FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 9 - 23 Maggio 2014 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Siano γ e γ' due circonferenze di centri O e O' tangenti esternamente nel punto M . Sia r una retta passante per il punto M che interseca le due circonferenze in altri due punti A e A' (vedi Figura 1).

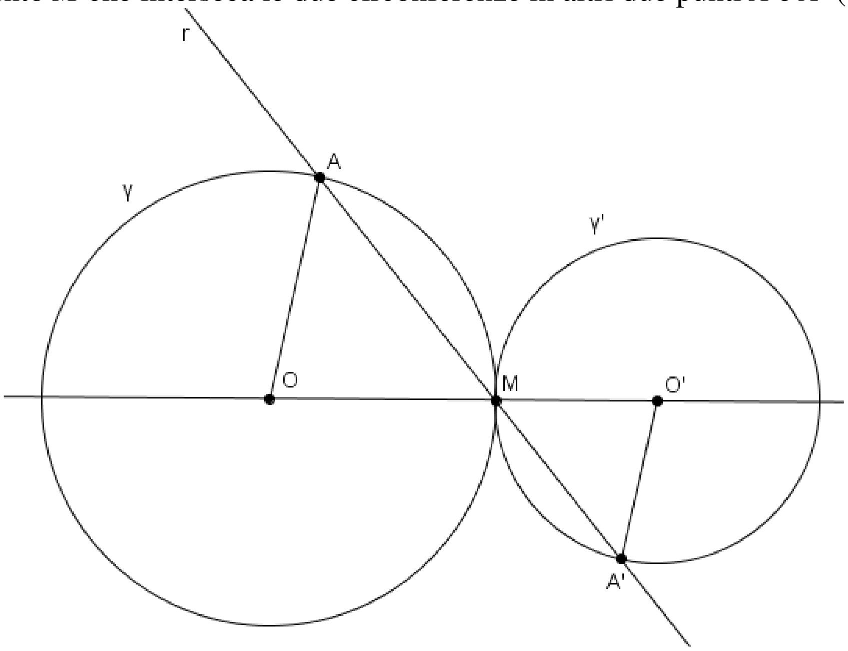


Figura 1

a) Dimostrare che i due raggi OA e $O'A'$ sono paralleli.

b) Tale proprietà vale ancora se le circonferenze sono tangenti internamente?

c) Siano ora B e B' due punti situati su γ e γ' rispettivamente e tali che OB sia parallelo a OB' (vedi Figura 2). Dimostrare che B, M e B' sono allineati.

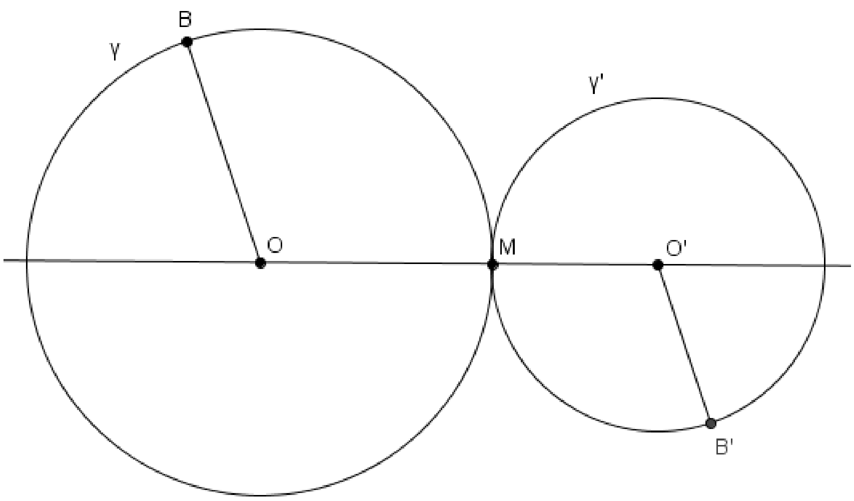


Figura 2

Commento

Abbiamo ricevuto due risposte, entrambe da classi seconde di Liceo Scientifico. Il problema poneva tre domande (solo in parte collegate) e riguardava inizialmente una figura geometrica costituita da due circonferenze tangenti esternamente e da una retta secante le due circonferenze e passante per il punto di tangenza. Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare il parallelismo dei due raggi ottenuti congiungendo i due centri delle predette circonferenze con i due rispettivi punti di intersezione della retta secante; nel secondo si chiedeva di dimostrare la permanenza o meno della proprietà prevista nel primo quesito nel caso in cui le due circonferenze fossero tangenti internamente e nel terzo quesito, date sempre due circonferenze tangenti esternamente e scelti due punti su di esse in modo che i due raggi aventi tali punti come uno degli estremi fossero paralleli, si chiedeva di dimostrare l'allineamento di tali punti col punto di tangenza.
Tutti rispondono in modo sostanzialmente corretto alle prime due domande (anche se non mancano le imprecisioni), mentre, per quanto riguarda la terza domanda, nessuno si mostra in grado di effettuare correttamente la dimostrazione, probabilmente fuorviato dal fatto che la relazione di allineamento di certi punti che deve essere dimostrata risulta "evidente" a un primo esame della figura (costruita con un software di geometria dinamica) e viene quindi implicitamente utilizzata all'interno della dimostrazione stessa.
È sempre presente l'abitudine a confondere un segmento con la sua lunghezza e un angolo con la sua ampiezza, con la conseguenza di utilizzare la stessa notazione per indicare due concetti diversi.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "Pitagora", Rende (CS)
LS "Jacopone", Todi (PG)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Domenico Corasiniti, Evelina Porco, Classe 2B
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)

a)
Il triangolo AOM è isoscele in quanto [[ha i lati]] [per i lati AO e OM vale la relazione] AO ≅ OM, perché raggi della circonferenza γ ; di conseguenza .
Il triangolo A'O'M è isoscele in quanto ha i lati [[A'O' ≅ O'M]] [A'O' e O'M] congruenti, perché raggi della circonferenza γ' ; di conseguenza $O'\hat{A}'M \cong O'\hat{M}A'$.

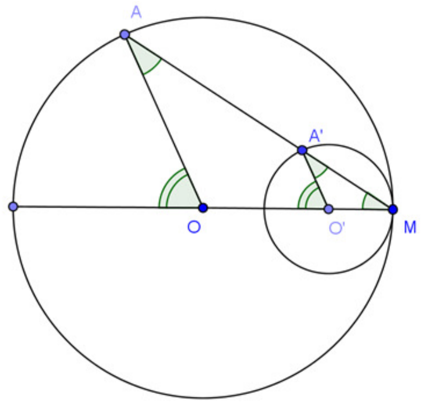
$O\hat{M}.$

Gli angoli [[$O\hat{M}A \cong O'\hat{M}A'$]] [$O'\hat{M}A'$] , perché angoli opposti al vertice; di conseguenza per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli, rosulta:]

.

Di conseguenza [le due rette sostegno dei due] [[i]] due raggi OA e O'A' sono paralleli [parallele] perché [[hanno]] [formano con la trasversale AA'] [[gli]] angoli alterni interni congruenti.

b)



Il triangolo AOM è isoscele in quanto ha i lati [[AO≅ OM]] [AO e OM congruenti], perché raggi della circonferenza γ ; di conseguenza .
Il triangolo A’O’M è isoscele in quanto ha i lati [[A’O’ ≅ O’M]] [A’O’ e O’M congruenti], perché raggi della circonferenza γ' ; di conseguenza $O'\hat{A}'M \cong O'\widehat{M}A'$.

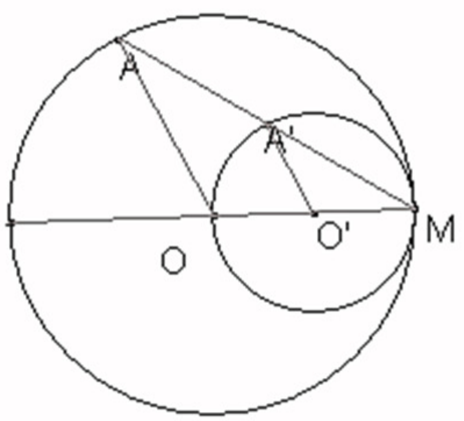
L’angolo $\widehat{M}$ è in comune, di conseguenza .
Così, i due raggi OA e O’A’ sono paralleli perché [le loro rette sostegno formano con la trasversale AA’] [[hanno gli]] angoli corrispondenti congruenti.

c)
[[…]]

Classe 2B
Liceo Statale “Jacopone”, Todi (PG)

a)
Dati i raggi OA e O'A' si formano due triangoli isosceli [OAM e O’A’M], in quanto OA e OM sono raggi della circonferenza γ e O'A' e O' M sono raggi della circonferenza γ' perciò hanno i rispettivi angoli alla base congruenti. Inoltre gli angoli AMO e O'MA' sono congruenti perchè opposti al vertice. Essendo quest'ultimi [questi ultimi] angoli alla base dei triangoli presi in considerazione possiamo affermare che gli angoli O'A'M e OAM sono congruenti, e per il teorema del fascio di rette parallele tagliate da una trasversale, li riconosciamo come angoli alterni interni formati dalle intersezioni della trasversale r con [le rette sostegno dei] [[i]] raggi OA e O'A', in conclusione OA//O'A'.

b)



Se prendiamo in considerazione due circonferenze tangenti internamente, notiamo in egual modo due triangoli isosceli aventi [[i lati obliqui]] [due lati] che sono raggi di due circonferenze, mentre [i lati scelti come] [[le]] basi giacciono sulla stessa retta. Inoltre hanno l'angolo O'MA' in comune. Perciò possiamo dire che per quanto riguarda gli angoli sussistono le seguenti uguaglianze [intese come uguaglianze di ampiezze]: O'MA' = MA'O' = OAM. Ancora una volta per il teorema del fascio di rette parallele tagliate da una trasversale possiamo dimostrare il parallelismo tra [le rette sostegno di] OA e O'A', poiché O'A'M e OAM sono angoli [[alterni interni]] [corrispondenti] congruenti.

c)
[[…]]