FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" ***(Edwin A. Abbott)***

Flatlandia 12-26 Novembre 2012 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Consideriamo un rettangolo *ABCD* tale che $\overline{AB} = \overline{BC}\sqrt{3}$.

a) Individuare la posizione di un punto *P* appartenente ad *AB* e di un punto *Q* appartenente a *CD* tale che il quadrilatero *APCQ* sia un rombo.

b) La posizione di *P* su *AB* e di *Q* su *CD* è univocamente determinata?

c) Quanto vale il rapporto tra l'area del rombo e l'area del rettangolo?

Giustificare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte nove risposte così suddivise: tre da classi seconde e una da una classe quarta (che abbiamo deciso di accettare), tutte di Licei Scientifici; inoltre quattro risposte provenienti da classi terze e una da una classe seconda di Scuola Media (ossia Scuola Secondaria di I grado) tutte facenti parte dello stesso Istituto Comprensivo.

Il problema, partendo da un rettangolo con una data relazione tra le lunghezze dei suoi lati, poneva tre quesiti: nel primo si chiedeva di individuare due punti appartenenti ai due lati opposti di lunghezza maggiore in modo tale che il quadrilatero avente come vertici i due punti suddetti e due vertici opposti del rettangolo fosse un rombo; nel secondo di verificare l'unicità o meno dei due punti individuati precedentemente e nell'ultimo quesito di determinare il valore del rapporto tra le aree del rombo così individuato e del rettangolo iniziale.

Un buon numero di studenti risponde in modo sostanzialmente corretto ai diversi quesiti riconoscendo il valore tipico di alcuni angoli coinvolti e, in particolare, il fatto che il rombo costruito risultasse diviso dalla diagonale minore in due triangoli equilateri. Tuttavia non mancano coloro che basano le affermazioni fatte su un semplice esame della figura, senza fornire le opportune giustificazioni.

Anche nella maggior parte di queste risposte dobbiamo rilevare la presenza di un errore spesso evidenziato nelle precedenti correzioni, cioè confondere un angolo con la sua ampiezza e un segmento con la sua lunghezza.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

LS "Rescigno", Roccapiemonte (SA)

LS "Pitagora", Rende (CS)

LS "Aristosseno", Taranto (TA)

LS "Mariano IV d'Arborea, Oristano (OR)

Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

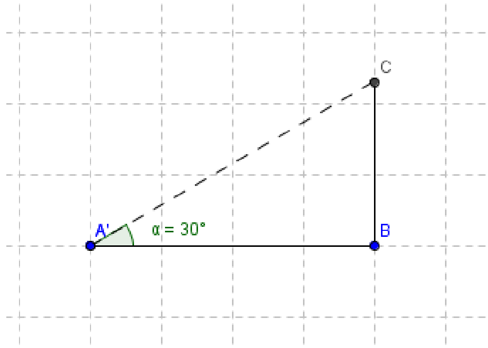
Gruppo di lavoro che gestisce FLAT*landia*:

- Ercole CASTAGNOLA - NRD Università di Napoli "Federico II"
- Giuliano MAZZANTI - Docente di Geometria, Università di Ferrara
- Valter ROSELLI - Ricercatore, Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
- Luigi TOMASI - Insegnante di Matematica, Liceo Scientifico Galilei, Adria (RO).

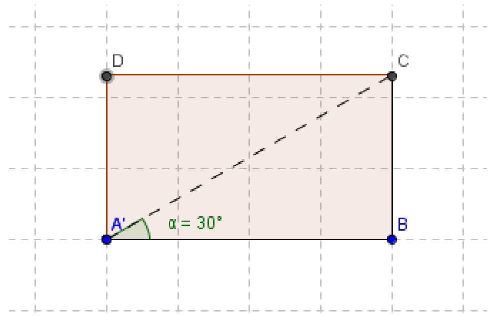
Soluzioni

Maria Rosaria Scafuro, Classe 2A
Liceo Scientifico "Rescigno", Roccapiemonte (SA)

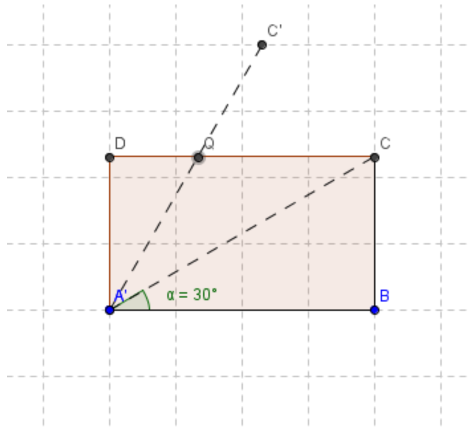
a)



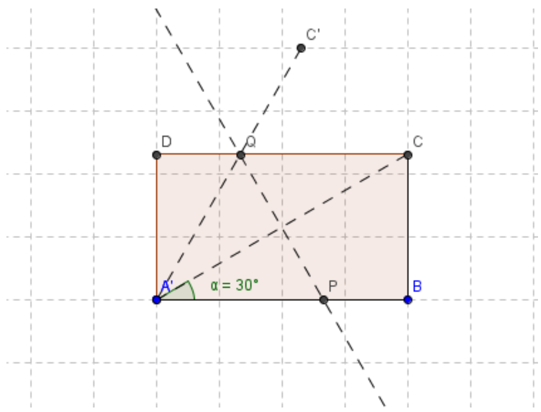
AB=BC$\sqrt{3}$ [$\overline{AB} = \overline{BC}\sqrt{3}$] implica [che ampiezza] $\widehat{BAC} = 30°$



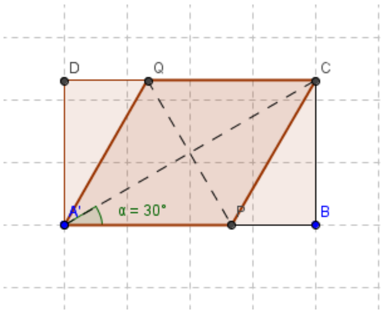
La diagonale AC del rettangolo è anche diagonale del rombo. Pertanto ottengo il punto Q ruotando AC intorno ad A di trenta gradi in senso antiorario e intersecando il ruotato con DC [perché?]



Infine da Q tracciamo la perpendicolare ad AC e intersechiamo in P il lato AB



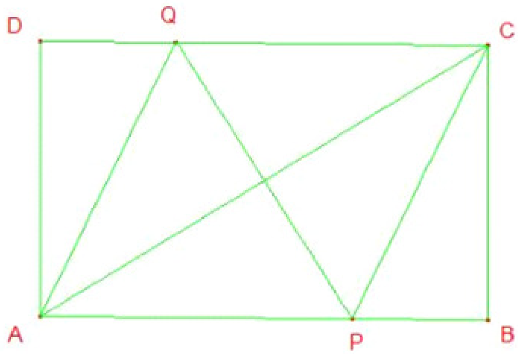
Il rombo è fatto [mancano le spiegazioni].



b)
Sì. Infatti qualsiasi altro rombo [con le caratteristiche specificate dal problema] deve avere in A l'angolo di [ampiezza pari a] 60°.

c)
Il rettangolo è formato da sei triangoli uguali [congruenti], mentre il rombo ne contiene quattro. Pertanto il rapporto è $\frac{4}{6}$, cioè $\frac{2}{3}$.

Asia Cosentino, Debora Saullo, Classe 2B
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



a)
Sia P appartenente ad AB e Q a DC [ma P e Q come si determinano?]. Si unisce P con C e da A tracciamo la parallela a PC. Il quadrilatero ottenuto è un parallelogramma perché ha i lati opposti paralleli: QC p [//] AP e AQ p [//] PC.
$DQ \cong PB$ per differenza di segmenti congruenti in quanto
$DC - QC \cong AB - AP$ [occorre spiegare].
Si pone $PB = x$, $DQ = x$. Affinché il parallelogramma sia un rombo, deve avere i lati congruenti e, quindi, si pone

$$\begin{cases} PB = x \\ QC = AP \end{cases} \begin{cases} PB = x \\ AP = AB - x \end{cases} \begin{cases} PB = x \\ AB - x = BC\sqrt{3} - x \end{cases}$$

Si calcola, [[con]] [applicando] il teorema di Pitagora [[applicato]] al triangolo rettangolo PCB, PC in funzione di x e si imposta la seguente equazione:

$$PC^2 = PB^2 + BC^2$$
$$BC^2 + x^2 = (BC\sqrt{3} - x)^2$$
$$BC^2 + x^2 = 3BC^2 + x^2 - 2BC\sqrt{3}x$$
$$2BC\sqrt{3}x = 2BC^2$$
$$BC\sqrt{3}x = 2BC^2$$
[$$x = \frac{BC^2}{BC\sqrt{3}} = \frac{BC}{\sqrt{3}}$$]
$$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2$$
$$\overline{BC}^2 + x^2 = \left(\overline{BC}\sqrt{3} - x\right)^2$$
$$\overline{BC}^2 + x^2 = 3\overline{BC}^2 + x^2 - 2\overline{BC}\sqrt{3}x$$
$$2\overline{BC}\sqrt{3}x = 2\overline{BC}^2$$
$$\overline{BC}\sqrt{3} = \overline{BC}^2$$
$$x = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BC}\sqrt{3}} = \frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}}$$
Affinché il quadrilatero *APCQ* sia un rombo, *Q* e *P* devono essere tali che:

[$DQ = PB = \frac{BC}{\sqrt{3}}$] $\overline{DQ} = \overline{PB} = \frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}}$

AP= AB-PB= BC^3-BC [$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB} = \overline{BC}\sqrt{3} - \frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}} = \frac{2\overline{BC}}{\sqrt{3}}$]

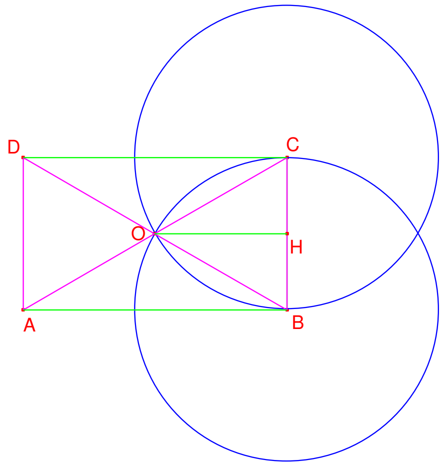
b)
[[…]]

c)
Il rapporto tra l'area del rettangolo e l'area del rombo vale:
$$\frac{A_{\square}}{A_{\square_1}} = \frac{\frac{2BC^2}{\sqrt{3}}}{BC^2\sqrt{3}}$$
[$\frac{2BC^2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{BC^2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$][$\frac{A_{\text{rombo}}}{A_{\text{rettangolo}}} = \frac{\frac{2\overline{BC}^2}{\sqrt{3}}}{\overline{BC}^2\sqrt{3}} = \frac{2\overline{BC}^2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\overline{BC}^2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$]

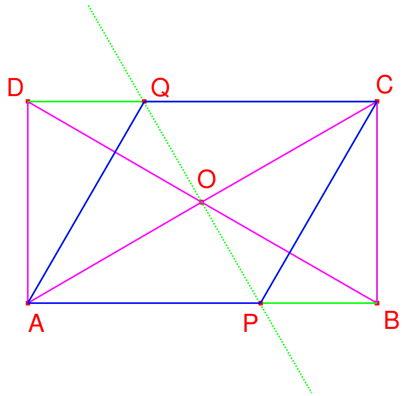
Classe 2H
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)

a)

Costruiamo anzitutto il rettangolo ABCD in cui AB = BC$\sqrt{3}$ [$\overline{AB} = \overline{BC}\sqrt{3}$] ,osservando che il numero irrazionale $\sqrt{3}$ è il rapporto tra il doppio dell'altezza di un triangolo equilatero e la sua base.
Costruito perciò il triangolo equilatero BOC, mediante la simmetria centrale di centro il punto O otteniamo il triangolo AOD ed otteniamo gli altri due vertici A e D del rettangolo.



Per ottenere poi il rombo APCQ, essendo AC una sua diagonale, tracciamo la retta perpendicolare in O ad AC ; essa è asse del segmento AC (in quanto O è centro del rettangolo e quindi punto medio di AC). I punti di intersezione P e Q di tale retta con i lati AB e CD del rettangolo sono vertici del rombo. Infatti il quadrilatero APCQ è un rombo perché le sue diagonali (per la costruzione)
sono perpendicolari fra loro; inoltre la retta [sostegno] di PQ è asse di AC e la retta [sostegno] di AC è asse di PQ, perciò: CQ = CP [$\overline{CQ} = \overline{CP}$] ed anche AP = CP [$\overline{AP} = \overline{CP}$] e quindi CQ = AP [$\overline{CQ} = \overline{AP}$] e CQ è anche parallelo ad AP (essendo CD parallelo ad AB nel rettangolo). APCQ è un parallelogramma avendo due lati opposti congruenti e paralleli ed è un rombo avendo due lati consecutivi congruenti.



b)
La posizione di P, e quindi di Q è univocamente determinata per l'unicità della retta (PQ) perpendicolare ad una retta data (AC) in un suo punto (O).

c)
Il triangolo BOC è equilatero e quindi l'angolo BCO = [ha ampiezza pari a] 60°; poiché BCD è un angolo retto, l'angolo OCQ = [ha ampiezza pari a] 30°. Il triangolo QOC, rettangolo in O, è la metà di un triangolo equilatero la cui altezza è OC = BC [$\overline{OC} = \overline{BC}$]. Sarà perciò OQ = CQ/2 = (2OC/$\sqrt{3}$)/2 = BC/$\sqrt{3}$ [$\overline{OQ} = \overline{CQ}/2 = (2\overline{OC}/\sqrt{3})/2 = \overline{BC}/\sqrt{3}$.]

Nel rombo APCQ la diagonale PQ = 2OQ = 2BC/$\sqrt{3}$ [$\overline{PQ} = 2\overline{OQ} = 2\overline{BC} / \sqrt{3}$], mentre l'altra è AC = 2BC [$\overline{AC} = 2\overline{BC}$]; l'area del rombo [[quadrilatero]] è allora: [mancano tutte le linee che indicano la lunghezza di un segmento]

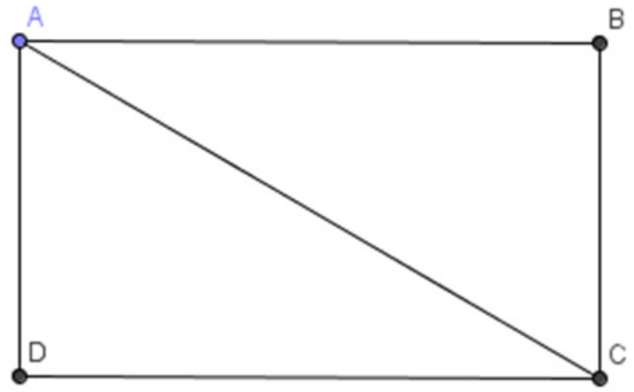
$$S(APCQ) = \frac{AC \cdot PQ}{2} = \frac{2BC \cdot \frac{2BC}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2BC^2}{\sqrt{3}}$$

L'area del rettangolo ABCD è invece = $S(ABCD) = AB \cdot BC = BC^2\sqrt{3}$

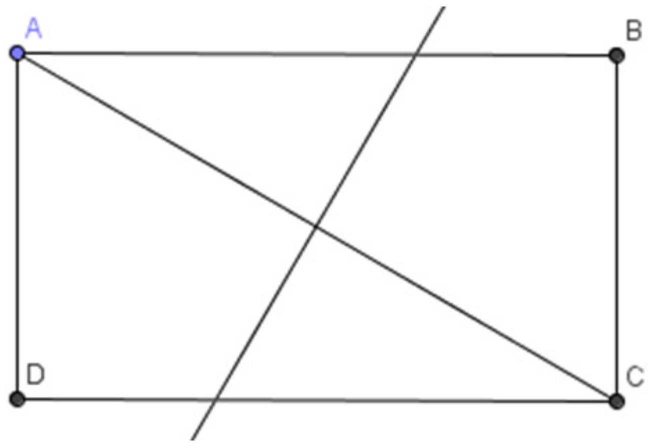
Il rapporto tra l'area del rombo e quella del rettangolo è $\frac{S(APCQ)}{S(ABCD)} = \frac{2\frac{BC^2}{\sqrt{3}}}{BC^2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$.

Anna Piras, Classe 4F
Liceo Scientifico "Mariano IV d'Arborea", Oristano (OR)

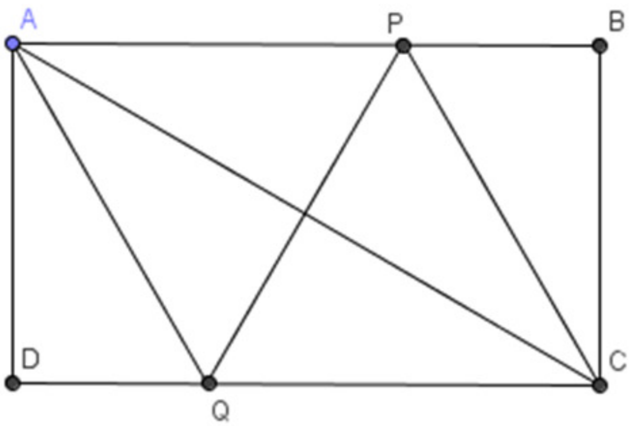
a)
Per trovare i punti P e Q appartenenti rispettivamente ad AB e a CD tali che APCQ sia un rombo traccio il segmento AC che sarà una delle diagonali del rombo.



I vertici P e Q del rombo si troveranno sull'altra diagonale. In un rombo le diagonali sono perpendicolari e si tagliano in due parti uguali, perciò la diagonale giacerà sull'asse dell'altra. Disegno perciò l'asse di AC.



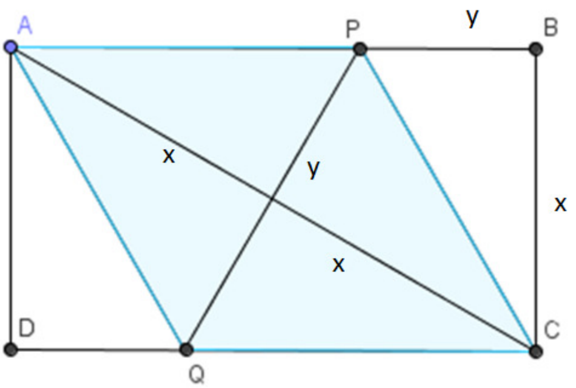
Dato che P e Q devono appartenere ad AB e a CD l' intersezione fra AB e l'asse sarà P e quella fra l'asse e CD sarà Q. Abbiamo ottenuto perciò il rombo. [Occorre però dimostrare che si ottiene effettivamente un rombo.]



b)

Questo rombo sarà l'unico possibile in quanto le intersezioni fra una retta (l'asse) e un rettangolo sono solo 2. Le diagonali del rombo sono sempre perpendicolari e si tagliano in due perciò questa è l'unica configurazione possibile.

c)



Chiamo AD = BC = x [$\overline{AD} = \overline{BC} = x$] e perciò AB [$\overline{AB}$] sarà $x\sqrt{3}$. L'area del rettangolo sarà quindi $x \cdot x \cdot \sqrt{3}$ cioè $x^2\sqrt{3}$.

Chiamo PB = AB - AP = y [$\overline{PB} = \overline{AB} - \overline{AP} = y$.]

Trovo la lunghezza di AC col teorema di Pitagora

$AD^2 + DC^2 = AC^2$ [$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$ da cui $x^2 + (x\cdot\sqrt{3})^2 = x^2 + 3x^2 = 4x^2 = AC^2$ [$\overline{AC}^2$]

AC [$\overline{AC}$] = $\sqrt{(4x^2)} = 2x$

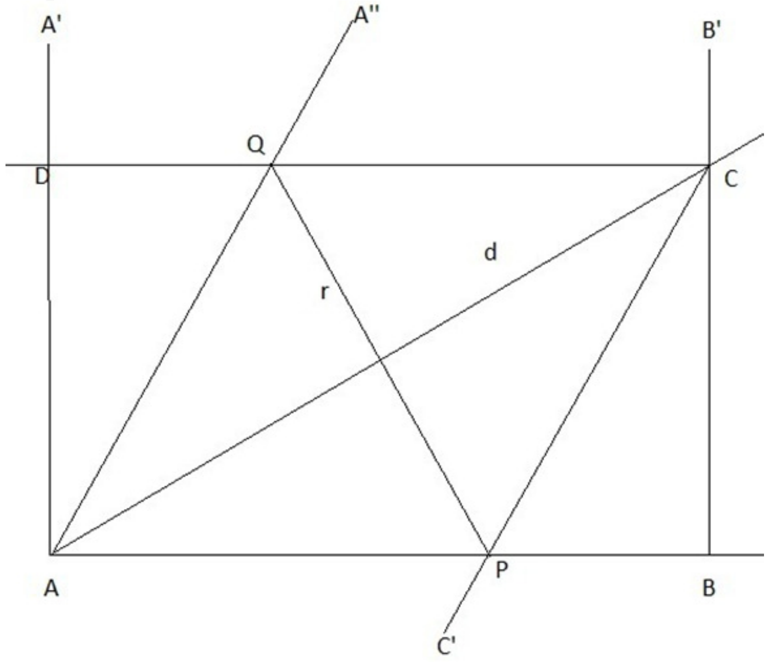
AC è divisa da PQ in due parti uguali ciascuna lunga x.

PB = DQ [$\overline{PB} = \overline{DQ}$] sono "uguali" [hanno la stessa lunghezza] in quanto da cose uguali (lati opposti di un rettangolo) si sottraggono cose uguali (lati di un rombo). Il [La lunghezza del] lato del rombo sarà uguale per il teorema di Pitagora a $\sqrt{(PB^2+BC^2)}$ [$\sqrt{\overline{PB}^2 + \overline{BC}^2}$] cioè a $\sqrt{(x^2 + y^2)}$. La semidiagonale minore sarà √(lato rombo^2-semidiagonale maggiore^2) cioè
$\sqrt{[\sqrt{(x^2 + y^2)}^2 - x^2]} = \sqrt{(x^2 + y^2 - x^2)} = \sqrt{y^2} = y$

L'area del rombo si trova facendo (d*D)/2 [dove d e D indicano …] d = $2y$, D = $2x$ da cui A_{rombo}= $(2x\cdot 2y)/2 = (4xy)/2 = 2xy$. Ma y è uguale a AB – AP [$\overline{AB} - \overline{AP}$] = $\sqrt{3}x - \sqrt{(x^2 + y^2)} = y$ da cui $-\sqrt{(x^2 + y^2)} = -\sqrt{3}x + y$, elevo entrambi i membri al quadrato: $x^2 + y^2 = (-\sqrt{3}x + y)^2$ svolgendo il quadrato del binomio si trova che $x^2 + y^2 = 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2$ e svolgendo i calcoli trovo che y è $x/\sqrt{3}$. Perciò l'area del rombo la posso scrivere come $2\cdot x\cdot(x/\sqrt{3})$ cioè $(2x^2)/\sqrt{3}$.

Il rapporto fra [area del] rombo e [area del] rettangolo sarà quindi di $[(2x^2)/\sqrt{3}]/x^2\sqrt{3}$ cioè $(2x^2)/\sqrt{3}$ per $1/x^2\sqrt{3}$ che è uguale a 2/3

Classe 3A dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)

Il rombo avrà come diagonale il segmento AC, diagonale del rettangolo ABCD la cui lunghezza si calcola applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC .

AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(x\sqrt{3})^2 + x^2}$ [$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(x\sqrt{3})^2 + x^2}$] = $\sqrt{x^2 \cdot 3 + x^2}$ = $\sqrt{4x^2} = 2x$

Essendo AC = 2·BC [$\overline{AC} = 2\overline{BC}$] e AB ⊥ BC conosciamo le ampiezze degli angoli [occorre

spiegare meglio]:

[ampiezza]BÂC = 30º

[ampiezza]BCA = 60º

Poiché il triangolo ABC è la metà di un triangolo equilatero di lato AC, individuiamo il punto medio della diagonale AC e tracciamo la retta **r** perpendicolare ad AC passante per il suo punto medio.

L'intersezione della retta **r** con il lato AB, individuerà il punto P e l'intersezione della stessa retta con il lato DC individuerà il punto Q.

Il quadrilatero APCQ è un rombo.

Per avere:

Le diagonali AC ⊥ QP per costruzione;

La diagonale QP è anche asse della diagonale AC, consegue che i punti Q e P sono equidistanti dagli estremi A e C.

Pertanto i lati AP = QC = PC = AQ [AP, QC, PC, AQ] sono tutti congruenti. [In realtà $\overline{AQ} = \overline{QC}$ e $\overline{AP} = \overline{PC}$ ma non necessariamente tutti congruenti.]

b)

La posizione dei punti P e Q è univocamente determinata perché il dato relazionale AB = BC $\sqrt{3}$ [$\overline{AB} = \overline{BC}\sqrt{3}$] ci conduce a costruire un rettangolo la cui diagonale AC è uguale a 2BC e l'altra diagonale deve essere perpendicolare nel punto medio alla diagonale AC.

c)

Il rapporto tra l'area del rombo e l'area del rettangolo è uguale a $\frac{2}{3}$ perché il rombo è diviso dalle due diagonali in 4 triangoli congruenti e il rettangolo è formato da 6 triangoli congruenti. Calcoliamo il rapporto delle aree applicando le formule relative alle aree.

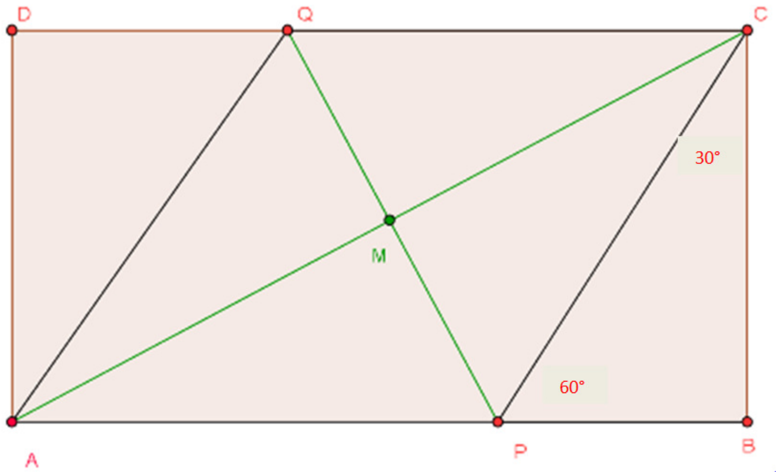
$A_{Rettangolo}$ = AB·BC [$\overline{AB} \cdot \overline{BC}$] $= x\sqrt{3} \cdot x = x^2 \cdot \sqrt{3}$

AQ = QP [$\overline{AQ} = \overline{QP}$] essendo il triangolo APQ equilatero e AQ = […]

A_{Rombo} = AC·QP[$\overline{AC} \cdot \overline{QP}$]$\cdot \frac{1}{2} = 2x \cdot \frac{2 \cdot x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot x^2}{\sqrt{3}}$

$$\frac{A_{Rombo}}{A_{Rettangolo}} = \frac{2 \cdot x^2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

Classe 3B dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)

La diagonale $\overline{AC}$ [AC] del rettangolo ABCD coincide con la diagonale maggiore del rombo APCQ e, poiché le dimensioni del rettangolo sono $\overline{AB} = \overline{BC}\sqrt{3}$ e $\overline{BC}$, possiamo calcolare la misura della diagonale $\overline{AC}$ [AC] in funzione di $\overline{BC}$, applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(\overline{BC}\sqrt{3})^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{3\overline{BC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{4\overline{BC}^2} = 2\overline{BC}$$

Si deduce pertanto che $\overline{AC} = 2\overline{BC}$ e che $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{BC}$ [occorre spiegare meglio]

I triangoli APM, PCM, MCQ, AQM sono triangoli rettangoli congruenti tra loro perché costituiscono un rombo; inoltre l'angolo di 90° $Q\hat{C}B$ è diviso in tre angoli congruenti, ciascuno di 30° (perché le diagonali del rombo sono anche bisettrici).
I triangoli PBC, PMC e MCQ sono triangoli rettangoli congruenti tra loro per il secondo criterio di congruenza dei triangoli: hanno il cateto $\overline{MC}$ [MC, comune ai triangoli MCQ e MCP] uguale al cateto $\overline{BC}$ [BC] e i due angoli ad essi adiacenti [tra cui essi sono compresi] congruenti (un angolo di [ampiezza pari a] 90° e l'altro di [ampiezza pari a] 30°).
I triangoli APC e AQC sono isosceli e congruenti e l'angolo al vertice misura 120° e, poiché la diagonale minore $\overline{PQ}$ del rombo è anche bisettrice, si formano tre angoli di [ampiezza pari a] 60° ciascuno ($A\hat{P}M$, $M\hat{P}C$, $B\hat{P}C$).
Il triangolo PCQ e il triangolo PAQ sono congruenti ed equilateri per cui la diagonale minore del rombo $\overline{PQ}$ [PQ] è congruente al lato del rombo.
L'altezza $\overline{MC}$ [MC] (uguale [congruente] a $\overline{BC}$ [BC]) del triangolo equilatero PCQ è [ha lunghezza] pari al [a quella del] lato $\overline{BC}$ [BC] moltiplicato per $\sqrt{3}$ /2 da cui si ricava che il lato del triangolo equilatero (e quindi anche del rombo) è [ha lunghezza] pari a 2BC[$\overline{BC}$]/$\sqrt{3}$.
Possiamo quindi ricavare $\overline{PB}$ in funzione di $\overline{BC}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PBC:

$$\overline{PB} = \sqrt{(2\overline{BC}/\sqrt{3})^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{\frac{4}{3}\overline{BC}^2 - \overline{BC}^2} = \frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}}$$

Pertanto la posizione del punto P appartenente ad $\overline{AB}$ [AB] è $2\overline{BC}/\sqrt{3}$, mentre la posizione del punto Q appartenente a $\overline{CD}$ [CD] è $\overline{BC}/\sqrt{3}$.

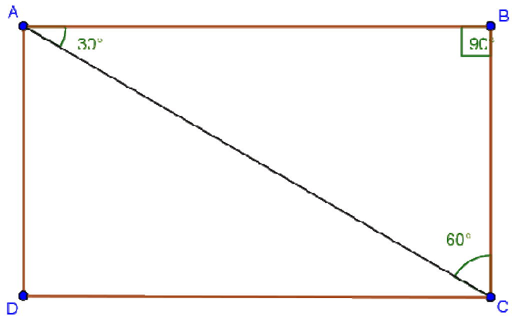
b)
[[…]]

c)
Il rapporto tra l'area del rombo e l'area del rettangolo si ricava considerando l'area del rombo come quadruplo dell'area del triangolo PBC, mentre quella del rettangolo è sei volte l'area dello stesso triangolo, cioè Area rombo/Area rettangolo = 4 Area $_{(PBC)}$ / 6Area $_{(PBC)}$ = 2/3.
Lo stesso risultato si ottiene anche semplificando il seguente rapporto, dove le aree del rombo e del rettangolo sono state espresse in funzione di $\overline{BC}$:

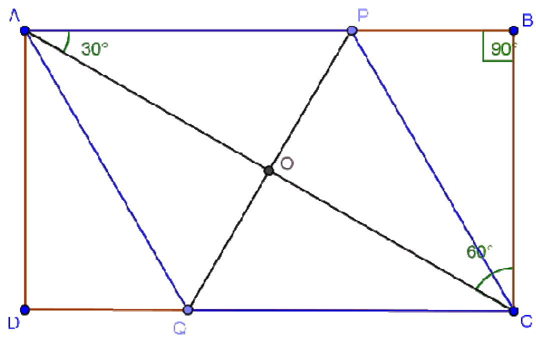
$$\text{Area rombo/Area rettangolo} = \frac{\frac{1}{2}(2\overline{BC}\cdot 2\overline{BC}/\sqrt{3})}{\overline{BC}\sqrt{3}\cdot\overline{BC}} = 2/3$$

Classe 3C dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

a)
Consideriamo il rettangolo ABCD di cui sappiamo che $\overline{AB} = \overline{BC}\sqrt{3}$.
Possiamo subito dedurre che AB e BC sono i cateti del triangolo rettangolo ABC, i cui angoli acuti misurano 30° e 60° e l'ipotenusa, che coincide con la diagonale del rettangolo ABCD, è il doppio del cateto minore.
Pertanto tracciamo la diagonale AC del rettangolo ABCD.

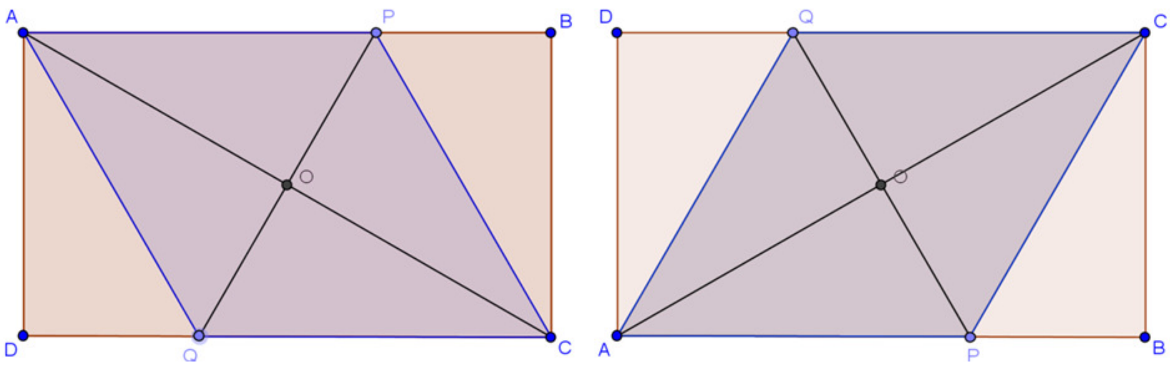


La diagonale del rettangolo è anche la diagonale del quadrilatero APCQ che dobbiamo individuare sapendo che il punto P appartiene ad AB e il punto Q a CD e dimostrare che tale quadrilatero è un rombo.
Affinchè il quadrilatero sia un rombo è necessario che:
$\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{CQ} = \overline{QA}$ [basta questo]
$A\hat{P}C = C\hat{Q}A$ [nel senso di uguaglianza delle ampiezze]
$Q\hat{A}P = P\hat{C}Q$ [nel senso di uguaglianza delle ampiezze]
Le diagonali AC e PQ siano tra loro perpendicolari, si bisechino scambievolmente e siano bisettrici dei quattro angoli del rombo.



Ipotizzando che il lato $\overline{BC} = 1$ cm, allora $\overline{AB} = \sqrt{3}$ cm e $\overline{AC} = 2$ cm.
Per le proprietà del rombo dette sopra, $\overline{AO} = \overline{OC} = 1$ cm e considerando che anche il triangolo rettangolo APO è un triangolo rettangolo con angoli acuti che misurano 30° e 60°(infatti sappiamo che $P\hat{A}O =$ 30°, $A\hat{O}P =$ 90°, allora $O\hat{P}A =$ 60° [intese come ampiezze] perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°), allora potremo calcolare le misure della lunghezza di AP e OP: $\overline{AP} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ cm e $\overline{OP} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ cm
In conclusione, per individuare il punto P, basta tracciare la bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$ che incontrerà il lato AB ad una distanza di $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm dal punto A. Per individuare il punto Q tracceremo la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}C$ che incontrerà il lato DC ad una distanza di $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm dal punto C. [Occorre poi dimostrare che si ottiene in questo modo effettivamente un rombo.]

b)
Abbiamo provato a cambiare l'ordine dei quattro vertici sul rettangolo ABCD per verificare la posizione di P o Q. Abbiamo notato che le distanze del punto P dai vertici A e B e del punto Q dai vertici C e D non cambiano.



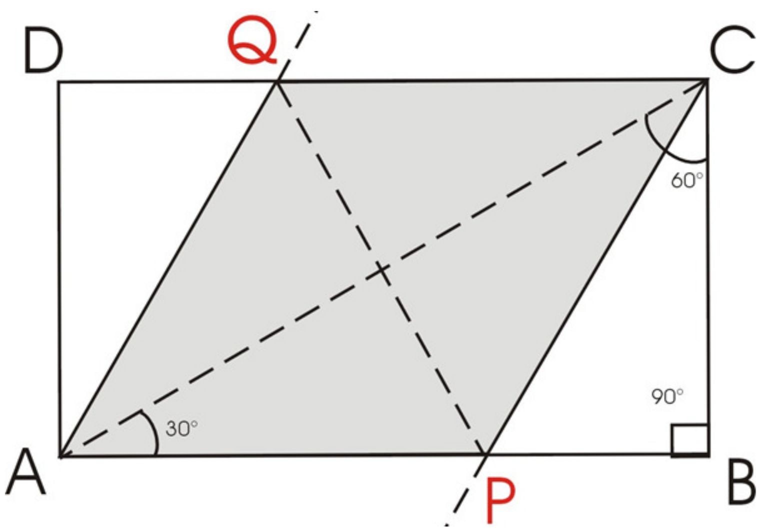
Il rombo APCQ individuato nella seconda figura risulta congruente al primo rombo.
Pertanto, la posizione dei punti P e Q è univocamente determinata.

c)
Abbiamo notato che all'interno del rettangolo ABCD sono presenti sei triangoli rettangoli, di cui:
AD = AO = OC = BC [nel senso di congruenti] (cateti maggiori)
AQ = AP = PC = QC [nel senso di congruenti] (ipotenuse)
$D\hat{A}Q = Q\hat{A}O = O\hat{A}P = B\hat{C}P = P\hat{C}O = O\hat{C}Q = 30°$ [nel senso di uguale ampiezza]
Possiamo quindi affermare che i sei triangoli rettangoli presenti nel rettangolo ABCD sono tra loro congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli.
Poiché il rombo è formato da quattro dei sei triangoli rettangoli congruenti, il rapporto tra l'area del rombo e quella del rettangolo sarà di $\frac{4}{6}$, che semplificando equivale a $\frac{2}{3}$.

$$\frac{A\,rombo}{A\,rettangolo} = \frac{2}{3}$$

Classe 3D dell'Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

a)



Per dimostrare questo punto abbiamo effettuato osservazioni sui triangoli rettangoli ABC e CDA (ottenuti tracciando la diagonale $\overline{AC}$ del rettangolo ABCD) e successivamente considerato la definizione di rombo. In particolare, affinché il lato [risulti] $\overline{AB} = \overline{BC}\sqrt{3}$ è necessario che i due triangoli rettangoli abbiano gli angoli ampi 30°, 60° e 90° (teoremi su triangoli rettangoli particolari). Infatti, nei triangoli rettangoli aventi gli angoli con queste ampiezze (che rappresentano la metà di un triangolo equilatero), l'ipotenusa [di lunghezza] $\overline{AC} = 2\overline{BC}$. Allora abbiamo verificato quanto osservato attraverso l'applicazione del Teorema di Pitagora, e constatato che l'altro cateto $\overline{AB}$ misura proprio:

$$\overline{AB} = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2BC)^2 - BC^2} = \sqrt{4BC^2 - BC^2} = \sqrt{3BC^2} = \overline{BC}\sqrt{3}$$

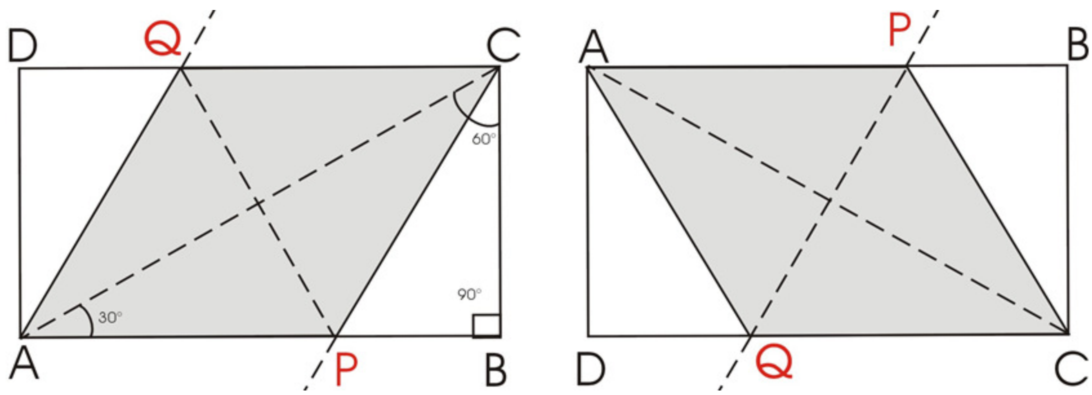
Dimostrate le relazioni tra i lati del rettangolo (che sono i cateti dei triangoli rettangoli ABC e CDA) e le sue diagonali [la sua diagonale] (che rappresentano [rappresenta] l'ipotenusa dei triangoli rettangoli ABC e CDA), per individuare i punti P e Q , necessari per individuare il rombo APCQ, si è fatto riferimento alle definizioni e ai teoremi sul rombo. Infatti se il quadrilatero APCQ è un rombo, allora gli angoli opposti dovranno essere congruenti (uno acuto e uno ottuso), le due diagonali dovranno essere bisettrici di tali angoli e i quattro lati congruenti tra loro.

Pertanto sono state tracciate le bisettrici degli angoli $\mathrm{A}\hat{C}\mathrm{B}$ e $\mathrm{C}\hat{A}\mathrm{D}$ (entrambi di [ampiezza pari a] 60°) fino ad incontrare i lati $\overline{AB}$ [AB] e $\overline{CD}$ [CD], rispettivamente nei punti P e Q. In questo modo gli angoli $\mathrm{C}\hat{A}\mathrm{P}$ e $\mathrm{C}\hat{A}\mathrm{Q}$ e, analogamente, gli angoli $\mathrm{A}\hat{C}\mathrm{Q}$ e $\mathrm{A}\hat{C}\mathrm{P}$ misureranno 30° (quindi congruenti). Conseguentemente, la diagonale AC del rettangolo rappresenterà la diagonale maggiore del rombo e sarà bisettrice degli angoli $\mathrm{P}\hat{A}\mathrm{Q}$ e $\mathrm{P}\hat{C}\mathrm{Q}$.

Inoltre, poiché per definizione, se due angoli di un triangolo (APC) sono congruenti (entrambi in $\hat{A}$ e in $\hat{C}$ di 30°) , allora i lati opposti a questi angoli ($\overline{AP}$ [AP] e $\overline{CP}$ [CP]) saranno congruenti, e quindi, facendo le stesse considerazioni per il triangolo AQC, i quattro lati del rombo saranno congruenti.

Pertanto, per quanto dimostrato, il quadrilatero APQC è un rombo.

b)



Abbiamo risolto questo punto osservando che il quadrilatero *APCQ* può essere rappresentato in altri modi, scegliendo un diverso ordine con cui indicare i vertici A, B, C, e D del rettangolo. Però, in conseguenza a queste osservazioni, la posizione del punto P rispetto ai vertici A e B e del punto Q rispetto ai vertici C e D non cambia (le distanze rimangono invariate). Pertanto, la posizione dei punti P e Q è univocamente determinata.

c)

Abbiamo risolto questo punto calcolando separatamente il valore dell'area del rettangolo e del rombo e successivamente abbiamo svolto le operazioni per calcolarne il rapporto.

<u>Calcolo dell'area del rettangolo ABCD:</u>

$$A_{rettangolo} = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$

Essendo

$\overline{AB} = \overline{BC}\sqrt{3}$ (dato del problema) la formula per il calcolo dell'area diventa:

$$A_{rettangolo} = \overline{BC} \cdot \overline{BC}\sqrt{3} = \overline{BC}^2\sqrt{3}$$

<u>Calcolo dell'area del rombo APCQ</u>.

Abbiamo osservato che il rettangolo ABCD è composto da 6 triangoli rettangoli equivalenti (hanno l'ipotenusa, i cateti e gli angoli congruenti). Poiché il rombo risulta composto da 4 dei triangoli rettangoli osservati precedentemente, la sua area sarà pari a:

$A_{rombo} = \frac{4}{6} A_{rettangolo} = \frac{4}{6} \overline{BC}^2 \sqrt{3}$ che, eseguendo le dovute semplificazioni, diventa:

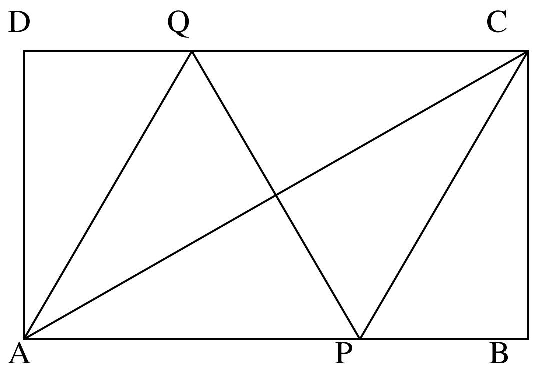
$$A_{rombo} = \frac{2}{3} \overline{BC}^2 \sqrt{3}$$

Pertanto il rapporto tra le aree è pari a:

$\frac{A_{rombo}}{A_{rettangolo}} = \frac{\frac{2}{3} \overline{BC}^2 \sqrt{3}}{\overline{BC}^2 \sqrt{3}}$ che semplificando diventa $\frac{A_{rombo}}{A_{rettangolo}} = \frac{2}{3}$

Simona Mongelli, Classe 2A
Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

a)
Risposta n°1: abbiamo così ottenuto la figura APCQ. [Manca una qualsiasi spiegazione e giustificazione.]



b)
La posizione di P su AB e di Q su CD è univocamente determinata perché la diagonale maggiore del rombo contenuta nel rettangolo corrisponde alla diagonale del rettangolo stesso, mentre la diagonale minore del rombo dovendo essere perpendicolare alla diagonale maggiore [in quale punto?] determina sui lati del rettangolo due punti definiti.

c)
$BC^2+(BC\sqrt{3})^2=AC^2$ [$\overline{BC}^2+(\overline{BC}\sqrt{3})^2=\overline{AC}^2$] (Teorema di Pitagora: ricavo AC [$\overline{AC}$])

$\overline{BC}^2+\overline{BC}^2\times(\sqrt{3})^2=\overline{AC}^2$ [$\overline{BC}^2+\overline{BC}^2\times(\sqrt{3})^2=\overline{AC}^2$

$\overline{BC}^2+\overline{BC}^2\times 3=\overline{AC}^2$ [$\overline{BC}^2+\overline{BC}^2\times 3=\overline{AC}^2$]

$\overline{BC}^2+3\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$ [$\overline{BC}^2+3\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$]

$4\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$ [$4\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$]

$\sqrt{4}\overline{BC}^2=\sqrt{}\overline{AC}^2$ [$\sqrt{4\overline{BC}^2}=\sqrt{\overline{AC}^2}$]

$2\overline{BC}=\overline{AC}$ [$2\overline{BC}=\overline{AC}$]

Abbiamo ricavato l'ipotenusa del triangolo ABC che corrisponde alla diagonale maggiore del rombo. Quindi essendo AC, secondo il teorema di Pitagora, uguale a 2BC possiamo dire che OC è uguale a BC. Pertanto, secondo la proprietà della similitudine dei triangoli che dice: "Se due triangoli hanno un lato e un angolo della stessa grandezza [che vuol dire? Non è vero e si possono dare controesempi], hanno la stessa superficie", e notando che [[la superficie]] [il] [[del]] rettangolo è composta da 6 triangoli che rispettano le stesse condizioni possiamo affermare che i 6 triangoli rettangoli hanno la stessa superficie e quindi sono congruenti [la equiestensione <u>non</u> implica la congruenza].

Quindi se definiamo [che vuol dire? Occorre spiegare] l'area del rettangolo come 6 (composta da sei triangoli rettangoli congruenti) e l'area del rombo 4 (composta da 4 triangoli rettangoli congruenti), il rapporto tra l'area del rombo e quella del rettangolo è la seguente:

4/6 , che semplificata, è uguale a 2/3.