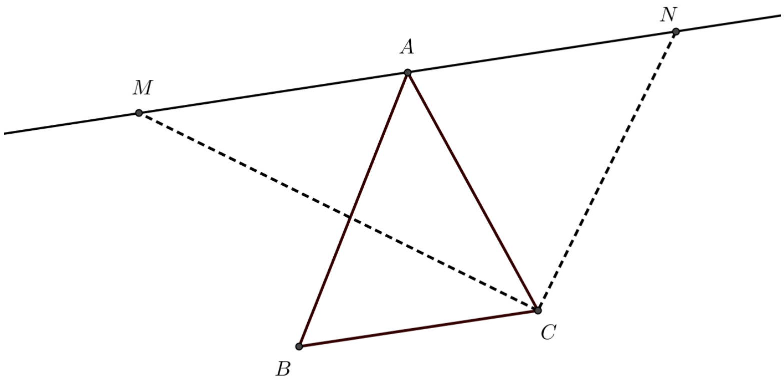
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" [(Edwin A. Abbott)]

Flatlandia 7-21 Ottobre 2013 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Dal vertice A di un triangolo ABC (vedi figura) condurre la retta parallela a BC e su di essa riportare, da parti opposte rispetto ad A, i segmenti AM e AN entrambi congruenti ad AC.



a) Dimostrare che i triangoli ACM e ACN sono equivalenti.
b) Dimostrare che CM e CN sono le bisettrici dei due angoli, interno ed esterno, in C del triangolo ABC.
c) Dimostrare che il triangolo MCN è rettangolo in C.
Giustificare tutte le risposte.

Commento alle soluzioni ricevute

Sono giunte sei risposte, tre provenienti da due diversi Licei scientifici, due da due diversi Licei Classici e una da un Liceo Linguistico.
Il problema poneva tre quesiti relativi alla stessa figura: nel primo si chiedeva di dimostrare l'equivalenza di due triangoli, nel secondo di dimostrare che due segmenti aventi come estremo comune un vertice di un triangolo erano le bisettrici dei due angoli, interno ed esterno, individuati da tale vertice e nell'ultimo di dimostrare che un triangolo risultante dalla costruzione effettuata era rettangolo.
Alla prima domanda tutti, tranne uno, rispondono in modo sostanzialmente corretto, mentre tutti arrivano a risolvere il secondo e il terzo quesito, sia pure con qualche imprecisione.
Ci preme sottolineare innanzi tutto due aspetti importanti della pratica geometrica da tenere presenti nei futuri elaborati: 1) stabilito che, in generale, si indicano con una lettera latina maiuscola i punti caratteristici di una figura (vertici, punti di intersezione, ecc.) e con una terna di lettere un angolo (con il vertice al centro della terna), diventa di conseguenza improprio indicare un angolo di particolare ampiezza con la sola lettera R, se si tratta di un angolo retto, o con la sola lettera P, se si tratta di un angolo piatto; 2) non è accettabile che si usino lettere per indicare punti di cui non è stata precisata in alcun modo la costruzione anche se poi compaiono nelle figure inserite nella soluzione. Infine, come ormai da troppo succede, vogliamo ribadire la necessità di distinguere tra un ente geometrico e la sua misura (in particolare tra un angolo e la misura della sua ampiezza e tra un segmento e la misura della sua lunghezza).

Un'ultima importante considerazione: la dimostrazione di una data implicazione non comporta necessariamente la validità dell'implicazione inversa, che quindi richiede, per la sua validità, una dimostrazione autonoma. In particolare il fatto che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa sia congruente a metà dell'ipotenusa stessa non implica automaticamente che se in un triangolo la mediana relativa ad uno dei lati è congruente alla metà di quel lato il triangolo sia rettangolo (proprietà comunque vera ma che richiede una dimostrazione autonoma).

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LC "G. Asproni", Nuoro (NU)
LS, Scienze applicate, "G. Terragni", Olgiate Comasco (CO)
LS "G. Galilei", Adria (RO)
Liceo "Stabili-Trebbiani"-indirizzo Linguistico, Ascoli Piceno (AP)
LC "G. Parini", Milano (MI)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Il gruppo di lavoro che gestisce "Flatlandia"

Soluzioni

Agostino Pigozzi, Classe 1C
Liceo Classico "G. Asproni", Nuoro (NU)

a)
I due triangoli ACM e ACN sono fra loro equivalenti poiché hanno basi congruenti per ipotesi (AC ≡ AM, AN ≡ AC e per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra segmenti] AM ≡ AN) e hanno banalmente la stessa altezza.

b)
Ricorro ai criteri di parallelismo [alle proprietà delle rette parallele tagliate da una trasversale]: essendo B^CM e C^MA [$B\widehat{C}M$ e $C\widehat{M}A$] angoli alterni interni [delle rette parallele] [[ed essendo il segmento]] BC [[parallelo ad]] e MN [tagliate dalla trasversale MC] [[per ipotesi]] allora B^CM ≡ C^MA [$B\widehat{C}M \equiv C\widehat{M}A$]. Ma il segmento AC è congruente al segmento AM, quindi il triangolo AMC è isoscele, da ciò consegue che C^MA ≡ A^CM [$C\widehat{M}A \equiv A\widehat{C}M$], e per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli], B^CM ≡ A^CM [$B\widehat{C}M \equiv A\widehat{C}M$]. Quindi il segmento CM divide l'angolo B^CA [$B\widehat{C}A$] in due parti congruenti. Analogamente si dimostra per l' angolo esterno in C del triangolo ABC […].

c)
chiamo [Indico con] α [le ampiezze degli] gli angoli in M e in C del triangolo AMC, mentre definisco [indico] con β [le ampiezze degli] gli angoli in C e in N del triangolo CAN. Poiché la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un triangolo è di 180°, allora l'angolo M^AC [$M\widehat{A}C$] ha un'ampiezza di (180° − 2α), mentre l' angolo N^AC [$N\widehat{A}C$] ha un'ampiezza di (180° − 2β). Ma la somma delle ampiezze degli angoli M^AC [$M\widehat{A}C$] ed N^AC [$N\widehat{A}C$] è 180°; ne consegue che: 180° − 2α + 180° − 2β = 180° => 360° − 2(α + β) = 180° => 2(α+ β) = 180° => α + β = 90°. Ma α + β indica [l'ampiezza del] l'angolo M^CN [$M\widehat{C}N$]. Quindi il triangolo MCN è rettangolo in C.

Laura Baratella, Classe 2B
Liceo Scientifico "G. Galilei", Adria (RO)

a)
[[…]]

b)
Prolungo il segmento BC con una retta [di un segmento] CD. $B\hat{C}M \cong C\hat{M}A$ perché angoli alterni interni delle rette parallele MN e BC tagliate dalla trasversale MC. Poiché il triangolo MAC è isoscele [sulla base MC] per ipotesi, avrà $A\hat{M}C \cong M\hat{C}A$. Quindi, se $A\hat{M}C \cong M\hat{C}A$ e $B\hat{C}M \cong C\hat{M}A$, per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli] $B\hat{C}M \cong M\hat{C}A$. Analogamente, $N\hat{C}D \cong A\hat{N}C$ perché angoli alterni interni delle rette parallele MN e BC, tagliate dalla trasversale NC. Poiché il triangolo NAC è isoscele [sulla base NC] per ipotesi, avrà $A\hat{C}N \cong A\hat{N}C$. Perciò, se $N\hat{C}D \cong A\hat{N}C$ e $A\hat{N}C \cong A\hat{C}N$, $A\hat{C}N \cong N\hat{C}D$ per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli]. [Quindi …]

c)
Se $B\hat{C}M \cong M\hat{C}A$ e $A\hat{C}N \cong N\hat{C}D$, allora $B\hat{C}M + N\hat{C}D$ [intesa come somma di ampiezze] $\cong$ [=] $M\hat{C}A + A\hat{C}N$ [intesa come somma di ampiezze]. Poiché le due somme sono congruenti [uguali] e $B\hat{C}M + N\hat{C}D + M\hat{C}A + A\hat{C}N = \hat{P}$ [è uguale a un angolo piatto], allora $B\hat{C}M + N\hat{C}D$ [intesa come somma di ampiezze] $= \hat{R}$ [è uguale a 90°] e $M\hat{C}A + A\hat{C}N$ [intesa come somma di ampiezze] $= \hat{R}$.[è uguale a 90°]. Di conseguenza, $M\hat{C}N = \hat{R}$ [è un angolo retto].

Pietro Zoletto, Classe 2C
Liceo Scientifico "G. Galilei", Adria (RO)

a)
Considero il triangolo MCN. Dato che AM ≅ AN per ipotesi, AC è mediana di [del triangolo MCN relativa al lato] MN. Quindi per [una] proprietà della mediana del lato di un triangolo […], il triangolo AMC è equivalente al triangolo ANC.

b)
Traccio il segmento CD che individua l'angolo ACD esterno a C. [la figura?]

Il triangolo AMC è isoscele su base MC perché AM ≅ AC per ipotesi, quindi l'angolo AMC è congruente all'angolo ACM per [una] proprietà del triangolo isoscele. L'angolo BCM è congruente a CMA perché angoli alterni interni individuati dai segmenti paralleli BC e MN con la trasversale MC. Quindi per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli] l'angolo BCM è congruente ad ACM, e MC è la bisettrice di [dell'angolo] ACB. Analogamente l'angolo ACN è congruente ad ANC, perché il triangolo ANC è isoscele su base CN, ma l'angolo NCD è congruente all'angolo CNA perché angoli alterni interi generati dai segmenti paralleli BC e MN con la trasversale NC, quindi per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli] l'angolo ACN è congruente a [all'angolo] NCD, e NC è la bisettrice di C_e [dell'angolo ACD].

c)
Gli angoli ACM e ACN sono [hanno ampiezza pari a] metà [dell'ampiezza] di angoli supplementari per la dimostrazione precedente, quindi sono complementari, perciò il triangolo MCN è rettangolo in C.

Cesare Mattiroli, Luca Savoldelli, Classe 2A
Liceo Scientifico Scienze Applicate "G. Terragni", Olgiate Comasco (CO)

a)
Considerando i triangoli AMC e ANC, sappiamo che l'area di un triangolo si calcola con la formula $\frac{b*h}{2}$, allora i due triangoli considerati hanno per basi i segmenti MA ≅ NA [Ma e NA tra loro congruenti], quindi avremo anche $\overline{MA} = \overline{NA}$. Per quanto riguarda le altezze entrambi i triangoli hanno l'altezza relativa alle basi MA e NA coincidente con il segmento CH, ovvero il segmento passante per [che ha come estremo il punto] C e [ed è] perpendicolare ad MN, di cui considereremo [chiameremo] $\overline{CH}$ la lunghezza.
In sintesi $A_{AMC} \cong A_{ANC}$ in quanto $A_{AMC} = \frac{\overline{MA}*\overline{CH}}{2}$ e $A_{ANC} = \frac{\overline{NA}*\overline{CH}}{2}$ con $\overline{MA} = \overline{NA}$

b)
Essendo MA ≅ [e] AC [tra loro congruenti], allora il triangolo AMC è isoscele [sulla base MC] e quindi gli angoli A$\hat{M}$C ≅ [e] A$\hat{C}$M [sono tra loro congruenti] e di conseguenza le loro ampiezze sono uguali.
Inoltre A$\hat{M}$C ≅ M$\hat{C}$B in quanto alterni interni per le parallele r [retta sostegno di MN] e BC attraversate dalla trasversale MC, perciò gli angoli A$\hat{C}$M e M$\hat{C}$B sono congruenti [e] le loro ampiezze uguali [e quindi CM …].
Analogamente consideriamo il triangolo isoscele ACN sulla base CN; gli angoli A$\hat{C}$N e A$\hat{N}$C sono congruenti, l'angolo C$\hat{N}$D [$D\widehat{C}N$] è alterno interno di A$\hat{N}$C per le [stesse] rette parallele attraversate dalla trasversale CN da cui [segue che] A$\hat{C}$N ≅ N$\hat{C}D$ e quindi CN è bisettrice dell'angolo A$\hat{C}$D.

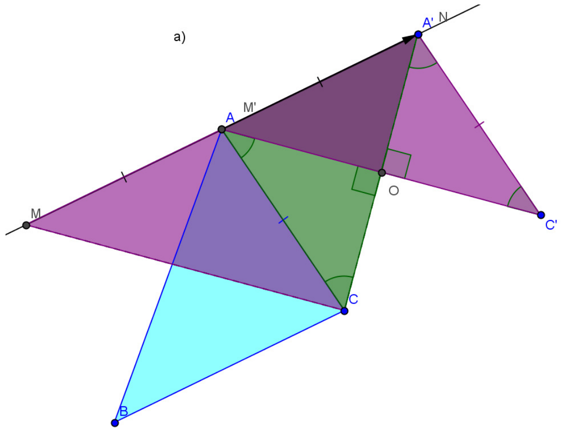
c)
Poiché B$\hat{C}$A + A$\hat{C}$D = $B\widehat{C}D$ e $B\widehat{C}D$ è un angolo piatto [[$\hat{P}$]] e [gli angoli] B$\hat{C}$A e A$\hat{C}$D hanno per bisettrice CM e CN [rispettivamente], allora 2 A$\hat{C}$M + 2 A$\hat{C}$N [intesa come somma delle ampiezze vale] [[= $\hat{P}$]] [180°]. [Di conseguenza] A$\hat{C}$M + A$\hat{C}$N [intesa come somma delle ampiezze vale] [[= $\frac{1}{2}\hat{P}$]] [90°]. [[$M\hat{C}N \cong \frac{1}{2}\hat{P}$]][Quindi l'angolo $M\widehat{C}N$ è retto].

Classe 2H
Liceo "Stabili-Trebbiani", Indirizzo Linguistico, Ascoli Piceno (AP)

a)
La traslazione definita dal vettore $\overrightarrow{AN}$ trasforma il triangolo ACM nel triangolo congruente [$A'C'M'$ che coincide col triangolo $NC'A$] [[$ACM \cong A'C'M' \equiv NC'A$]].
Il triangolo $AC'N \doteq ACN$ per equiscomponibilità, infatti

- $AOC \cong NOC'$ per il 2° criterio di congruenza dei triangoli in quanto: [cos'è O?]

- $\begin{cases} AC \cong NC' \text{per proprietà della traslazione} \\ \widehat{CAO} \cong \widehat{NC'O} \text{ alterni interni formati da } AC \parallel NC' \text{con la trasversale } AC' \\ \widehat{ACO} \cong \widehat{ONC'} \text{ alterni interni formati da } AC \parallel NC' \text{con la trasversale } NC \end{cases}$
- $AC'N = NC'O + NOA$ [intesa come somma delle aree]
- $ACN = CAO + NOA$ [intesa come somma delle aree]



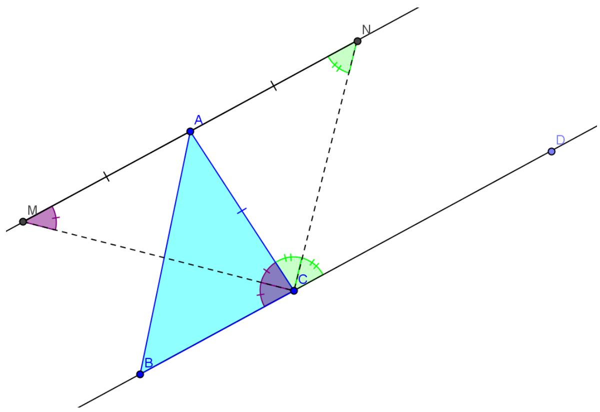
$\Downarrow$

$AC'N \doteq ACN$

$\Downarrow$

[[$ACM \cong A'C'M' \equiv NC'A \doteq ACN$]] [quindi il triangolo *ACM* è equivalente al triangolo *ACN*]

b)



- Considero le parallele BC e AN, tagliate dalla trasversale NC:
  $\widehat{ANC} \cong \widehat{NCD}$ (angoli alterni interni) [cos'è D?]
- $AN \cong AC$ per ipotesi $\Longrightarrow \widehat{ANC} \cong \widehat{ACN}$

$\Downarrow$

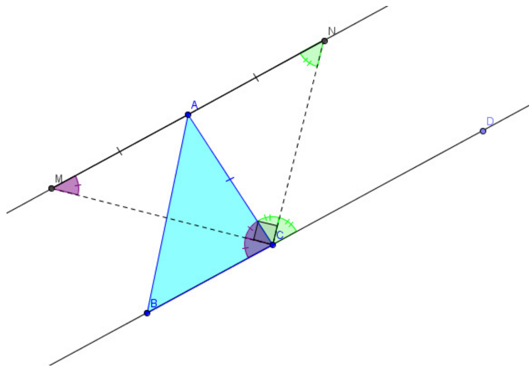
$\widehat{ACN} \cong \widehat{NCD}$ (proprietà transitiva [della relazione di congruenza tra angoli]) $\Longrightarrow$ CN bisettrice dell'angolo esterno $\widehat{ACD}$

- Considero ora le stesse parallele tagliate dalla trasversale MC:
  $\widehat{CMA} \cong \widehat{MCB}$ (Angoli alterni interni)
- $AM \cong AC$ per ipotesi $\Longrightarrow \widehat{AMC} \cong \widehat{ACM}$

$\Downarrow$

$\widehat{MCA} \cong \widehat{MCB}$ (Proprietà transitiva [della relazione di congruenza tra angoli]) $\Longrightarrow$ CM bisettrice dell'angolo interno $\widehat{ACB}$

c)



$\widehat{BCM} + \widehat{MCA} + \widehat{ACN} + \widehat{NCD} \cong \pi$ [= π] [intesa come somma delle ampiezze espresse in radianti]

Per quanto dimostrato al punto b) :

$\widehat{ACN} \cong \widehat{NCD}$

$\widehat{MCA} \cong \widehat{MCB}$

$\Downarrow$

$\widehat{MCA} + \widehat{ACN} \cong \frac{\pi}{2}$ $\left[=\frac{\pi}{2}\right]$ [intesa come somma delle ampiezze espresse in radianti] $\Longrightarrow$ MCN triangolo rettangolo in C.

Alice Garbari, Classe 4(?)C
Liceo Classico "G. Parini", Milano (MI)

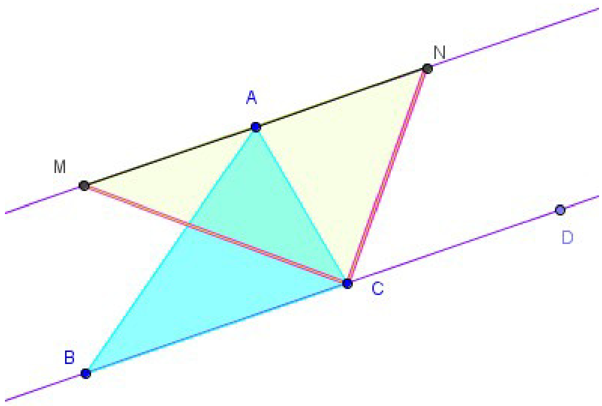
a)

I triangoli ACM e ACN sono equivalenti perché hanno basi congruenti (AM ≅ AN per ipotesi) e

stessa altezza (distanza tra le due rette paralelle [parallele] MN e BC)

N.B. Nel triangolo MCN, il segmento CA è la mediana relativa alla base MN.

b)



CM è bisettrice dell'angolo interno in C perché:

- il triangolo MAC è isoscele (AM ≅ AC per ipotesi) e, quindi, gli angoli alla base AMC e ACM sono congruenti.
- l'angolo AMC è congruente all'angolo MCB perché alterni interni (angoli formati dalle due rette parallele MN e BC tagliate dalla trasversale MC) [quindi…]

CN è bisettrice dell'angolo esterno in C perché:

- il triangolo CAN è isoscele (AN ≅ AC per ipotesi) e, quindi, gli angoli alla base ANC e ACN sono congruenti.
- prolungo il lato BC e considero il punto D
- l'angolo ANC è congruente all'angolo NCD perché alterni interni (angoli formati dalle due rette parallele MN e BC tagliate dalla trasversale NC) [quindi…]

c)

Nel triangolo MCN, il segmento CA è mediana del segmento MN e MN = 2CA [$\overline{MN} = 2\overline{CA}$] per ipotesi.

In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa ⇒ il triangolo MCN è rettangolo in C [Occorrerebbe aver prima dimostrato che, se in un triangolo una mediana relativa a un lato ha lunghezza pari alla metà della lunghezza del lato stesso, allora il triangolo è rettangolo.]

N.B. Ciascuna mediana di un triangolo lo divide in due parti equivalenti (hanno sempre basi congruenti e stessa altezza)

Oppure

Per ipotesi AM ≅ AN ≅ AC ⇒ i punti M, N, C, sono punti di una circonferenza di centro A [e raggio AM] e, in particolare, il segmento MN è il diametro.

Il triangolo MCN è rettangolo in C perché inscritto in una semicirconferenza [e questa è la dimostrazione di cui sopra.]