FLAT*landia*

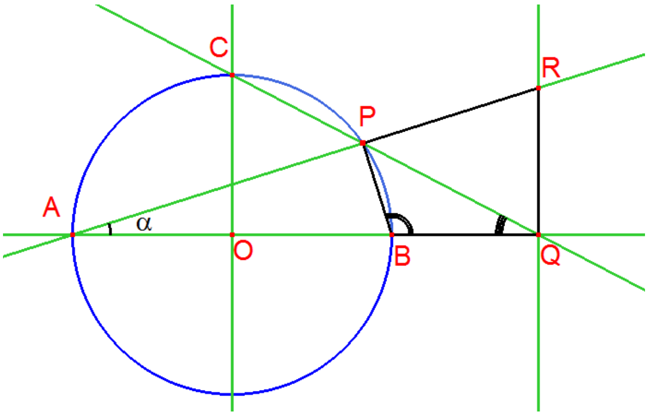
"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *[(Edwin A. Abbott)]*

Flatlandia 11-25 Novembre 2013 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Indichiamo con *AB* un diametro di una circonferenza di centro *O* e con *OC* uno dei raggi perpendicolari ad *AB*. Detto *P* un punto situato sul minore degli archi *BC*, sia *Q* l'intersezione della retta *CP* con la retta sostegno di *AB*. Indichiamo poi con *R* il punto di intersezione tra la retta *AP* e la perpendicolare ad *AB* condotta da *Q* (vedi figura).

1) Indicata con α la misura dell'angolo $B\hat{A}P$, trovare in funzione di α le misure degli angoli $P\hat{B}Q$ e $B\hat{Q}P$.
2) Dimostrare che il quadrilatero *PBQR* è inscrivibile in una circonferenza.
3) Dedurre che $\overline{BQ} = \overline{QR}$.



Commento

Sono giunte sei risposte, una proveniente da una prima Liceo Scientifico, quattro da classi seconde sempre di Liceo scientifico e infine una risposta da una terza secondaria di primo grado di un Istituto Comprensivo.

Il problema poneva tre quesiti relativi alla stessa figura: nel primo si chiedeva di esprimere le misure di due angoli, risultanti dalla costruzione illustrata dalla figura, in funzione della misura di un dato angolo iniziale, nel secondo di dimostrare che un quadrilatero presente nella figura era inscrivibile in una circonferenza e nell'ultimo di dimostrare l'uguaglianza delle lunghezze di due segmenti risultanti dalla costruzione effettuata.

Tutti, tranne uno, rispondono in modo sostanzialmente corretto ai tre quesiti, anche se a volte sono presenti affermazioni prive della necessaria giustificazione.

Un'osservazione importante che riguarda la pratica geometrica di questi ultimi decenni: l'esistenza di software di geometria dinamica permette allo studente di costruire figure "giuste" che rispettano tutti i vincoli imposti dal problema. L'aspetto negativo risiede nel fatto che spesso lo studente è portato a considerare certe proprietà, che dovrebbero essere dimostrate, come "evidenti" in base alla figura così ben costruita, col risultato di rendere inaccettabili certe dimostrazioni. Un'altra osservazione, di tipo tecnico, riguarda la stesura della parte testo all'interno della soluzione: è assolutamente da evitare la scrittura di un testo all'interno di un software di grafica in quanto questo

rende assolutamente impossibile inserire le correzioni, che sono una parte essenziale per tutti coloro che utilizzano i quesiti di Flatlandia.
Ci preme anche sottolineare l'uso del tutto improprio della relazione di congruenza tra un ente geometrico (come un segmento, un angolo, ecc.) e la sua misura. Infine, ancora una volta, vogliamo ribadire la necessità di distinguere tra un ente geometrico e la sua misura (in particolare tra un angolo e la misura della sua ampiezza e tra un segmento e la misura della sua lunghezza).

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS Scienze Applicate "G. Aselli", Cremona (CR)
LS "XXV Aprile", Portogruaro (VE)
LS "Pitagora", Rende (CS)
LS Scienze Applicate "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)
Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Il gruppo di lavoro che gestisce "Flatlandia"

Soluzioni

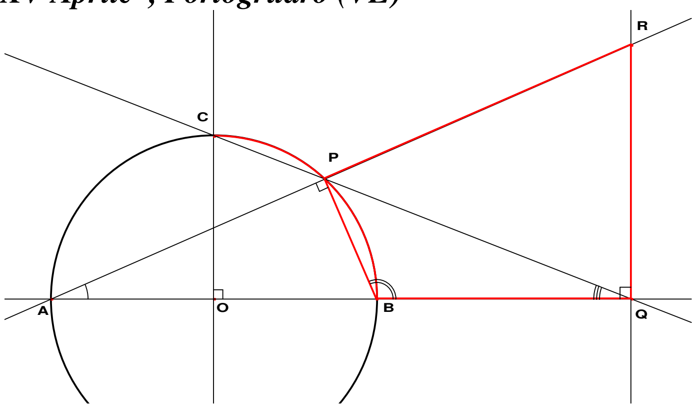
Michele Toninelli, Classe 1C
Liceo Scientifico Scienze Applicate "G .Aselli", Cremona (CR)

1)
[[…]]

2)
[[…]]

3)
[[…]]

Giovanni Anese, Classe 2C
Liceo Scientifico "XXV Aprile", Portogruaro (VE)



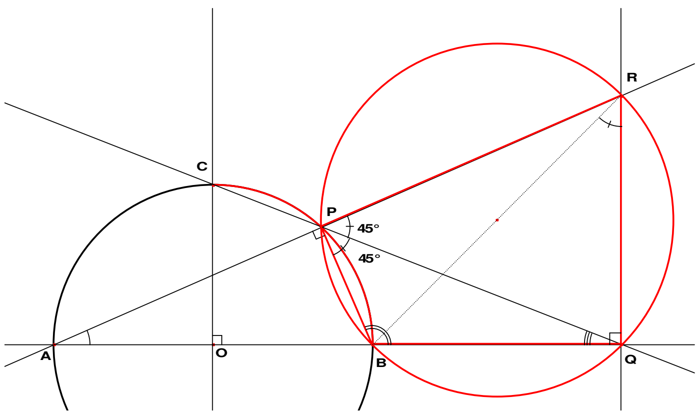
1)
Il triangolo *ABP* è rettangolo in *P* perché inscritto in una semicirconferenza di diametro *AB*.

L'angolo $P\widehat{B}Q$, in quanto angolo esterno al triangolo *ABP,* ha ampiezza α + 90° per il secondo teorema dell'angolo esterno.

L'angolo $C\widehat{P}A$ è metà di un angolo retto perché angolo alla circonferenza che insiste sull'arco $\overset{\frown}{AC}$ che è un quarto di circonferenza.

L'angolo $Q\widehat{P}B$ ha un'ampiezza di 45° perché è il complementare dell'angolo $R\widehat{P}Q$ che è angolo opposto al vertice rispetto all'angolo $C\widehat{P}A$.

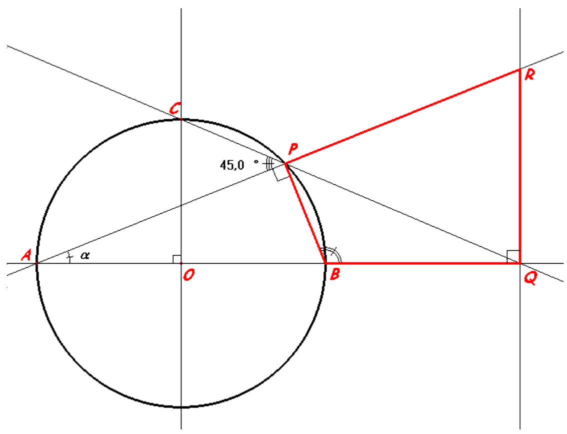
Se consideriamo ora il triangolo *AQP*, si ha che l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{Q}P$, ovvero dell'angolo $B\widehat{Q}P$, è $45° - \alpha$ [perché?].



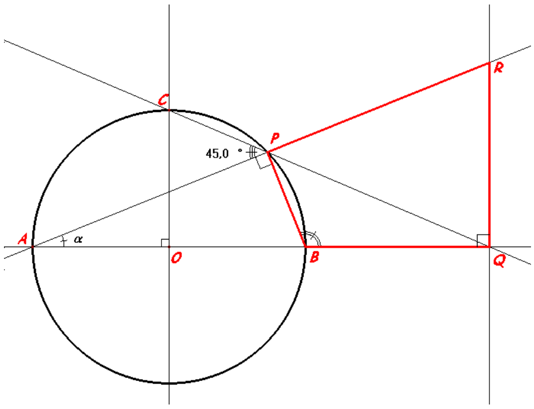
2)
Traccio ora la diagonale *BR* e individuo i due triangoli rettangoli *BPR* e *RQB*.
Il triangolo *BPR* è rettangolo in *P* perché l'angolo $B\widehat{P}R$ è angolo supplementare dell'angolo retto $A\widehat{P}B$.
Di conseguenza il triangolo *BPR* è inscrivibile in una semicirconferenza di diametro *BR*.
Il triangolo *BQR* è rettangolo in *Q* perché *BQ* è perpendicolare a *QR* per ipotesi.
Di conseguenza anche il triangolo *BQR* è inscrivibile in una semicirconferenza di diametro *BR*.
I vertici *P*, *B*, *Q* e *R* del quadrilatero *PBQR* apparterranno quindi tutti alla circonferenza avente per centro il punto medio di *BR* e diametro *BR*.

3)
Rispetto alla circonferenza circoscritta al quadrilatero *PBQR*, gli angoli $B\widehat{P}Q$ e $B\widehat{R}Q$ sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{BQ}$ e perciò congruenti tra loro. Poiché l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{P}Q$ vale 45°, il triangolo rettangolo *BQR* ha gli angoli acuti congruenti ed è quindi isoscele su *BR*, ovvero $\overline{BQ} = \overline{QR}$.

Chiara Savian, Classe 2D
Liceo Scientifico "XXV Aprile", Portogruaro (VE)



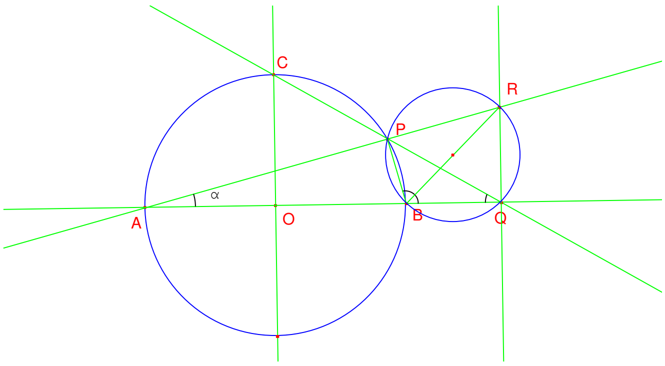
1)
$P\widehat{B}Q$ è angolo esterno rispetto al triangolo *ABP*, rettangolo in *P* in quanto inscritto in una semicirconferenza; dunque ha ampiezza α + 90° (per il secondo teorema dell'angolo esterno). L'angolo alla circonferenza $A\widehat{P}C$, insistendo sull'arco $\overset{\frown}{AC}$, quarta parte della circonferenza di diametro *AB*, ha ampiezza pari a 45° essendo la metà del corrispondente angolo al centro $A\widehat{O}C$ che è retto. Da questo segue che la retta *PQ* divide l'angolo retto $B\widehat{P}R$ in due parti congruenti e quindi l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{P}Q$ è pari a 135°. Se adesso consideriamo il triangolo *AQP,* si può dedurre che l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{Q}P$ è 45° $-\alpha$ ([ampiezza] $A\widehat{Q}P$ = 180° - 135° - α).



2)
Il quadrilatero *PBQR* è inscrivibile in una circonferenza poiché presenta una coppia di angoli opposti, $\hat{P}$ e $\hat{Q}$, retti e quindi supplementari [e gli altri due angoli?].

3)
Facendo riferimento alla circonferenza individuata dal quadrilatero *PBQR*, gli angoli alla circonferenza $B\hat{P}Q$ e $B\hat{R}Q$ sono congruenti insistendo sullo stesso arco $\overset{\frown}{BQ}$ e, avendo il primo di essi ampiezza pari a 45°, anche il secondo avrà tale ampiezza.
Il triangolo rettangolo *BQR* è così [quindi] metà di un quadrato. Perciò i suoi cateti sono congruenti, ovvero $\overline{BQ} = \overline{RQ}$.

Erika Smeriglio, Classe 2C
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)

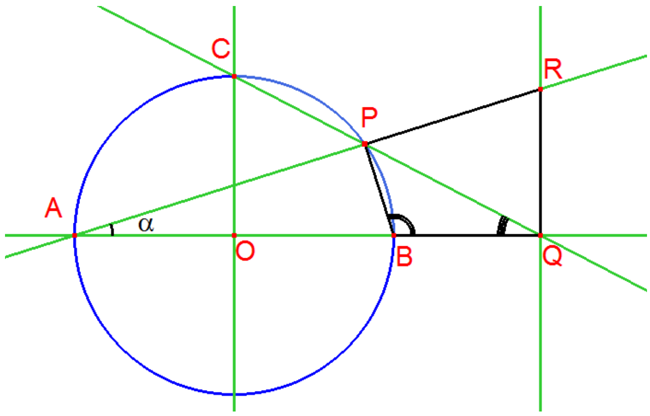


Questo elaborato è arrivato in un formato non di testo (immagine) che impedisce di inserire i commenti. Pertanto viene omesso.

Marco Baronchelli, Classe 2T
Liceo Scientifico Scienze Applicate "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

1)
Il triangolo ABP è rettangolo perché è inscritto in una semicirconferenza.

L'angolo PBQ misura $\alpha + 90°$ per il teorema dell'angolo esterno.
L'angolo CPA misura 45° perché angolo alla circonferenza corrispondente all'angolo al centro AOC il quale è retto per ipotesi.
L'angolo CPA è congruente all'angolo RPQ perché sono angoli opposti al vertice. L'angolo RPQ misura quindi 45°,RPB è un angolo retto quindi anche l'angolo QPB misura 45°.

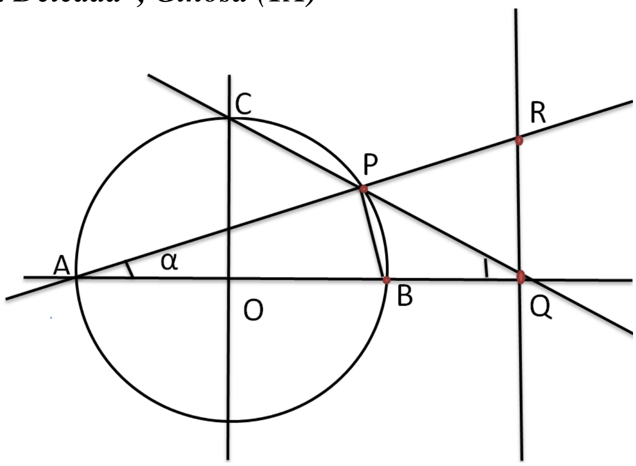


Consideriamo il triangolo APQ. L'angolo APQ misura dunque 135° [perché?].Quindi [la misura di] PQB = $180° - 135° - \alpha = 45° - \alpha$.

2)
Il quadrilatero PBQR è inscrivibile in una circonferenza perché gli angoli BPR e RQB sono supplementari perché entrambi misurano 90°. Poiché la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un quadrilatero misura 360°, anche gli angoli PBQ e QRP sono supplementari.

3)
BQ e QR sono congruenti perché insistono sugli angoli BPQ e QPR che sono angoli alla circonferenza (circoscritta al quadrilatero PBQR) congruenti (come dimostrato precedentemente).

Maria Federica Catania, Classe 3A
Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)



1)
L'angolo PBQ è determinabile considerando dapprima il triangolo APB. L'angolo APB risulta retto; poiché si tratta di un angolo alla circonferenza che sottende il diametro AB. Essendo la somma [delle ampiezze] degli angoli interni ad un triangolo pari a 180°, [ampiezza]PBA = 180° – [ampiezza]APB – [ampiezza]PAB = $180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$. Inoltre essendo su una retta, gli

angoli PBA e PBQ sono supplementari, quindi [ampiezza]PBQ = 180° − [ampiezza]PBA; [ampiezza]PBQ = 90° + α. Inoltre, è possibile affermare che CPA risulta metà dell'angolo al centro COA, perché sottendono allo stesso arco di circonferenza CA; quindi [ampiezza]CPA = 45°. L'angolo [ampiezza dell'angolo] BPQ = 180°– [ampiezza]APB – 45° = 180° – 90° – 45° = 45° , poiché angoli supplementari. Infine considerando il triangolo PBQ, [ampiezza]PQB = 180° – [ampiezza]PBQ – [ampiezza]BPQ = 180° – (90° + α) – 45° = 45° – α. [Ampiezza]PQB = 45° – α.

2)

Per dimostrare che il quadrilatero PBQR è inscrivibile in una circonferenza, sfrutto il teorema per cui se la somma [delle ampiezze] di due suoi angoli opposti è 180°, allora esso risulta inscrivibile. Essendo APB e BPR supplementari e come dimostrato precedentemente [ampiezza]APB = 90°, allora anche [ampiezza]BPR = 90°. Quindi, poiché [ampiezza]BPR + [ampiezza]BQR = 180° allora il quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza di diametro BR.

3)

L'angolo QPR [[=]][ha ampiezza pari a] 45°, perché complementare dell'angolo BPQ [[=]][di ampiezza pari a] 45°, essendo [ampiezza]BPR = 90°, come già dimostrato . Nella circonferenza di diametro BR, dove risulta inscritto il quadrilatero PBQR, le corde BQ e QR sono uguali [hanno la stessa lunghezza] (BQ = QR [$\overline{BQ} = \overline{QR}$]) perché, due angoli alla circonferenza uguali [congruenti] (BPQ e QPR) sottendono a due archi le cui corde saranno uguali [congruenti].