FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

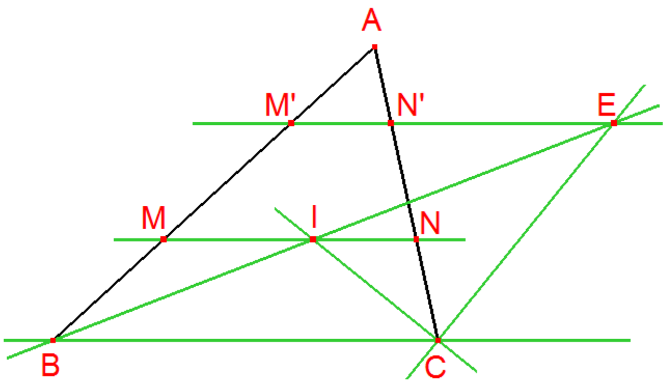
Flatlandia 7 - 21 Dicembre 2013 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema
In un triangolo ABC si consideri la retta parallela al lato BC e passante per il punto I di intersezione delle bisettrici degli angoli $\angle ABC$ e $\angle ACB$. Questa parallela interseca il lato AB nel punto M e il lato AC nel punto N.

a) Dimostrare che $\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{CN}$.

b) Come si modifica la precedente relazione se la retta parallela a BC passa per il punto E di intersezione della bisettrice dell'angolo $\angle ABC$ con la bisettrice dell'angolo esterno a $\angle ACB$? Considerare i vari casi possibili.

Giustificare tutte le risposte.



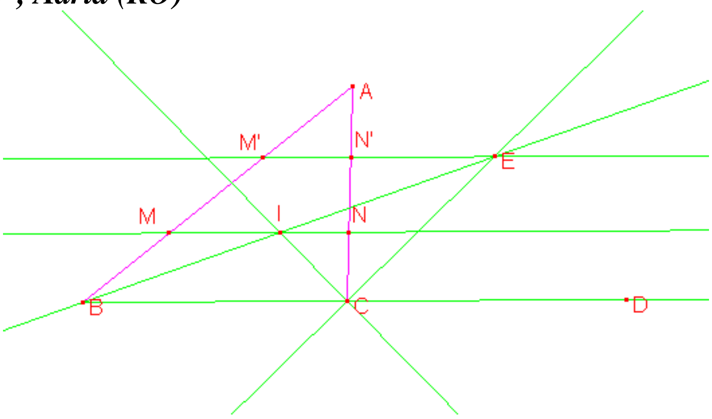
Commento
Sono giunte sette risposte, quattro provenienti da tre diversi Licei scientifici, una da un Liceo Linguistico e infine due risposte da due diverse classi seconde di una scuola secondaria di primo grado di un Istituto Comprensivo.
Il problema poneva due quesiti relativi alla stessa figura: nel primo si chiedeva di dimostrare un'uguaglianza che coinvolgeva le lunghezze di tre segmenti presenti nella figura, nel secondo di trovare una uguaglianza analoga alla precedente in una diversa situazione prospettata dalla stessa figura.
Alla prima domanda tutti rispondono in modo sostanzialmente corretto, sia pure con qualche imprecisione, mentre solo alcuni prendono in esame i diversi casi possibili relativi al secondo quesito (forse nella convinzione che la figura allegata al testo contemplasse ogni possibilità).
Ancora una volta invitiamo i solutori a curare in generale la precisione del linguaggio geometrico utilizzato e in particolare a distinguere tra un ente geometrico e la sua misura.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
Liceo "Bocchi-Galilei", indirizzo Scientifico, Adria (RO)
Liceo "Stabili-Trebbiani", indirizzo Linguistico, Ascoli Piceno (AP)
LS "Pitagora", Rende (CS)
LS Scienze Applicate "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)
Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

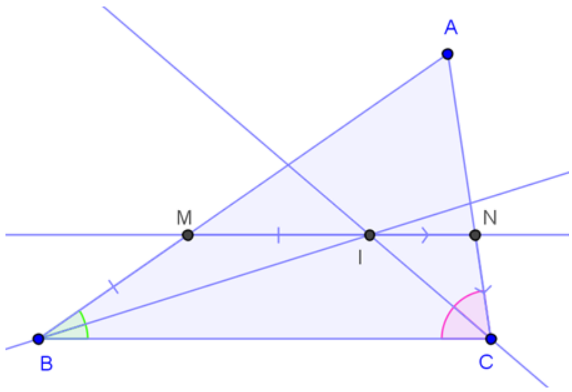
Laura Baratella, Classe 2B Liceo Scientifico
Liceo “Bocchi-Galilei”, Adria (RO)



a)
$I\hat{B}C \cong B\hat{I}M$ perché angoli alterni interni delle rette parallele MN e BC tagliate dalla trasversale BI.
Quindi, se $I\hat{B}C \cong B\hat{I}M$ per precedente dimostrazione e $M\hat{B}I \cong I\hat{B}C$ per ipotesi, per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli] $M\hat{B}I \cong B\hat{I}M$.
Perciò, il triangolo BMI è isoscele sulla base BI perché ha i due angoli alla base congruenti.
Analogamente, $B\hat{C}I \cong C\hat{I}N$ perché angoli alterni interni delle rette parallele BC e MN tagliate dalla trasversale CI. Se $B\hat{C}I \cong C\hat{I}N$ per precedente dimostrazione, e $B\hat{C}I \cong I\hat{C}N$ per ipotesi, per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli] $C\hat{I}N \cong I\hat{C}N$.
Pertanto, il triangolo NIC è isoscele sulla base IC perché ha i due angoli alla base congruenti.
Se MN = MI + IN [$\overline{MN} = \overline{MI} + \overline{IN}$] e MI $\cong$ BM perché lati del triangolo isoscele BMI e IN $\cong$ NC perché lati del triangolo isoscele NIC, allora MN = BM + NC [$\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{NC}$].

b)
$I\hat{B}C \cong B\hat{E}M'$ perché angoli alterni interni delle rette parallele BC e M’N’ tagliate dalla trasversale BE. Se $I\hat{B}C \cong B\hat{E}M'$ per precedente dimostrazione e $M\hat{B}I \cong I\hat{B}C$ per ipotesi, allora $M\hat{B}I \cong B\hat{E}M'$ per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli].
Quindi, il triangolo BEM’, avendo gli angoli alla base congruenti, è isoscele sulla base BE e, in particolare, avrà M’B $\cong$ M’E.
Prolungo il segmento BC di un segmento consecutivo CD. $N'\hat{E}C \cong E\hat{C}D$ perché angoli alterni interni delle rette parallele BC e M’N’ tagliate dalla trasversale CE. Perciò, se $N'\hat{C}E \cong E\hat{C}D$ per ipotesi e $N'\hat{E}C \cong E\hat{C}D$ per precedente dimostrazione, allora $N'\hat{C}E \cong N'\hat{E}C$ per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli].
Pertanto, il triangolo N’EC è isoscele sulla base CE perché ha i due angoli alla base congruenti e, in particolare, avrà N’C $\cong$ N’E.
M’N’ = M’E − N’E [$\overline{M'N'} = \overline{M'E} - \overline{N'E}$], ma, poiché M’E $\cong$ M’B e N’E $\cong$ N’C per le dimostrazioni precedenti, è possibile determinare che M’N’ = M’B – N’C [$\overline{M'N'} = \overline{M'B} - \overline{N'C}$].
Tale relazione vale anche se il triangolo ABC è isoscele sulla base AB.
[Manca il caso in cui M′ e N′ si trovano sui prolungamenti dei lati AB e AC]

Benedetta Anselmi, Letizia Mascitti, Classe 2H
Liceo "Stabili-Trebbiani", indirizzo linguistico, Ascoli Piceno (AP)

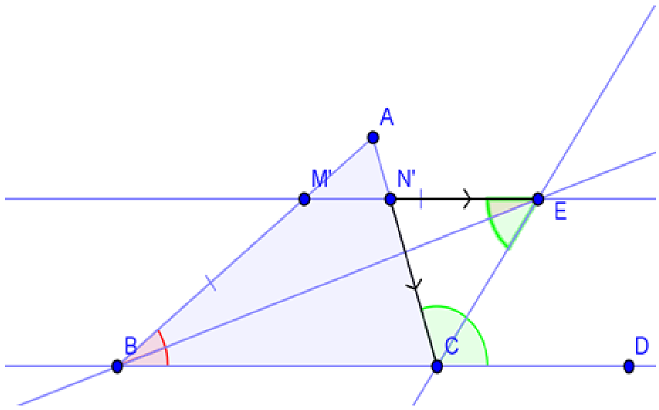


a)

Dato che $B\hat{I}M \cong I\hat{B}C$ poiché angoli alterni interni formati dalle rette parallele MN e BC tagliate dalla trasversale IB e che $A\hat{B}I \cong I\hat{B}C$ per ipotesi ALLORA, per la proprietà transitiva della relazione di congruenza tra angoli $B\hat{I}M \cong A\hat{B}I$. Da qui deduciamo che il triangolo BMI è isoscele [sulla base BI] quindi $BM \cong MI$.

Inoltre, dato che $C\hat{I}N \cong I\hat{C}B$ poiché angoli alterni interni formati dalle rette parallele MN e BC tagliate dalla trasversale IC e che $A\hat{C}I \cong I\hat{C}B$ per ipotesi ALLORA, per la proprietà transitiva della relazione di congruenza tra angoli $C\hat{I}N \cong A\hat{C}I$. Da qui deduciamo che il triangolo INC è isoscele [sulla base IC] quindi $NC \cong IN$.

Poiché $MN \cong MI + NI$, $MI \cong MB$ e $NC \cong NI$ ALLORA $MN \cong BM + NC$ [$\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{NC}$] (somme di segmenti rispettivamente congruenti sono congruenti).



b)

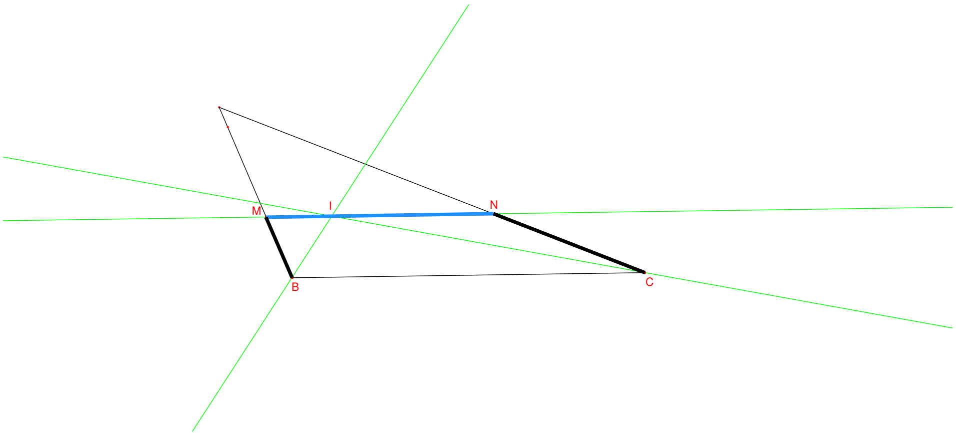
La tesi si può dimostrare se e solo se $A\hat{C}B \geq A\hat{B}C$ perché altrimenti la retta passante per E e parallela a BC non interseca il triangolo ABC. [In questo caso occorre considerare i prolungamenti dei lati AB e AC]

Dato che $E\hat{B}C \cong M'\hat{E}B$ poiché angoli alterni interni formati dalle rette parallele M'E e BD tagliate dalla trasversale BE e che $M'\hat{B}E \cong E\hat{B}C$ per ipotesi ALLORA, per la proprietà transitiva della relazione di congruenza tra angoli $M'\hat{B}E \cong M'\hat{E}B$. Da qui deduciamo che il triangolo M'BE è isoscele [sulla base BE], quindi $BM' \cong M'E$.

Inoltre, dato che $M'\hat{E}C \cong E\hat{C}D$ poiché angoli alterni interni formati dalle rette parallele M'E e BD tagliate dalla trasversale EC e che $N'\hat{C}E \cong E\hat{C}D$ per ipotesi ALLORA, per la proprietà transitiva della relazione di congruenza tra angoli $N'\hat{C}E \cong M'\hat{E}C$. Da qui deduciamo che il triangolo N'CE è isoscele [sulla base CE], quindi $N'C \cong N'E$. Poiché $M'N' \cong M'E - N'E$ [$\overline{M'N'} = \overline{M'E} - \overline{N'E}$],

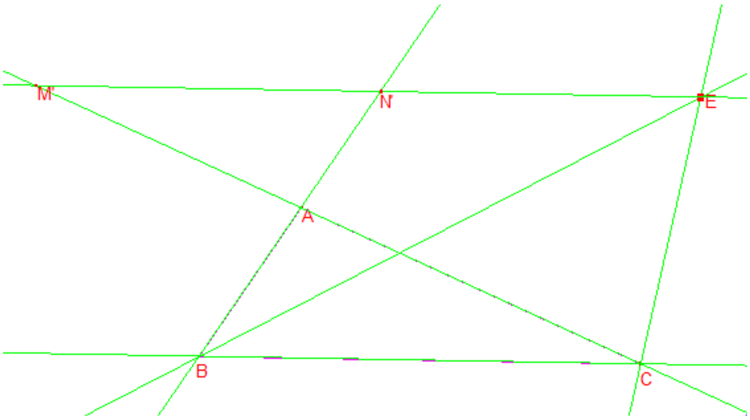
$M'E \cong M'B$ e $N'E \cong N'C$ ALLORA $M'N' \cong BM' - N'C$ [$\overline{M'N'} = \overline{BM'} - \overline{N'C}$] (differenze di segmenti rispettivamente congruenti sono congruenti).
Se il triangolo ABC è isoscele [sulla base BC] i punti M’ e N’ coincidono con il vertice A perciò M’N’=0 perché M’B e N’C sono congruenti [e la precedente relazione è ancora in particolare verificata].

Marco Baronchelli, Classe 2T
Liceo Scientifico Scienze Applicate “A. Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)



a)
Considero il triangolo ICN, gli angoli BCI e NCI sono congruenti per ipotesi, gli angoli BCI e NIC sono congruenti perché alterni interni rispetto ai segmenti paralleli BC e NI tagliati dalla trasversale IC. Per proprietà transitiva gli angoli NIC e NCI sono congruenti, quindi il triangolo ICN è isoscele [sulla base IC], in particolare sono congruenti i lati IN e NC.

Analogalmente [Analogamente] dimostro la congruenza dei lati BM e MI. MN [$\overline{MN}$] è [[congruente]] [uguale] alla somme delle misure dei lati MB e CN per somma di [misure] lati congruenti.

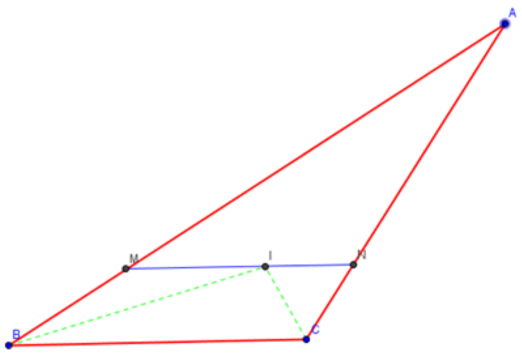


b)
Considero il triangolo BM'E, gli angoli M'BE e EBC sono congtuenti [congruenti] per ipotesi, gli angoli M'BE e BEM' sono congruenti perché alterni interni rispetto ai segmenti paralleli BC e M'E tagliati dalla trasversale BE. Per proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli] gli angoli M'BE [CBE] e M'EB sono congruenti, quindi il triangolo BM'E è isoscele [sulla base BE], in particolare sono congruenti i lati BM' e M'E.
Analogalmente [Analogamente] dimostro la congruenza dei lati CN' e EN'.

M'N' [$\overline{M'N'}$] è [[congruente]] [uguale] alla differenza tra le misure dei lati EM' e EN', i quali sono rispettivamente congruenti ai lati BM' e CN', perciò anche la differenza tra le misure dei lati BM' e CN' è [[congruente]] [uguale] a M'N' [$\overline{M'N'}$]. **[**<u>Manca la figura relativa a questo caso</u>**]**

[[*CASO PARTICOLARE:*]] Ipotizziamo che i punti M' e N' stiano sui prolungamenti dei lati BA e CA (questo accade se il triangolo è ottusangolo in B). [La correttezza della notazione vorrebbe che M' restasse sul prolungamento di AB e N' sul prolungamento di AC].
Considero il triangolo BN'E, gli angoli N'BE e EBC sono congtuenti [congruenti] per ipotesi, gli angoli N'BE e BEN' sono congruenti perché alterni interni rispetto ai segmenti paralleli BC e N'E tagliati dalla trasversale BE. Per proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli] gli angoli N'BE e N'EB sono congruenti, quindi il triangolo BN'E è isoscele [sulla base BE], in particolare sono congruenti i lati BN' e N'E.
Analogalmente [Analogamente] dimostro la congruenza dei lati CM' e EM'.
M'N' [$\overline{M'N'}$] è [[congruente]] [uguale] alla differenza tra le misure dei lati EM' e EN', i quali sono rispettivamente congruenti ai lati BN' e CM', perciò anche la differenza tra le misure dei lati BN' e CM' è [[congruente]] [uguale] a M'N' [$\overline{M'N'}$].

Luca Marzatico, Mattia Pozzoni, Classe 2T
Liceo Scientifico Scienze Applicate "A. Cesaris", Casalpusterlengo (LO)



a)

Considero il triangolo BMI, esso è isoscele perché: l'angolo ∠IBC è congruente all'angolo ∠IBM

perché BI è bisettrice; l'angolo ∠IBC però è congruente anche all'angolo ∠MIB (angoli alterni

interni delle rette parallele BC e MN tagliate da BI); per la proprietà transitiva della relazione di

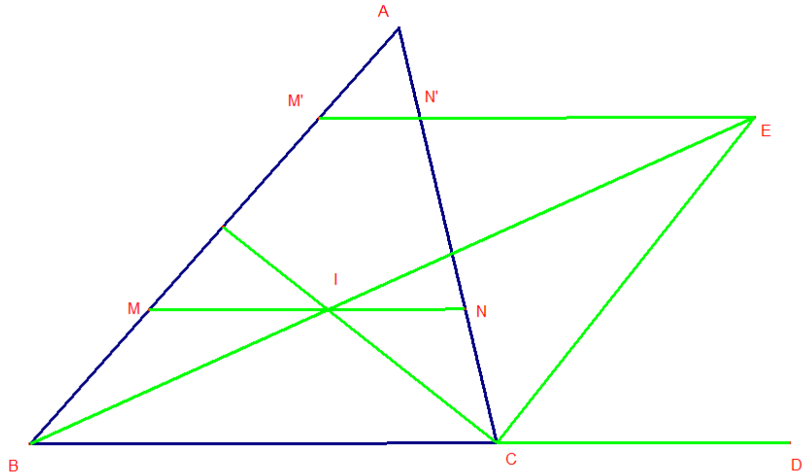
congruenza l'angolo ∠MBI è congruente all'angolo ∠MBI [∠MIB].

Analogamente dimostro che il triangolo MIC [NIC] è isoscele.
In particolare posso notare che $\overline{MB} = \overline{MI}$ e che $\overline{MN} = \overline{NI}$ [$\overline{CN} = \overline{NI}$] e quindi che $\overline{MB} = \overline{MI} + \overline{CN}$ [$\overline{MN} = \overline{MI} + \overline{CN}$] e di conseguenza $\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{CN}$.

b)

[[…]]

Domenico Corasiniti, Evelina Porco, Classe 2B
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)

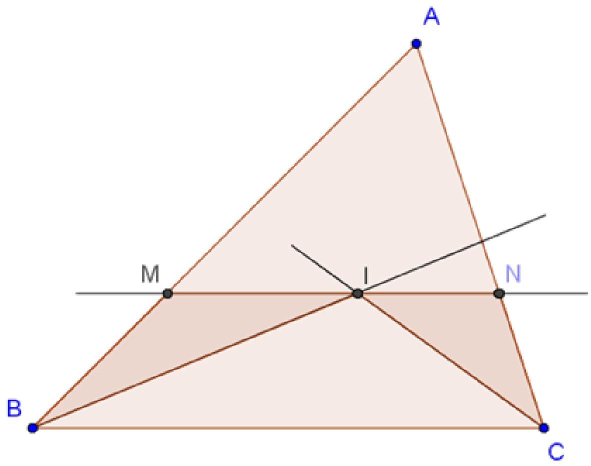


a)
Il triangolo BMI è isoscele sulla base BI, in quanto ha:
$M\hat{B}I \cong I\hat{B}C$ perché per costruzione BI è la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$,
$I\hat{B}C \cong B\hat{I}M$ perché angoli alterni interni rispetto alle parallele BC e MN, tagliate dalla trasversale BI,
per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli]: $M\hat{B}I \cong I\hat{B}C \cong B\hat{I}M$.
Di conseguenza: BM≅MI.
Il triangolo ICN è isoscele sulla base IC, in quanto ha:
$N\hat{C}I \cong I\hat{C}B$ perché per costruzione CI è la bisettrice dell'angolo $\hat{C}$,
$I\hat{C}B \cong C\hat{I}N$ perché angoli alterni interni rispetto alle parallele BC e MN tagliate dalla trasversale CI,
per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli]: $N\hat{C}I \cong I\hat{C}B \cong C\hat{I}N$.
Di conseguenza: IN≅CN.
MN≅MI+IN [$\overline{MN} = \overline{MI} + \overline{IN}$]
Poiché MI≅BM [$\overline{MI} = \overline{BM}$] e IN≅CN [$\overline{IN} = \overline{CN}$], per la proprietà [[transitiva]] [della relazione di uguaglianza] MN≅ BM + CN [$\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{CN}$]

b)
Il triangolo BM'E è isoscele sulla base BE, in quanto ha:
$M'\hat{B}E \cong E\hat{B}C$ perché per costruzione BM [BE] è la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$,
$E\hat{B}C \cong B\hat{E}M'$ perché angoli alterni interni rispetto alle parallele BC e M'E tagliate dalla trasversale BE,
per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli]: $M'\hat{B}E \cong E\hat{B}C \cong B\hat{E}M'$.
Di conseguenza: BM'≅M'E.
Il triangolo CEN' è isoscele sulla base CE, in quanto ha:
$N'\hat{C}E \cong E\hat{C}D$ perché per costruzione CE è la bisettrice dell'angolo esterno a $\hat{C}$,
$E\hat{C}D \cong C\hat{E}N'$ perché angoli alterni interni rispetta alle parallele BD e M'E tagliate dalla trasversale CE,
per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli]: $N'\hat{C}E \cong E\hat{C}D \cong C\hat{E}N'$.
Di conseguenza: CN'≅N'E.
Dunque M'N'≅BM'-CN' [$\overline{M'N'} = \overline{BM'} - \overline{CN'}$], poiché BM'≅M'E e CN'≅N'E.

[Resta da considerare il caso in cui M’ e N’ si trovano sui prolungamenti dei lati AB e AC.]

Classe 2B
Istituto Comprensivo “G. Deledda”, Ginosa (TA)



a)
Per dimostrare questo punto abbiamo effettuato osservazioni sui triangoli MBI e NCI e dimostrato che entrambi sono isosceli.
In particolare, facendo riferimento al primo triangoli [triangolo], abbiamo constatato che:

- $M\hat{B}I = I\hat{B}C$ [uguaglianza di ampiezze], poiché il punto I è sulla bisettrice dell’angolo $A\hat{B}C$ (dato del problema);
- $I\hat{B}C = B\hat{I}M$ [uguaglianza di ampiezze], poiché sono alterni interni (il segmento MN e il lato BC sono paralleli per costruzione e tagliati dalla trasversale BI).
- allora $M\hat{B}I = B\hat{I}M$ [uguaglianza di ampiezze]
- Pertanto, poiché $M\hat{B}I = B\hat{I}M$ [uguaglianza di ampiezze], allora anche lati opposti a tali angoli, $\overline{MI}$ ed $\overline{BM}$ [MI e BM] del triangolo MBI, sono congruenti.

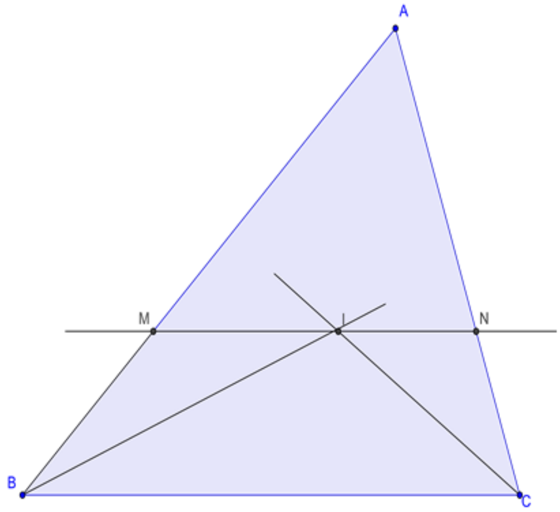
Le medesime considerazioni fatte per il triangolo MBI sono state fatte anche al triangolo NCI:

- $N\hat{C}I = I\hat{C}B$ [uguaglianza di ampiezze], poiché il punto I è sulla bisettrice dell’angolo $A\hat{C}B$ (dato del problema);
- $I\hat{C}B = C\hat{I}N$ [uguaglianza di ampiezze], poiché sono alterni interni (il segmento MN e il lato BC sono paralleli per costruzione e tagliati dalla trasversale CI).
- allora $N\hat{C}I = C\hat{I}N$ [uguaglianza di ampiezze]
- Pertanto, poiché $N\hat{C}I = C\hat{I}N$ [uguaglianza di ampiezze], allora anche lati opposti a tali angoli, $\overline{IN}$ e $\overline{CN}$ [IN e CN] del triangolo NCI, sono congruenti.

In conclusione, poiché $\overline{MN} = \overline{MI} + \overline{IN}$,
per quanto dimostrato $\overline{MI} = \overline{BM}$ e $\overline{IN} = \overline{CN}$,
allora $\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{CN}$

b)
[[…]]

Classe 2C
Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)
Inizialmente, abbiamo osservato che:
- le ampiezze degli angoli $M\hat{B}I$ e $I\hat{B}C$ sono [[congruenti]] [uguali] per costruzione (analogamente $N\hat{C}I = I\hat{C}B$ [uguaglianza di ampiezze]);
- le ampiezze degli angoli $I\hat{B}C$ e $B\hat{I}M$ sono congruenti poiché alterni interni [delle rette parallele…] (analogamente $I\hat{C}B = C\hat{I}N$ [uguaglianza di ampiezze]);
- allora […] le ampiezze degli angoli $M\hat{B}I$ [[=]] [e] $B\hat{I}M$ [sono uguali] (analogamente $N\hat{C}I$ = $C\hat{I}N$ [uguaglianza di ampiezze]).

Pertanto, se le ampiezze degli angoli $M\hat{B}I$ = $B\hat{I}M$ (e $N\hat{C}I$ = $C\hat{I}N$), allora anche lati opposti a tali angoli, $\overline{MI}$ e $\overline{BM}$ [MI e BM] (e [[$\overline{CN} = \overline{IN}$]] [CN e IN]), sono congruenti (teorema sui triangoli isosceli).

Per quanto sopra dimostrato, essendo $\overline{MI} = \overline{BM}$ e $\overline{IN} = \overline{CN}$, poiché $\overline{MN} = \overline{MI} + \overline{IN}$, allora $\overline{MN} = \overline{BM} + \overline{CN}$.