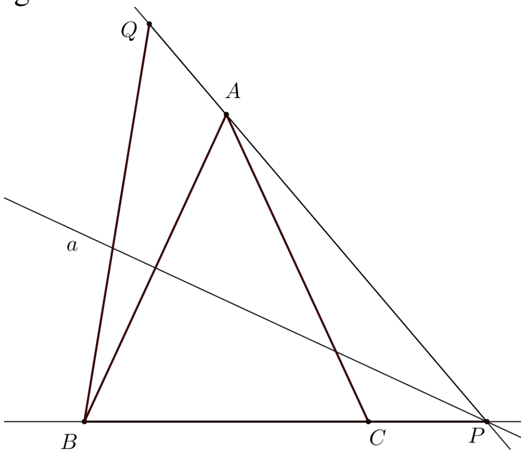
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 10-24 Febbraio 2014 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia *ABC* un triangolo isoscele acutangolo sulla base *BC*. Tracciato l'asse *a* del lato *AB* sia *P* la sua intersezione con il prolungamento di *BC* (vedi figura). Unito *P* con *A* si riporti sulla retta *AP*, dalla parte di *A*, il segmento *AQ* congruente a *CP*.



1) Dimostrare che il triangolo *BPQ* è isoscele.
2) *PBQ* può essere un triangolo rettangolo ?
Motivare le risposte.

Commento

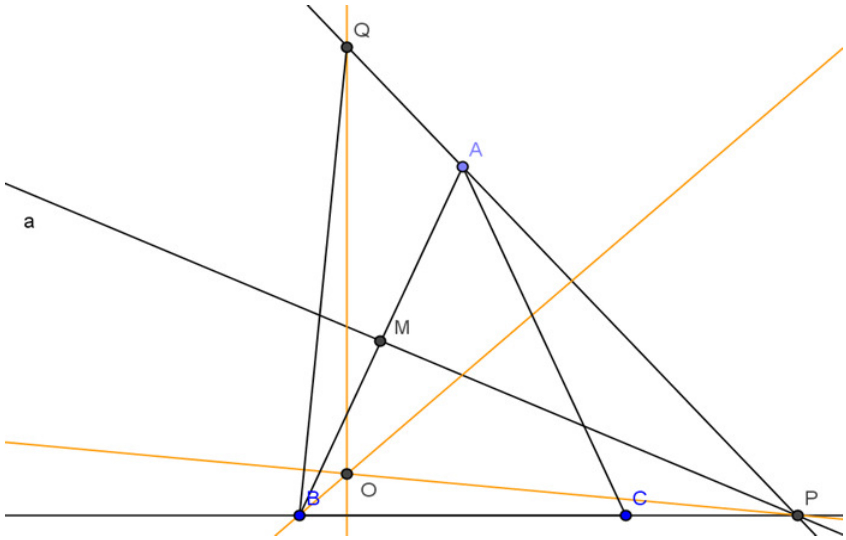
Abbiamo ricevuto nove risposte così suddivise: quattro da classi prime di Scuole Secondarie di II grado, quattro da classi seconde, sempre di Scuole Secondarie di II grado e una risposta da una Scuola Secondaria di I grado facente parte di un Istituto Comprensivo. Il problema poneva due domande relative alla stessa figura: nel primo quesito si chiedeva di dimostrare la particolare natura di un triangolo risultante dalla costruzione illustrata in figura; nel secondo quesito si chiedeva di stabilire la possibilità o meno che tale triangolo fosse rettangolo.
In tutte le soluzioni pervenute viene risposto in modo sostanzialmente corretto al primo quesito (salvo alcune imprecisioni), mentre, per quanto riguarda la seconda domanda, solo alcuni dimostrano che il triangolo isoscele (come risulta dalla dimostrazione del primo punto) può essere anche rettangolo: la maggioranza o non risponde o fornisce una risposta negativa basandosi sulla particolare situazione illustrata dalla figura.
Nella maggior parte di queste risposte dobbiamo rilevare la presenza di un errore spesso evidenziato nelle precedenti correzioni, cioè confondere un angolo con la sua ampiezza e un segmento con la sua lunghezza. Un altro errore più sottile che ci preme segnalare (perché presente anche in alcuni testi di geometria) è il seguente: quando si fa l'intersezione di due figure geometriche (considerate come insieme di punti) che hanno un solo punto in comune il risultato non è un punto, ma l'insieme che contiene un solo elemento, cioè il punto comune.

Sono pervenute risposte dalle seguenti Scuole:
LS “C. Cafiero”, Barletta (BT)
Liceo “F.Stabili – E.Trebbiani”, Ascoli Piceno (AP)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS, Scienze Applicate, “G. Terragni”, Olgiate Comasco (CO)
Ist. Comp. “G. Deledda”, Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Elisabetta Monica, Classe 1B
Liceo Scientifico Statale “C. Cafiero”, Barletta (BT)



1)
Considero [il triangolo] AMP [[triangolo]] e [il triangolo] MBP [[triangolo]]; [essi hanno:]

$$\begin{cases} MP \text{ in comune} \\ MA \cong BM \text{ per ipotesi} \\ A\hat{M}P \cong B\hat{M}P \text{ perchè retti} \end{cases}$$

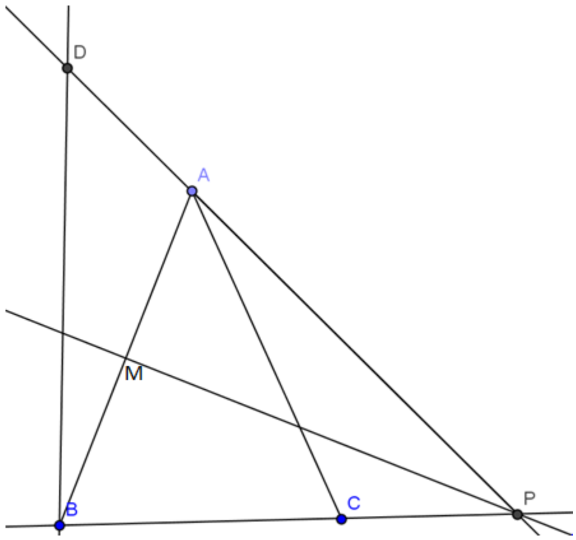
$\textit{per il } 1^\circ \textit{ criterio di congruenza dei triangoli}$
AMP [[triangolo]] ≅ PMB [[triangolo]]
AP ≅ BP $\quad$ $\textit{elementi corrispondenti in triangoli congrenti}$ [congruenti]
M$\hat{A}P \cong M\hat{B}P$ $\quad$ [idem]
A$\hat{P}M \cong B\hat{P}M$ $\quad$ [idem]
$A\hat{C}B \cong C\hat{B}A \cong P\hat{A}M$, quindi $A\hat{C}B \cong M\hat{A}P$
Considero [il triangolo] ACP [[triangolo]] e [il triangolo] QAB [[triangolo]]; [essi hanno:]

$$AC \cong AB \text{ per ipotesi}$$
$$CP \cong QA \text{ per ipotesi}$$

$P\hat{C}A \cong Q\hat{A}B$ $\textit{perchè supplementari di angoli congruenti}$
$\textit{per il } 1^\circ \textit{ criterio di congruenza dei triangoli}$
ACP [[triangolo]] ≅ QAB [[triangolo]]
$\Rightarrow$ BQ $\cong AP \cong BP$ $\textit{elementi corrispondenti in triangoli congruenti}$ $\Rightarrow$ $QB \cong BP$
$\xRightarrow[\text{per definizione}]{}$ [il triangolo] BPQ [[triangolo]] è isoscele.

2)
[[…]]

Hanna Zhurba, Classe 1C
Liceo Scientifico Statale "C. Cafiero", Barletta (BT)



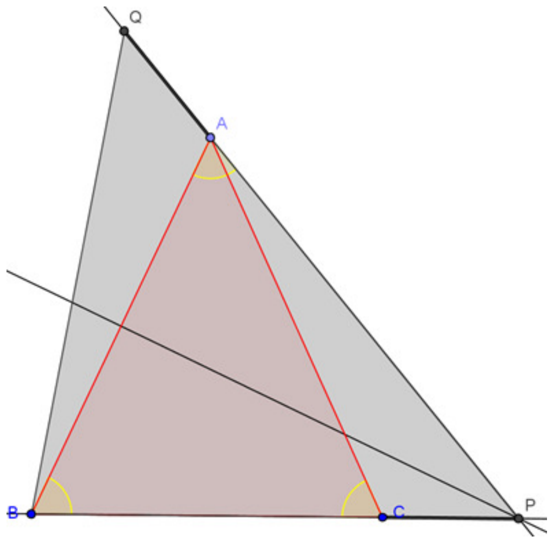
1)
Considero [il triangolo] AMP [[triang. Λ]] [e il triangolo] MPB [[triang.]]

$$\begin{cases} AM \cong MB \text{ per asse} \\ MP \text{ è in comune} \\ A\widehat{M}P \cong P\widehat{M}B \text{ per asse} \end{cases}$$

AM ≅ MB [perché M è il punto medio …]
MP è in comune
$A\widehat{M}P \cong P\widehat{M}B$ [perché i due angoli…]
[per il primo criterio di congruenza dei triangoli] AMP [[triangolo]] ≅ MPB [[triangolo]][perché elementi corrispondenti di triangoli congruenti]
[Considero il triangolo BAD e il triangolo APC]
AD ≅ CP per ipotesi
AB ≅ AC per la definizione [di triangolo isoscele]
⇒ BAD ≅ APC [per il primo criterio di congruenza dei triangoli] ⇒ BPD [è un triangolo isoscele] [occorre spiegare].

2)
[[…]]

Giulia De Luca, Irene Filippini, Classe 1B
Liceo "Stabili-Trebbiani", indirizzo classico, Ascoli Piceno (AP)



1)

Poiché l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi: PA ≅ PB.
Il triangolo ABP è pertanto isoscele sulla base AB e risulta anche: A$\hat{B}P \cong P\hat{A}B$.
Ma $A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$ perché, per ipotesi, ABC è isoscele sulla base BC, quindi per la proprietà transistiva [transitiva] della relazione di congruenza degli angoli: $B\hat{C}A \cong P\hat{A}B$
Consideriamo i triangoli BAQ e PCA, essi hanno:

$$\left.\begin{array}{c} AB \cong AC \text{ per ipotesi} \\ QA \cong DC \text{ per ipotesi} \\ Q\hat{A}B \cong A\hat{C}P \text{ perché angoli supplementari di angoli congruenti} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

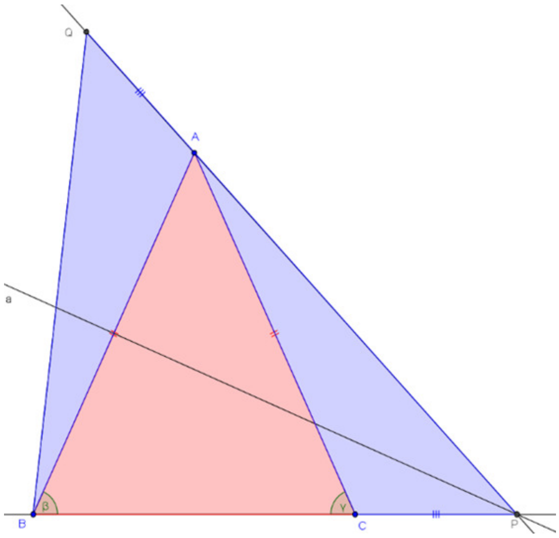
BAQ ≅ PCA per il 1° criterio di congruenza dei triangoli $\Rightarrow$

$$BQ \cong AP$$

Deduciamo che se BQ ≅ AP e AP ≅ PB allora anche BQ ≅ PB, [[perché somme di segmenti rispettivamente congruenti]] [per la proprietà transitiva della relazione di congruenza tra segmenti], e quindi il triangolo BPQ è isoscele sulla base QP.

2)
[[…]]

Alessandro Carboni, Alberico Ferretti, Valerio Rosati
[[*Giulia De Luca, Irene Filippini*]], *Classe 1B*
Liceo "Stabili-Trebbiani", indirizzo classico, Ascoli Piceno (AP)



1)
Essendo la retta a l'asse di AB, allora $AP \cong BP$ (infatti l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai suoi estremi) e quindi il triangolo ABP è isoscele su base AB; pertanto i due angoli adiacenti alla base, $A\hat{B}P$ e $B\hat{A}P$, sono congruenti.
Si considerino i triangoli ACP e AQB, essi hanno:

$$\left.\begin{array}{c} AB \cong AC \text{ per ipotesi} \\ Q\hat{A}B \cong A\hat{C}P \text{ ang.suppl.di ang.congr.} \\ QA \cong CP \text{ per ipotesi} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} ACP \cong AQB \\ (1^\circ \text{ crit.di congr.dei triangoli}) \end{array} \Rightarrow QB \cong PA$$

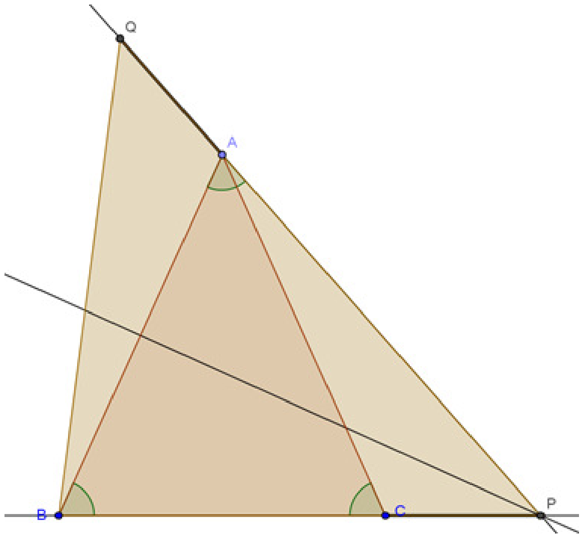
Se $QB \cong PA$ e $PA \cong PB$ allora, per la proprietà transitiva della relazione di congruenza tra segmenti, $QB \cong PB$ e quindi il triangolo *BPQ* è isoscele.

2)
L'esplorazione dinamica della figura ci ha mostrato che è possibile che $P\hat{Q}B = 90°$. Infatti, indicata con x la misura dell'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$, $Q\hat{B}P = 90°$ se e solo se $Q\hat{B}A = 90° - x$. Essendo $180°$ la somma della misura delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo, allora la misura dell'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C$ è $180° - 2x$. Abbiamo sopra dimostrato che i triangoli QBA e ACP sono congruenti e quindi $Q\hat{B}A \cong C\hat{A}P$ perché angoli corrispondenti di triangoli congruenti. Poiché $C\hat{A}P$ è la differenza tra $B\hat{A}P$ e $B\hat{A}C$ allora l'ampiezza dell'angolo $C\hat{A}P$ misura $x - (180° - 2x)$. È possibile pertanto scrivere la seguente equazione:

$$90° - x = x - (180° - 2x)$$
$$90° - x = x - 180° + 2x$$
$$-x - x - 2x = -90° - 180°$$
$$-4x = -270°$$
$$4x = 270°$$
$$x = \frac{270°}{4}$$
$$x = 67{,}5°$$

L'angolo $Q\hat{B}P$ è retto se e solo se l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ misura $67{,}5°$.

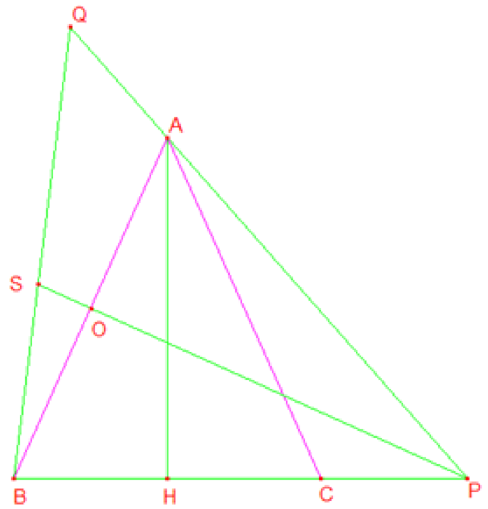
Benedetta Anselmi, Letizia Mascitti, Classe 2H
Liceo "Stabili-Trebbiani", indirizzo linguistico, Ascoli Piceno (AP)



1)
Per una nota proprietà dell'asse di un segmento, $BP \cong AP$ e, conseguentemente, $A\hat{B}C \cong B\hat{A}P$.
Poiché, per ipotesi ABC è isoscele sulla base BC, $A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$. Per La proprietà transitiva della relazione di congruenza degli angoli è anche $A\hat{C}B \cong B\hat{A}P$.
Consideriamo ora i triangoli ABQ e ACP, essi hanno: $AQ \cong CP$ per ipotesi, $AB \cong AC$ per ipotesi e $Q\hat{A}B \cong A\hat{C}P$ poiché angoli supplementari di angoli congruenti ($A\hat{C}B \cong B\hat{A}P$). Essi sono quindi congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli e pertanto $AP \cong BQ$ poiché elementi corrispondenti di triangoli congruenti. Ma $BP \cong AP$ quindi, per la proprietà transitiva della relazione di congruenza dei segmenti, $BQ \cong BP$. Il triangolo BPQ è quindi isoscele.

2)
Muovendo la figura su GeoGebra, abbiamo visto che BPQ può essere retto in B.
Indichiamo con x_1 la misura dell'ampiezza dell'angolo $Q\hat{B}A$ e con x_2 quella dell'angolo $C\hat{A}P$ (i due angoli sono congruenti poiché elementi corrispondenti di triangoli congruenti (sopra dimostrato).
Indichiamo poi con α la misura dell'ampiezza di entrambi gli angoli congruenti alla base del triangolo isoscele ABC, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.
L'angolo $Q\hat{B}P$ è retto se e solo se $x_1 = 90° - \alpha$, mentre $x_2 = \alpha - (180° - 2\alpha)$ (α è anche la misura dell'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}P$, che, come sopra dimostrato, è congruente ad $A\hat{B}C$ e $180° - 2\alpha$ è la misura dell'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C$).
Poiché $x_1 = x_2$, allora $90° - \alpha = \alpha - (180° - 2\alpha)$; $90° - \alpha = \alpha - 180° + 2\alpha$; $4\alpha = 270°$; $\alpha = 67{,}5°$.
Possiamo quindi dire che $Q\hat{B}P$ è retto SE E SOLO SE gli angoli alla base del triangolo ABC sono di $67{,}5°$.

Emma Capparelli, Erika Smeriglio, Classe 2C
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



1)

OP è l'asse del lato AB [il punto O è …], essendo l'asse un luogo di punti che godono della proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento, di conseguenza AP ≅ PB e il triangolo APB è isoscele.

- $A\hat{B}C \cong B\hat{C}A$ perché angoli alla base del triangolo isoscele ABC;
- $B\hat{A}P \cong A\hat{B}C$ perché angoli alla base del triangolo isoscele APB;

Per la proprietà transitiva $P\hat{B}A \cong B\hat{A}P$

Di conseguenza $Q\hat{A}B \cong A\hat{C}P$ perché angoli supplementari ad angoli congruenti [[($\hat{\pi} - P\hat{B}A \cong Q\hat{A}B$ e $\hat{\pi} - B\hat{A}P \cong B\hat{C}A$)]].

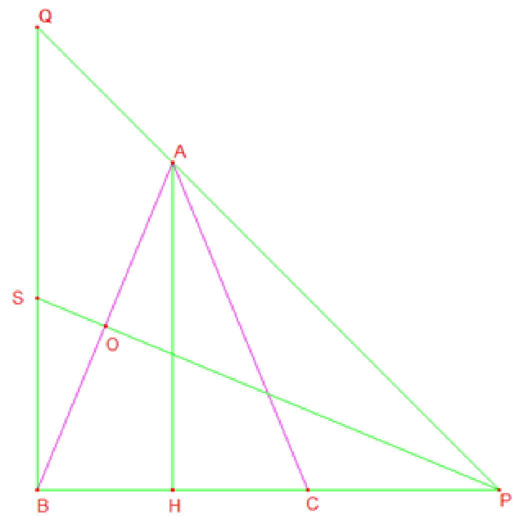
Considero i triangoli QAB e ACP. Essi hanno:

- AB ≅ AC per ipotesi;
- [[AB≅AC per ipotesi]] [CP ≅ AQ per ipotesi];
- [[$B\hat{A}P \cong A\hat{B}C$]] [$Q\hat{A}B \cong A\hat{C}P$] per dimostrazione precedente;

i due triangoli sono congruenti per il 1° criterio di congruenza e di conseguenza

- AP ≅ QB;
- $C\hat{A}P \cong A\hat{B}Q$;
- $B\hat{Q}A \cong A\hat{P}C$;

Se $C\hat{A}P \cong A\hat{B}Q$ [$B\hat{Q}A \cong A\hat{P}C$] allora il triangolo QBP è un triangolo isoscele.



2)

Se AH ≅ HP il triangolo AHP è un triangolo isoscele rettangolo di conseguenza $H\hat{A}P \cong A\hat{P}H \cong \frac{\pi}{4}$

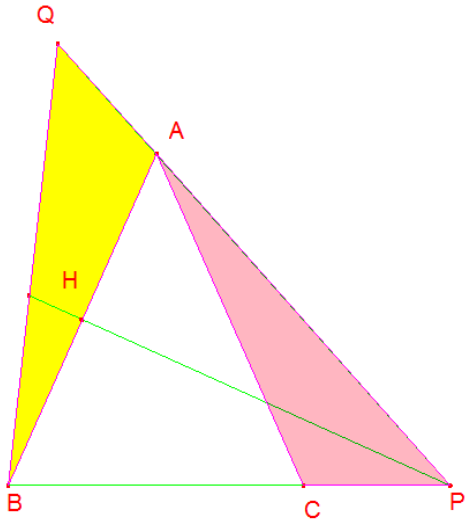
[$H\widehat{A}P \cong A\widehat{P}H$ e ognuno misura $\frac{\pi}{4}$] perché angoli alla base di un triangolo isoscele rettangolo.

Se $A\hat{P}H \cong \frac{\pi}{4}$ [$A\widehat{P}H$ misura $\frac{\pi}{4}$] anche $B\hat{Q}P \cong \frac{\pi}{4}$ [$B\widehat{Q}P$ misura $\frac{\pi}{4}$] perché il triangolo BQP è un triangolo isoscele per dimostrazione precedente.

Se $B\hat{Q}P \cong A\hat{P}H \cong \frac{\pi}{4}$ [$B\widehat{Q}P$ e $A\widehat{P}H$ hanno entrambi ampiezza pari a $\frac{\pi}{4}$] allora $Q\hat{B}P \cong \frac{\pi}{2}$ [$Q\widehat{B}P$ ha ampiezza pari a $\frac{\pi}{2}$]

In sintesi se AH ≅ HP allora il triangolo QBP è rettangolo. [Ma come devono essere le ampiezze degli angoli del triangolo ABC?]

Evelina Porco, Giampietro Rizzo, Classe 2B
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



1)

Considero i triangoli BHP e AHP, essi hanno:

PH in comune;

AH ≅ HB perché per costruzione PH è l'asse relativa ad AB [del segmento AB];

$A\hat{H}P \cong B\hat{H}P$ perché per costruzione PH è l'asse relativo ad AB [del segmento AB].

I triangoli considerati sono congruenti per il primo criterio di congruenza, di conseguenza:

$A\hat{P}H \cong B\hat{P}H$

BP≅AP

$H\hat{B}P \cong H\hat{A}P$,

per la proprietà transitiva:

$H\hat{B}P \cong A\hat{C}B \cong H\hat{A}P$

Considero i triangoli BQA e ACP, essi hanno:

AB≅ AC perché per ipotesi il triangolo ABC è isoscele;

AQ≅CP per costruzione;

$Q\hat{A}B \cong A\hat{C}P$ perché angoli supplementari ad angoli congruenti.

I triangoli considerati sono congruenti per il primo criterio di congruenza, di conseguenza:

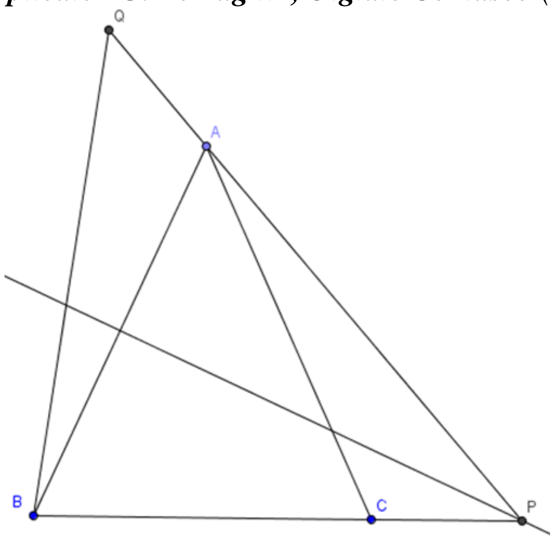
BQ≅AP

$B\hat{Q}A \cong A\hat{P}C$
$Q\hat{B}A \cong C\hat{A}P$

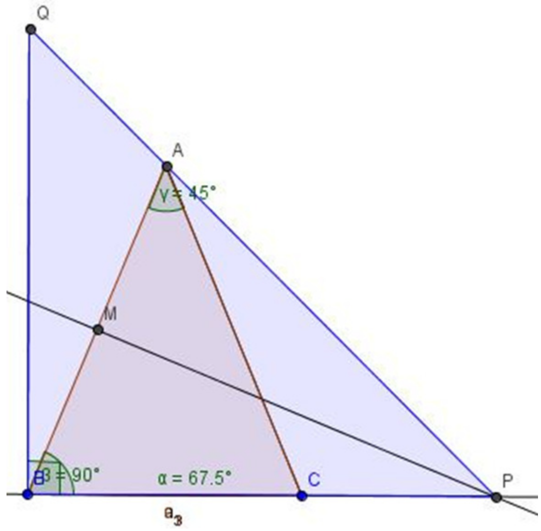
Segue che il triangolo BPQ è isoscele poiché gli angoli alla base $Q\hat{B}A$ e $C\hat{A}P$ [$B\hat{Q}A$ e $A\hat{P}C$] sono congruenti.

2)
[[…]]

Marco Berardinetti, Luca Savoldelli, Classe 2A
Liceo Scientifico Scienze Applicate "G. Terragni", Olgiate Comasco (CO)



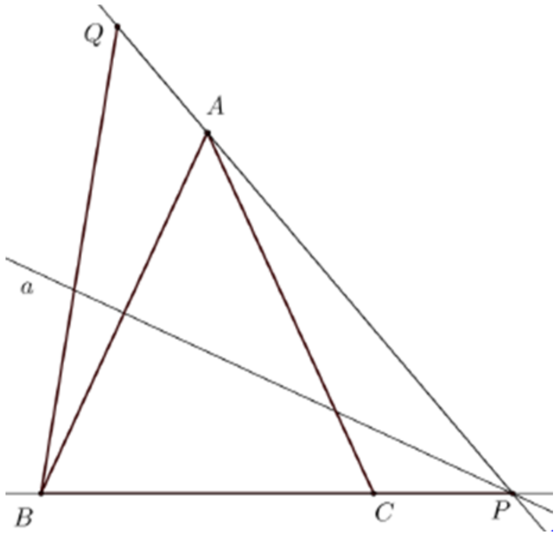
1)
Consideriamo il triangolo BPA. Il segmento PM appartiene alla retta a, che è l'asse del segmento BA, per cui ogni suo punto [è] equidistante da A e da B. Per questo $BP \cong PA$; per il teorema dei triangoli isosceli [per la definizione di triangolo isoscele il] triangolo BAP è isoscele, per cui $P\hat{A}B \cong P\hat{B}A$ [e quindi $P\hat{A}B \cong B\hat{C}A$].
Consideriamo, ora, i triangoli CPA e QAB; essi hanno:
1) $P\hat{C}A \cong B\hat{A}Q$ (per differenza di angoli congruenti);
2) $QA \cong CP\ (hp5)$ [per ipotesi];
3) $AB \cong AC$ [per ipotesi].
Grazie a queste congruenze possiamo applicare ai triangoli QAB e CPA il primo criterio congruenza dei triangoli e affermare che $Q\hat{A}B \cong C\hat{P}A$ [$A\hat{Q}B \cong C\hat{P}A$], da cui deduciamo la congruenza di QB e BP.



2)
L'angolo $Q\hat{B}P$ risulta essere di 90° quando $B\hat{A}C$ è di 45° per il seguente motivo:

Chiamiamo l'angolo $B\hat{A}C$ Y [Indichiamo con Y l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A}C$]; gli angoli alla base del triangolo isoscele ABC sono congruenti, e sono di ampiezza pari a 90°-Y/2. Essendo l'angolo $A\hat{C}P$ esterno dell'angolo [[$Q\hat{C}B$]] [ACB] esso è uguale alla somma degli altri due angoli del triangolo ABC, per cui è di 90°+Y/2. Abbiamo precedentemente dimostrato che il triangolo ABP è isoscele, per cui $A\hat{B}P \cong B\hat{A}P$, quindi $C\hat{A}P$ è di 90°-3Y/2. Abbiamo precedentemente dimostrato che i triangoli ACP e QAB sono congruenti, per cui $A\hat{C}P \cong Q\hat{A}B$ e $C\hat{A}P \cong Q\hat{B}A$, per cui
Ampiezza($Q\hat{B}P$) = 90° − Y/2 + 90° − 3Y/2 = 180° − 4Y/2 = 180° −2Y
Se Y è di 45° otteniamo che ampiezza($Q\hat{B}P$) = 180° − 90° = 90°

Classe 2B
Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)



1)
Per dimostrare questo punto abbiamo effettuato le seguenti osservazioni:.

- Il triangolo ABC è isoscele (dato del problema) e quindi gli angoli alla base $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ sono congruenti;
- Il triangolo PAB è isoscele, essendo P sull'asse del segmento AB (e quindi equidistante dagli estremi A e B) e pertanto, gli angoli $P\hat{B}A$ e $P\hat{A}B$ sono congruenti.
- In base a quanto dimostrato, anche gli angoli $A\hat{C}B$ e $P\hat{A}B$ sono congruenti.

- Inoltre, anche gli angoli $P\hat{C}A$ e $B\hat{A}Q$ sono congruenti poiché sono supplementari rispettivamente agli angoli $A\hat{C}B$ e $P\hat{A}B$.
- Successivamente abbiamo osservato che i triangoli PCA e BAQ sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli, secondo il quale due triangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti due lati e l'angolo compreso (i lati $\overline{AB}$ **e** $\overline{AC}$ [AB e AC] sono congruenti perché lati del triangolo isoscele ABC, i lati $\overline{AQ}$ **e** $\overline{CP}$ [AQ e CP] sono congruenti per costruzione, gli angoli $P\hat{C}A$ e $B\hat{A}Q$ sono congruenti per quanto dimostrato in precedenza).
- Per quanto dimostrato, anche i lati $\overline{QB}$ **e** $\overline{PA}$ [QB e PA] sono congruenti.

In conclusione, poiché $\overline{QB} = \overline{PA}$, $\overline{PA} = \overline{PB}$ allora $\overline{QB} = \overline{PB}$ e quindi **il triangolo BPQ è isoscele**

2)
[[…]]