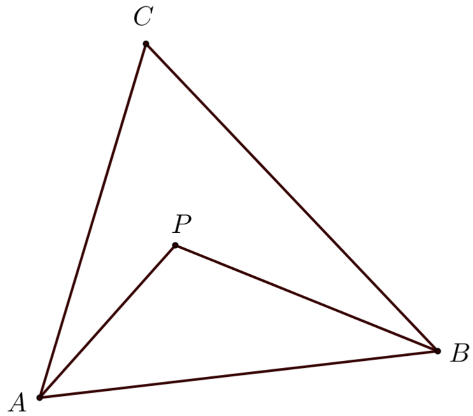
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 13-27 Gennaio 2014 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia *ABC* un triangolo e *P* un punto interno ad esso (vedi figura).



1) Provare che $\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{BC}$.
2) Nell'ipotesi che *P* sia il baricentro del triangolo dedurre che la somma delle misure delle mediane di un triangolo è minore di tre volte la misura del suo semiperimetro.
3) Provare che, in effetti, la somma delle misure delle mediane di un triangolo è minore della misura del suo perimetro.

Giustificare tutte le risposte.

Commento

A questo problema abbiamo ricevuto due sole risposte provenienti da due diverse classi seconde di Liceo Scientifico! Le motivazioni possono essere diverse: il periodo, fine primo quadrimestre, non proprio favorevole a un ulteriore impegno scolastico e la relativa difficoltà del problema proposto, anche se il testo poteva servire da guida al raggiungimento della soluzione. In ogni caso riteniamo che sia opportuno, da un punto di vista didattico, presentare agli studenti anche quesiti che richiedano un maggiore impegno.

Il problema poneva tre quesiti relativi a una stessa figura costituita da un triangolo e da un punto generico al suo interno. Tutti e tre i quesiti richiedevano di dimostrare alcune disuguaglianze che coinvolgevano le misure di particolari segmenti e loro somme esplicitamente indicate.

Nelle due risposte pervenute vengono affrontati i tre quesiti, ma non mancano imprecisioni o affermazioni non completamente motivate. Ancora una volta si fa confusione tra una grandezza geometrica e la sua misura.

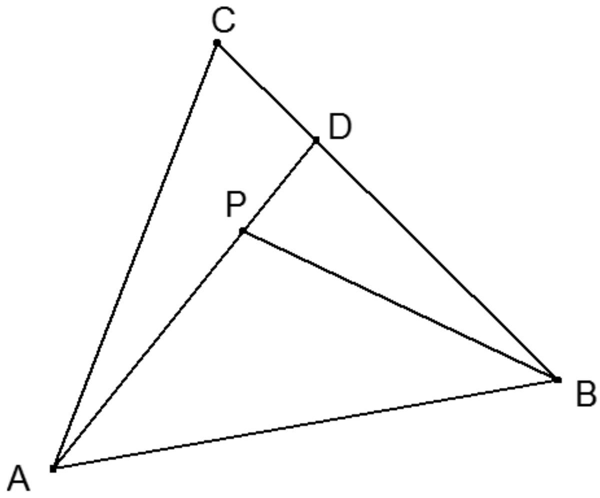
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

LS “Pitagora”, Rende (CS)

LS “G. Terragni”, Olgiate Comasco (CO)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Martina Berardi, Erika Smeriglio, Classe 2C
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



1)

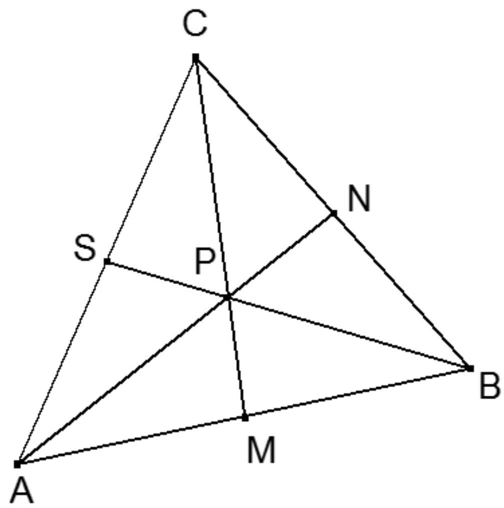
PB < PD + BD [$\overline{PB} < \overline{PD} + \overline{BD}$] per disuguaglianza triangolare;

PA + PB < PA + PD + DB [$\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{PA} + \overline{PD} + \overline{DB}$] per [una delle] proprietà delle disuguaglianze;

PA + PB < AD + DB [$\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{AD} + \overline{DB}$] per somma di segmenti [perché $\overline{AP} + \overline{PD} = \overline{AD}$];

PA + PB < AC + CD + DB [$\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB}$] per differenza di segmenti [perché $\overline{AD} < \overline{AC} + \overline{CD}$];

PA + PB < AC + CB [$\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{AC} + \overline{CB}$] per somma di segmenti [perché $\overline{CD} + \overline{DB} = \overline{CB}$].



2)

CM < MB + CB [$\overline{CM} < \overline{MB} + \overline{CB}$] per disuguaglianza triangolare;

AN < CN + AC [$\overline{AN} < \overline{CN} + \overline{AC}$] per disuguaglianza triangolare;

BS < AS + AB [$\overline{BS} < \overline{AS} + \overline{AB}$] per disuguaglianza triangolare.

Sommando membro a membro otteniamo:

CM + AN + BS < MB + CB + CN + AC + AS + AB

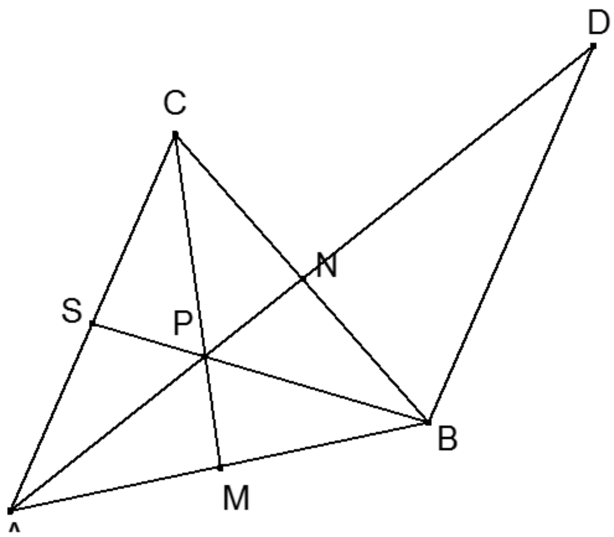
[$\overline{CM} + \overline{AN} + \overline{BS} < \overline{MB} + \overline{CB} + \overline{CN} + \overline{AC} + \overline{AS} + \overline{AB}$]

CM + AN + BS < AB + BC + CA + $\frac{1}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ CA

[$\overline{CM} + \overline{AN} + \overline{BS} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA}$]

CM + AN + BS < $\frac{3}{2}$AB + $\frac{3}{2}$BC + $\frac{3}{2}$CA [$\overline{CM} + \overline{AN} + \overline{BS} < \frac{3}{2}\overline{AB} + \frac{3}{2}\overline{BC} + \frac{3}{2}\overline{CA}$]

CM + AN + BS < 3 $\frac{p}{2}$ [$\overline{CM} + \overline{AN} + \overline{BS} < 3\frac{p}{2}$] (*p* perimetro) [non viene utilizzato il primo punto come suggerito]



3)
Considero I triangoli ANC e BND [occorre spiegare come è costruito il triangolo BND]. Essi hanno:
AN ≅ ND per costruzione;
$A\hat{N}C \cong B\hat{N}D$ perché angoli opposti al vertice;
CN ≅ NB per ipotesi.
I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza.
AD < AB + DB [$\overline{AD} < \overline{AB} + \overline{DB}$] per disuguaglianza triangolare
2AN < AB + DB [$2\overline{AN} < \overline{AB} + \overline{DB}$]

AN < $\frac{AB+BD}{2}$ [$\overline{AN} < \frac{\overline{AB}+\overline{BD}}{2}$]

AN < $\frac{AB+AC}{2}$ [$\overline{AN} < \frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$]

Essendo AN mediana questa relazione [una relazione analoga] vale per tutte le mediane del triangolo:

AN < $\frac{AB+AC}{2}$ [$\overline{AN} < \frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$]

BS < $\frac{AB+BC}{2}$ [$\overline{BS} < \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{2}$]

CM < $\frac{AC+BC}{2}$ [$\overline{CM} < \frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{2}$]

Sommando membro a membro otteniamo:

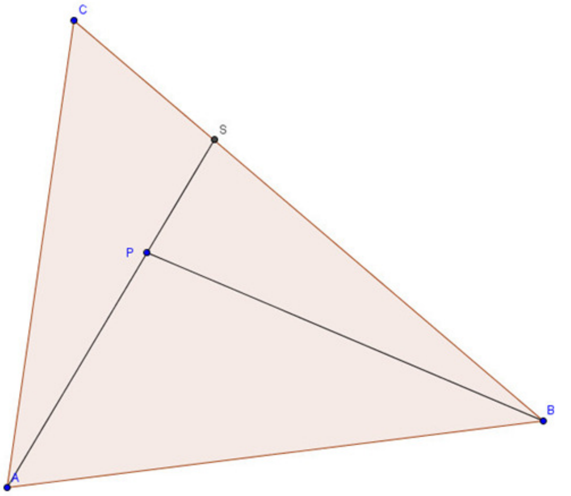
AN + BS + CM < $\frac{AC+BC+AB+AC+BC+AB}{2}$ [$\overline{AN} + \overline{BS} + \overline{CM} < \frac{\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}}{2}$]

AN + BS + CM < $\frac{2AC+2BC+2AB}{2}$ [$\overline{AN} + \overline{BS} + \overline{CM} < \frac{2\overline{AC}+2\overline{BC}+2\overline{AB}}{2}$]

AN + BS + CM < $\frac{2p}{2}$ [$\overline{AN} + \overline{BS} + \overline{CM} < \frac{2p}{2}$]

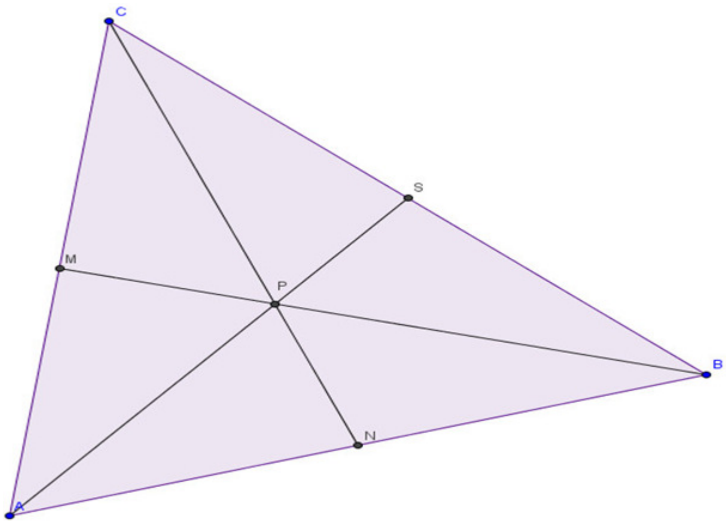
AN + BS + CM < $\mathcal{P}$ [$\overline{AN}+\overline{BS}+\overline{CM} < p$]

Classe A, Liceo delle Scienze Applicate
Liceo Scientifico "G. Terragni", Olgiate Comasco (CO)



1)
Consideriamo il triangolo CAS dove S è il punto d'intersezione tra il prolungamento del segmento AP e il lato BC. Per la disuguaglianza triangolare (ogni lato di un triangolo deve essere minore della somma degli altri due) applicata a tale triangolo, segue che:
$\overline{CA} + \overline{CS} > \overline{SA}$
Analogamente, applicando la stessa disuguaglianza al triangolo PBS, si dimostra che:
$\overline{SB} + \overline{PS} > \overline{PB}$
Sommando le due disuguaglianze membro a membro, si ottiene che:
$\overline{AC} + \overline{CS} + \overline{SB} + \overline{PS} > \overline{SA} + \overline{PB}$

Essendo: $\overline{CS} + \overline{SB} = \overline{CB}$,la disuguaglianza precedente diventa:
$\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{PS} > \overline{SA} + \overline{PB}$
Osservando che: $\overline{AP} + \overline{PS} = \overline{AS}$, si ottiene:
$\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{PS} > \overline{AP} + \overline{PS} + \overline{PB}$
⇨ $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AP} + \overline{PB}$,$c.v.d.$



2)

Nell'ipotesi in cui P sia il baricentro del triangolo ABC, il punto S risulterebbe essere il punto medio del lato CB. Segue che:

$CS \cong SB$

Si ha che:

[$AC + \frac{CB}{2} > AS$] $\overline{AC}+\frac{\overline{CB}}{2}>\overline{AS}$

Applicare [Applicando] il medesimo ragionamento alle altre mediane, si ottiene:

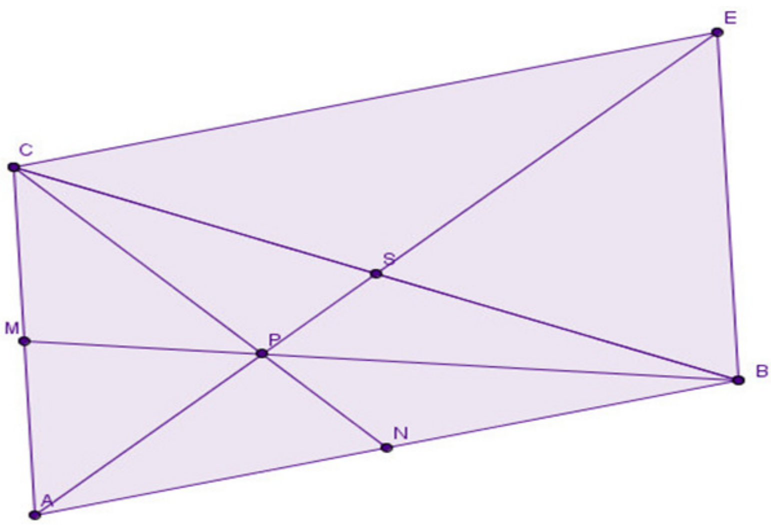
[$AB + \frac{CA}{2} > BM$] $\overline{AB}+\frac{\overline{CA}}{2}>\overline{BM}$

[$CB + \frac{AB}{2} > CN$] $\overline{CB}+\frac{\overline{AB}}{2}>\overline{CN}$

Sommando membro a membro le tre disuguaglianze, si ottiene:

$$\overline{AC}+\overline{AB}+\overline{CB}+\frac{\overline{CA}+\overline{AB}+\overline{CB}}{2}>\overline{BM}+\overline{CN}+\overline{AS}$$

⇨ $3p > \overline{BM}+\overline{CN}+\overline{AS}$,$c.v.d.$ [non viene utilizzato il primo punto come suggerito].



3)

Prolunghiamo la mediana AS di un segmento SE, tale che:

$SE \cong AS$

Consideriamo i triangoli ASB e CSE. Sappiamo che:

1- $AS \cong SE$ (*Per costruzione*)
2- $CS \cong SB$ (*Essendo S punto medio di CB*)
3- $A\hat{S}B \cong C\hat{S}E$ (*Angoli opposti al vertice*)

Per il primo criterio di congruenza dei triangoli, ASB e CSE triangolo risultano congruenti

Per la disuguaglianza triangolare (ogni lato di un triangolo deve essere minore della somma degli altri due) applicata al triangolo CAE, segue che:

[$AC + CE > AE$] $\overline{AC} + \overline{CE} > \overline{AE}$

Essendo CE congruente ad AB, risulta che:

[$AS < \frac{AC + AB}{2}$] $\overline{AS} < \frac{\overline{AC} + \overline{AB}}{2}$

Applicando il medesimo ragionamento alle mediane BM e CN, otteniamo:

[$CN < (AC + CB)/2$] $\overline{CN} < (\overline{AC} + \overline{CB})/2$

[$BM < (CB + AB)/2$] $\overline{BM} < (\overline{CB} + \overline{AB})/2$

Infine sommando membro a membro le disuguaglianze, arriviamo alla tesi:

[$AS + CN + BM < AC + CB + AB$] $\overline{AS} + \overline{CN} + \overline{BM} < \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{AB}$

[$AS + CN + BM < 2p$, *c.v.d.*] $\overline{AS} + \overline{CN} + \overline{BM} < 2p$.

--