3°. [Questa parte si poteva dire meglio].

2)

Consideriamo i triangoli BC'D e BCD, sappiamo che: C'D $\cong$ CD, C'DB $\cong$ BDC e che BD $\cong$ BD per la proprietà riflessiva. I triangoli BC'D e BCD sono congruenti per il 1° criterio di congruenza quindi C'B $\cong$ BC e di conseguenza AB $\cong$ BC' per la proprietà transitiva. Osserviamo quindi che ABC' è isoscele e che $A\widehat{C}'B \cong B\widehat{A}C'$. Sappiamo che A$\widehat{C'}$B $= 180°$ perciò per la proprietà transitiva anche B$\hat{C}$D + [BAD] [[C$\hat{B}$D]] $= 180°$

Lara Giraldi, Classe II C
Liceo Scientifico "XXV Aprile" Portogruaro (VE)

1)



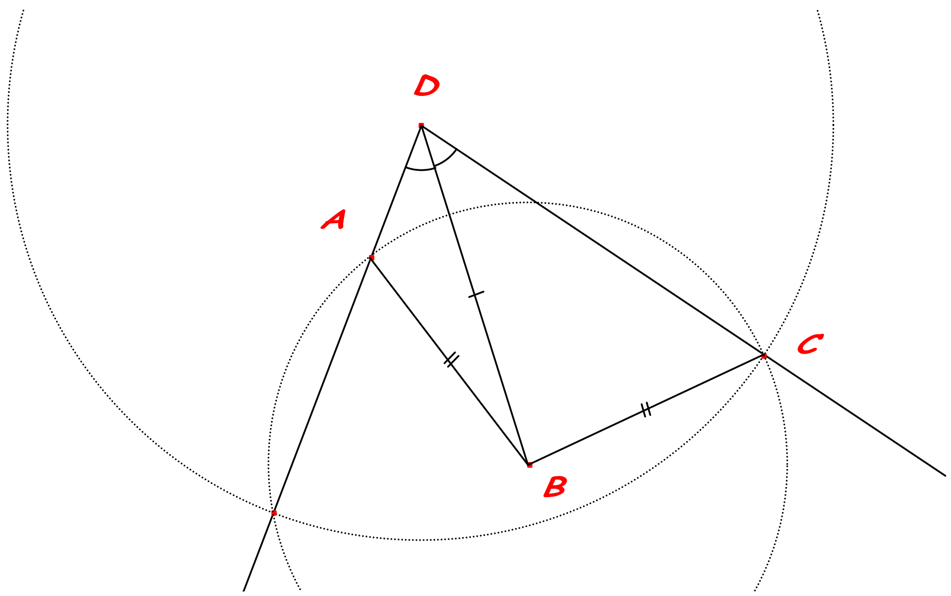
1. [[….]]

2. [[….]]

Tobia Calcinotto

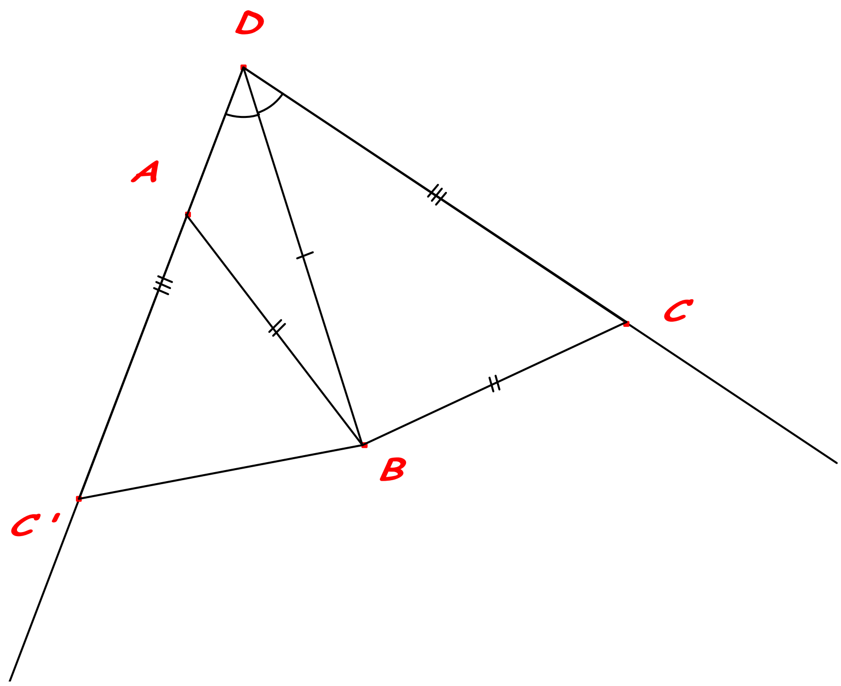
Classe II C – Liceo Scientifico "XXV Aprile" Portogruaro (VE)

1)



I triangoli ABD e CBD, in generale non sono congruenti perché non possiamo fare riferimento a nessuno dei criteri di congruenza.
[Si doveva spiegare meglio]

2)

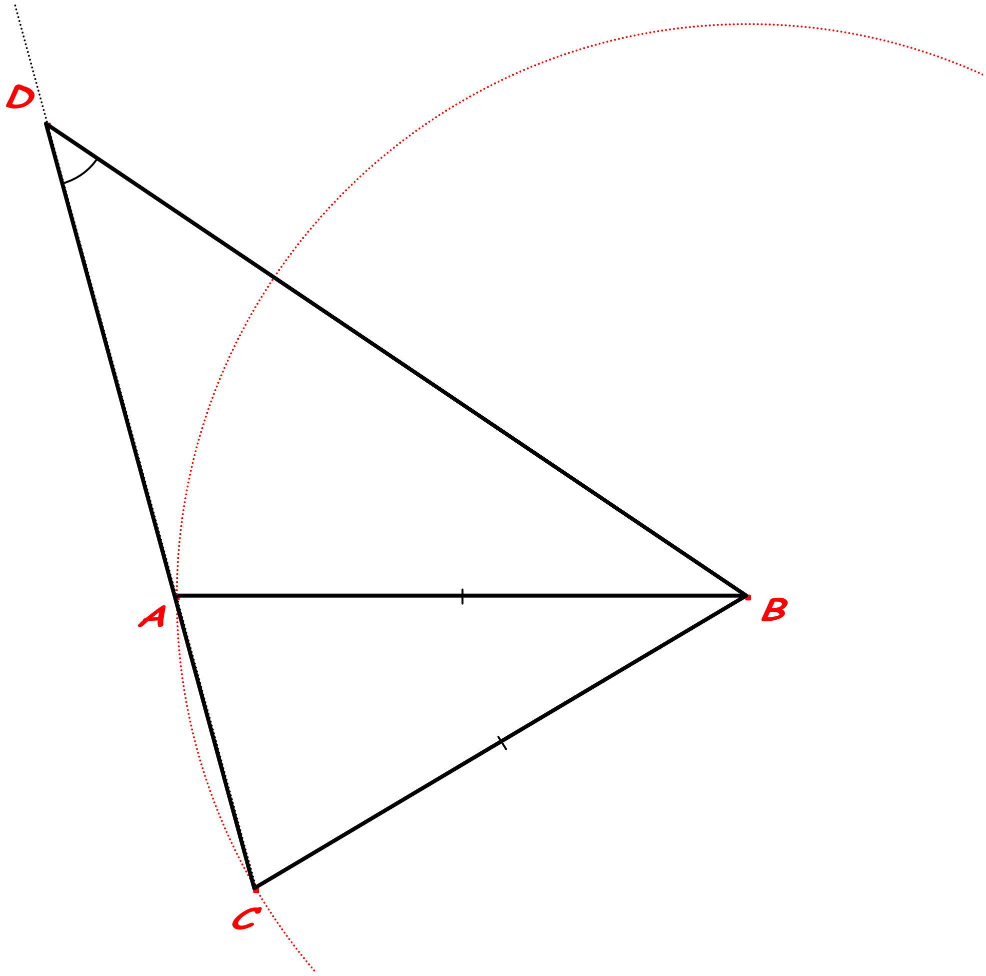


Considerando i triangoli BCD e BC'D, essi hanno:
- BD in comune;
- $B\hat{D}C' \cong B\hat{D}C$ per ipotesi;
- $DC' \cong DC$ per ipotesi.

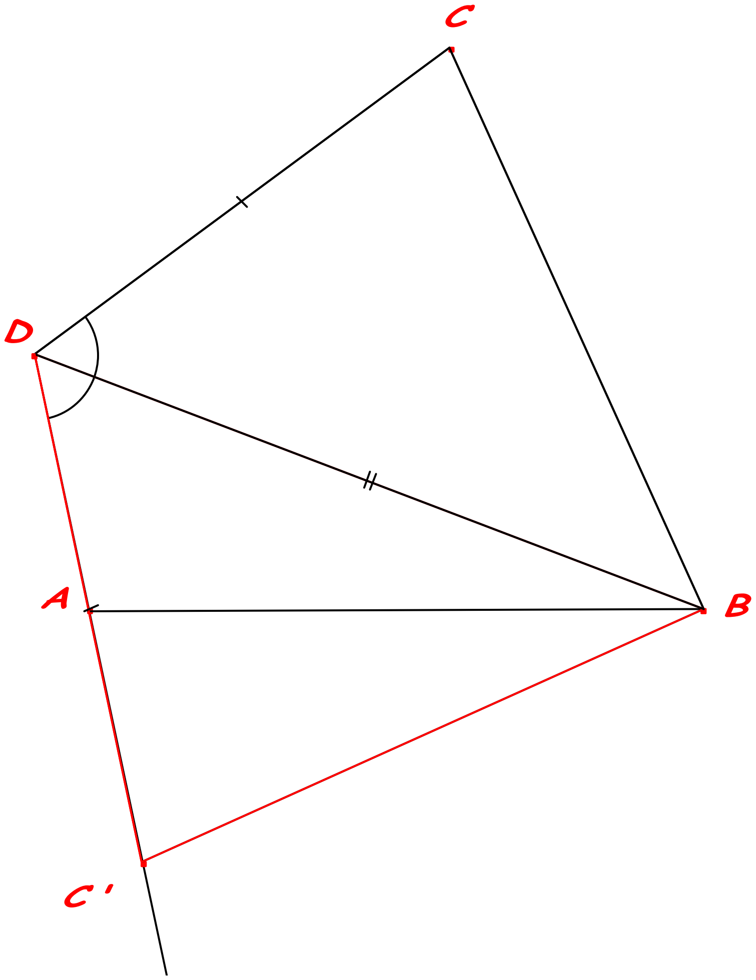
Sono quindi congruenti per il primo criterio di congruenza. In particolare $BC' \cong BC$.
Il triangolo ABC' è isoscele essendo BC' e AB congruenti a BC, quindi $B\widehat{C'}A \cong B\hat{A}C'$.
Siccome $B\hat{A}D + B\hat{A}C' \cong \pi$ (perché angoli adiacenti) si ha anche $B\hat{A}D + B\hat{C}'D \cong \pi$, ma $B\widehat{C'}D \cong B\hat{C}D$ perché corrispondenti nei due triangoli congruenti BCD e BC'D e, in definitiva, possiamo scrivere $B\hat{A}D + B\hat{C}D \cong \pi$.

Mario Veshaj
Classe II C – Liceo Scientifico "XXV Aprile" Portogruaro (VE)

1) [[…..]]



2)



I triangoli BCD e BC'D hanno:
- DC = DC' per costruzione;
- BD in comune;
- gli angoli $C'\widehat{D}B$ e $C\widehat{D}B$ congruenti per ipotesi.

I triangoli BCD e BC'D sono dunque congruenti per il primo criterio di congruenza.
In particolare BC' = BC.
Ma BC $\cong$ AB per ipotesi, e quindi, per la proprietà transitiva, sarà BC' $\cong$ AB ovvero il triangolo ABC' è isoscele su AC'.
Gli angoli [[$A\widehat{C'}B$ e $B\widehat{C'}D$]] [*BAD* e *BAC'*] sono supplementari in quanto adiacenti, ma [[$A\widehat{C'}B \cong B\widehat{A}D$]] [*BAC'* e *BC'A*] perché angoli alla base nel triangolo isoscele AC'B e $B\widehat{C'}D \cong B\widehat{C}D$ perché angoli corrispondenti in triangoli congruenti (BC'D e BCD) e pertanto gli angoli $B\widehat{C}D$ e $B\widehat{A}D$ sono supplementari.