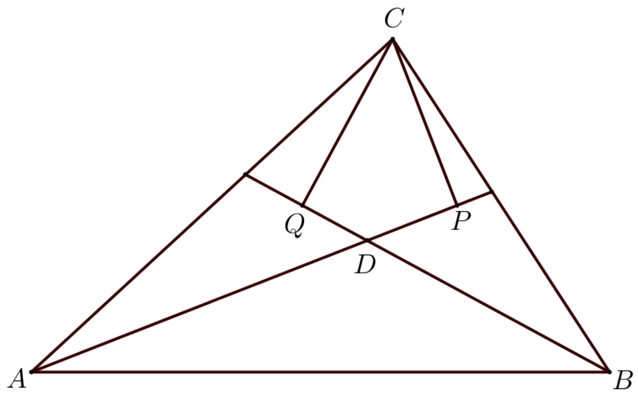
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia 13 - 27 Marzo 2013 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema
Dato il triangolo *ABC*, si traccino le bisettrici degli angoli in *A* e *B*, che si incontrano in *D* (vedi figura).



Si conducano poi, da *C*, i segmenti *CP* e *CQ* perpendicolari a tali bisettrici.
1) Provare che il quadrilatero *DPCQ* è inscrivibile in una circonferenza.
2) Dimostrare che *PQ* è parallelo al lato *AB*.
Motivare tutte le risposte.

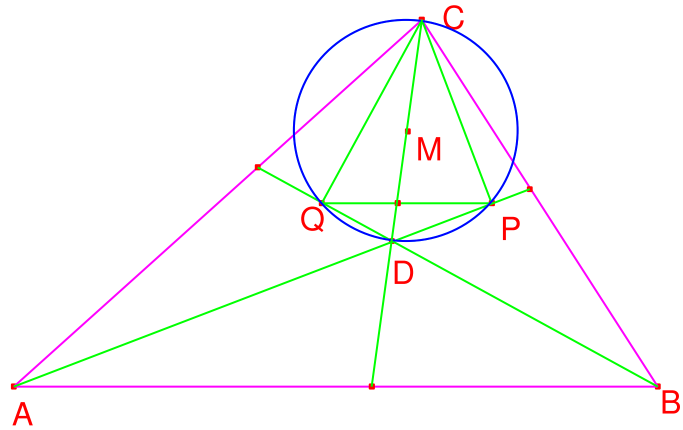
Commento
Sono giunte sette risposte così suddivise: tre da classi seconde di Liceo Scientifico, una risposta da una classe terza, sempre di Liceo Scientifico, e tre da classi terze di Scuola Media (ossia Scuola Secondaria di I grado) tutte facenti parte di uno stesso Istituto Comprensivo.
Il problema poneva due quesiti relativi a una stessa figura costituita da un triangolo da due vertici del quale venivano tracciate le due bisettrici. Dal terzo vertice si conducevano le perpendicolari alle due bisettrici in modo da individuare con l'incentro precedentemente ottenuto e i piedi delle due perpendicolari un quadrilatero. Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare che il quadrilatero così formato era inscrivibile in una circonferenza; nel secondo di dimostrare che il segmento congiungente i piedi delle due perpendicolari predette era parallelo al lato opposto al terzo vertice del triangolo.
In tutte le risposte vengono affrontati in modo sostanzialmente corretto i due quesiti, seguendo anche strategie risolutive diverse. Tuttavia non mancano, in alcuni casi, imprecisioni o affermazioni non completamente motivate. Come succede da tempo, si fa spesso confusione tra una grandezza geometrica e la sua misura. Infine vogliamo sottolineare la necessità di evitare di fare riferimento a un punto presente in una figura semplicemente citando la lettera che lo denota, senza precisare il modo in cui è stato ottenuto. Ricordiamo anche la necessità di indicare, accanto al nome della scuola, anche il comune dove è situata la scuola stessa.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "Aristosseno", Taranto (TA)
LS "Archimede", Aci Bonaccorsi (CT)

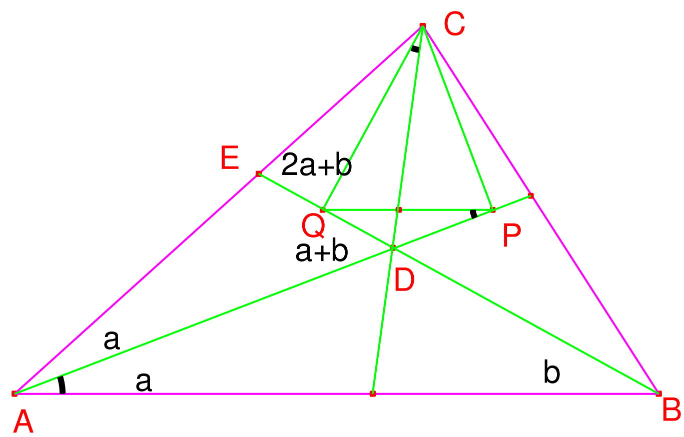
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS “S. D’Arzo”, Montecchio E. (RE)
Ist. Comp. “G. Deledda”, Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Classe 2H, Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)



1)
Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se e solo se ha gli angoli opposti a due a due supplementari; ebbene il quadrilatero $DPCQ$ è inscrivibile in una circonferenza poiché ha gli angoli opposti $C\hat{Q}D$ e $C\hat{P}D$ retti per costruzione ed essendo la somma degli angoli interni di un quadrilatero pari a 360°, risulta: $Q\hat{C}P + Q\hat{D}P = 180°$ [intesa come somma di ampiezze], ovvero anche gli altri due angoli opposti sono supplementari.
Il diametro della circonferenza circoscritta al quadrilatero è il segmento CD perché gli angoli $C\hat{Q}D$ e $C\hat{P}D$ sono retti e quindi insistono sulla semicirconferenza circoscritta al quadrilatero [su una delle due semicirconferenze di diametro CD].



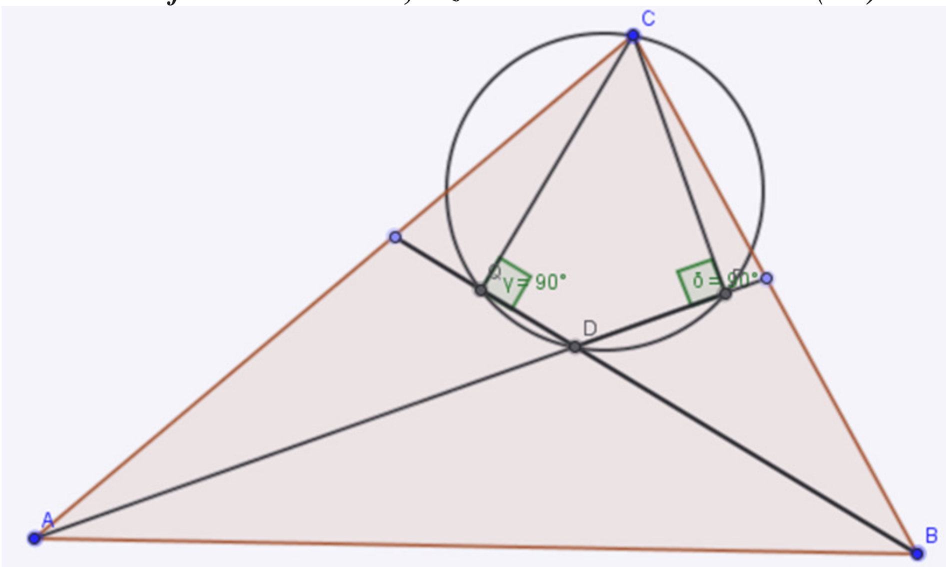
2)
Indichiamo con a, b e c le ampiezze delle metà [la metà delle ampiezze] degli angoli $B\hat{A}C, A\hat{B}C, A\hat{C}B$ del triangolo ABC. L'angolo $A\hat{D}E = a + b$ [$A\widehat{D}E$ ha ampiezza pari a a + b] poiché esso è angolo esterno al triangolo ADB; l'angolo $D\hat{E}C = 2a + b$ [$D\widehat{E}C$ ha ampiezza pari a $2a$ + b], poiché esso è angolo esterno al triangolo ADE (dal teorema dell'angolo esterno ad un triangolo) .
Il triangolo CEQ è rettangolo in Q per costruzione , e quindi: $E\hat{C}Q = 90 - (2a + b)$ [$E\widehat{C}Q$ ha ampiezza pari a 90° − (2a + b)] (gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari); la semiretta CD è bisettrice dell'angolo $A\hat{C}D$ [$A\widehat{C}B$] del triangolo ABC: $E\hat{C}D = \frac{1}{2} A\hat{C}B = c$ [e quindi ampiezza uguale a c]. Possiamo così calcolare l'ampiezza di $Q\hat{C}D$:

$Q\hat{C}D = E\hat{C}D - E\hat{C}Q = c - E\hat{C}Q = c - [90 - (2a + b)] = (90 - a - b) - (90 - 2a - b) = a$ [con tutti gli angoli indicati intesi come ampiezze].

Ma è anche $Q\hat{C}D = Q\hat{P}D$ [ampiezza $Q\widehat{C}D =$ ampiezza $Q\widehat{P}D$] in quanto, nella circonferenza circoscritta al quadrilatero DPCQ, questi due angoli sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco QD (vedi prima Figura).

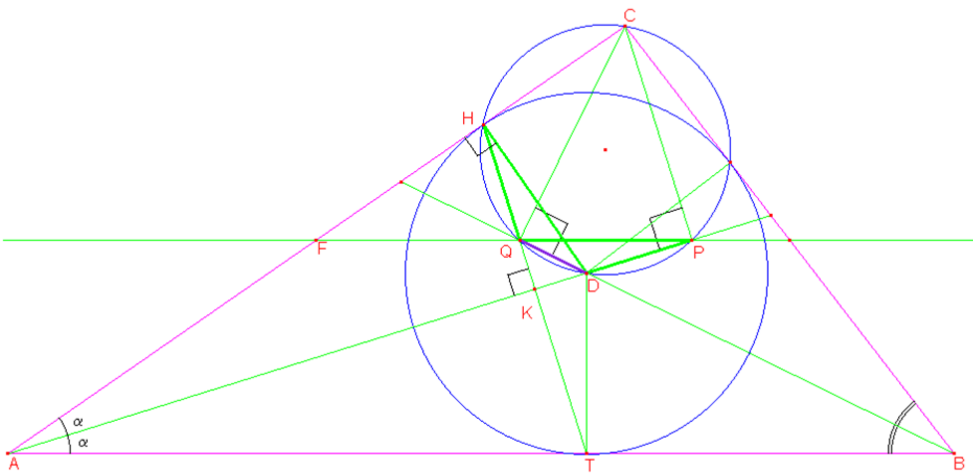
Essendo pertanto congruenti gli angoli $Q\hat{P}D$ e $D\hat{A}B$ (di ampiezza = a), che sono alterni interni delle rette di PQ e di AB tagliate dalla trasversale PA, risulta PQ parallelo ad AB.

Classe 2BA, Liceo Scientifico "Archimede", sez. associata Aci Bonaccorsi (CT)



1)

Consideriamo il quadrilatero DQCP: esso è inscritto [inscrivibile] in una circonferenza poiché ogni quadrilatero è inscritto [inscrivibile] in una circonferenza se [[almeno]] ha due angoli opposti supplementari [gli altri due angoli opposti sono supplementari di conseguenza], in questo caso gli angoli opposti supplementari sono gli angoli ∠DQC e ∠DPC entrambi angoli di [ampiezza pari a] 90° per ipotesi.

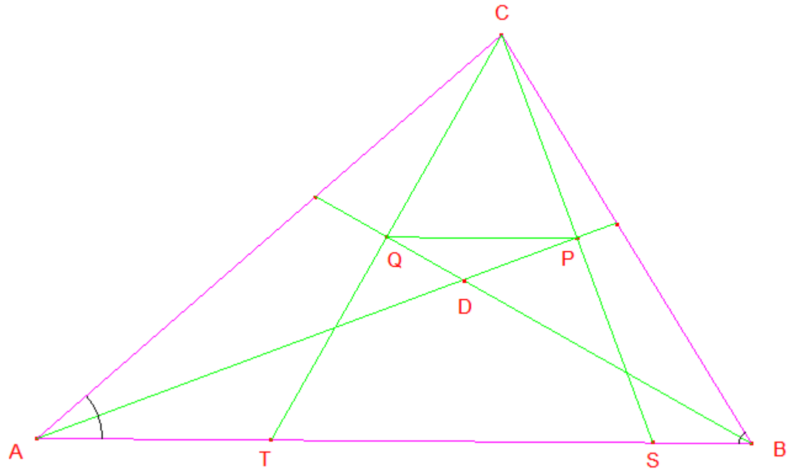


2)

Consideriamo la circonferenza circoscritta al quadrilatero QDPC (inscrittibile per la dimostrazione precedente) e una seconda circonferenza che abbia centro in D (incentro del triangolo ABC perché punto di intersezione delle sue bisettrici). Il raggio DH è perpendicolare al lato [AC] dunque che passeranno per i punti di tangenza sono perpendicolari [che vuol dire?]. Il segmento AD è [giace

sull'] asse del segmento HT essendo H e T i punti di tangenza delle tangenti alla circonferenza condotte da A. Consideriamo il triangolo rettangolo AHK [cos'è il punto K?], l'angolo ∠AHK è complementare di ∠HAK → ∠KHD è complementare di ∠HAK → ∠KHD = α [cos'è α?] [HT passa per Q?].
Nella circonferenza circoscritta al quadrilatero QDPC gli angoli ∠QHD e ∠QPD insistono sulla stessa corda QD pertanto sono congruenti: [ampiezza dell'angolo] ∠QPD = α.
Le rette QP e AB tagliate dalla trasversale AP formano angoli alterni interni congruenti → QP e AB sono parallele.

Asia Cosentino, Stefania Cosenza, Valentina Elia, Giovanna Marrelli, Alessandro Mazzotta, Carmela Perri, Debora Saullo
Classe 2B, Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



1)
Il quadrilatero $DPCQ$ è inscrittibile in una circonferenza perché ha gli angoli opposti $C\hat{Q}D$ e $C\hat{P}D$ supplementari, in quanto $CQ \perp QB$ e $CP \perp AP$ per costruzione [e quindi anche gli angoli $Q\hat{C}P$ e $Q\hat{D}P$ sono supplementari].

2)
Si considerino i triangoli ASP [occorre precisare cos'è S] e APC, essi hanno:
-AP in comune
-$S\hat{A}P \equiv A\hat{P}C$ [$C\hat{A}P$] poiché AP è bisettrice dell'angolo $S\hat{A}C$ per costruzione

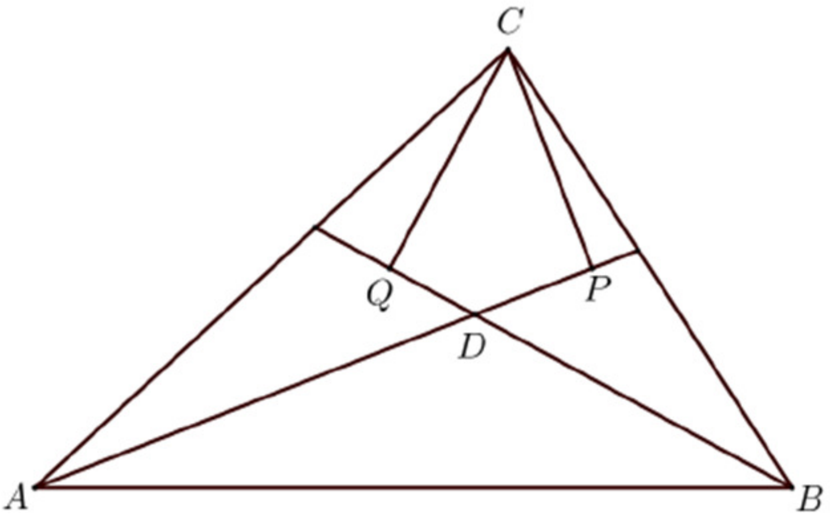
-$S\hat{P}A \equiv \frac{\pi}{2}$ [$S\hat{P}A$ ha ampiezza pari a $\frac{\pi}{2}$] e $A\hat{P}C \equiv \frac{\pi}{2}$ [$A\hat{P}C$ ha ampiezza pari a $\frac{\pi}{2}$] perché $AP \perp CS$

Di conseguenza i triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza, in

particolare $AS \equiv AC$, quindi il triangolo ASC è isoscele e P è il punto medio di CS in quanto AP è

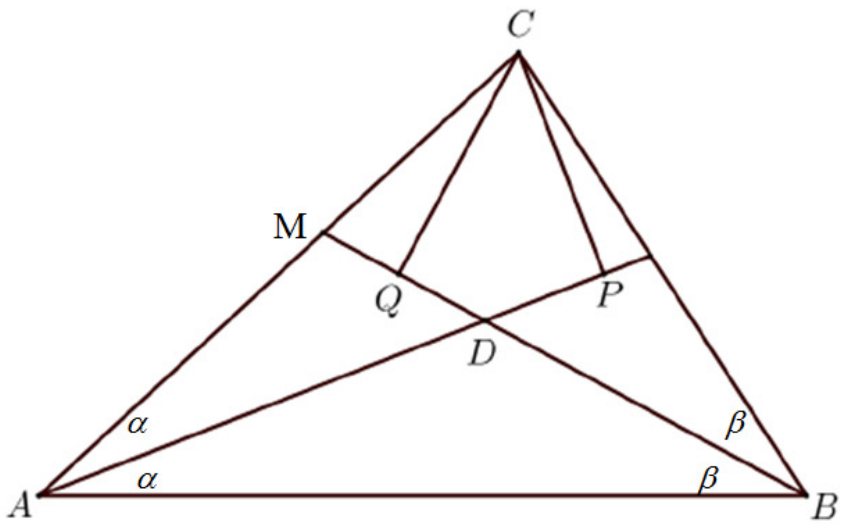
altezza, bisettrice e mediana del triangolo isoscele.
Si considerino i triangoli CBQ e BQT [occorre precisare cos'è T], essi hanno:
-BQ in comune
-$C\hat{B}Q \equiv B\hat{Q}T$ [$T\widehat{B}Q$] poiché BQ è bisettrice dell'angolo $T\hat{B}C$ per costruzione
-$T\hat{Q}B \equiv \frac{\pi}{2}$ [$T\widehat{Q}B$ ha ampiezza pari a $\frac{\pi}{2}$] e $C\hat{Q}B \equiv \frac{\pi}{2}$ [$C\widehat{Q}B$ ha ampiezza pari a $\frac{\pi}{2}$] perché $BQ \perp CT$
Di conseguenza i triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza, in particolare $CB \equiv BT$, quindi il triangolo BCT è isoscele e Q è il punto medio di CT in quanto BQ è altezza, bisettrice e mediana del triangolo isoscele.
Allora, per il teorema di Talete, applicato al triangolo TCS segue che in un triangolo il segmento che congiunge i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato. Da ciò si evince che $QP//AB$.

Matteo Ferrari, Classe 3A
Liceo Scientifico "Silvio D'Arzo", Montecchio E. (RE)



1)
Gli angoli convessi CQD e CPD sono congruenti e retti per ipotesi. La somma delle loro ampiezze è quindi uguale a 180°. La somma delle ampiezze degli angoli convessi QDP e PCQ è quindi anch'essa uguale a 180° per differenza di angoli (in un quadrilatero la somma delle ampiezze degli angoli interni è uguale a 360°).
La somma delle ampiezze degli angoli opposti del quadrilatero DPCQ è uguale a 180°, esso è dunque inscrivibile in una circonferenza.

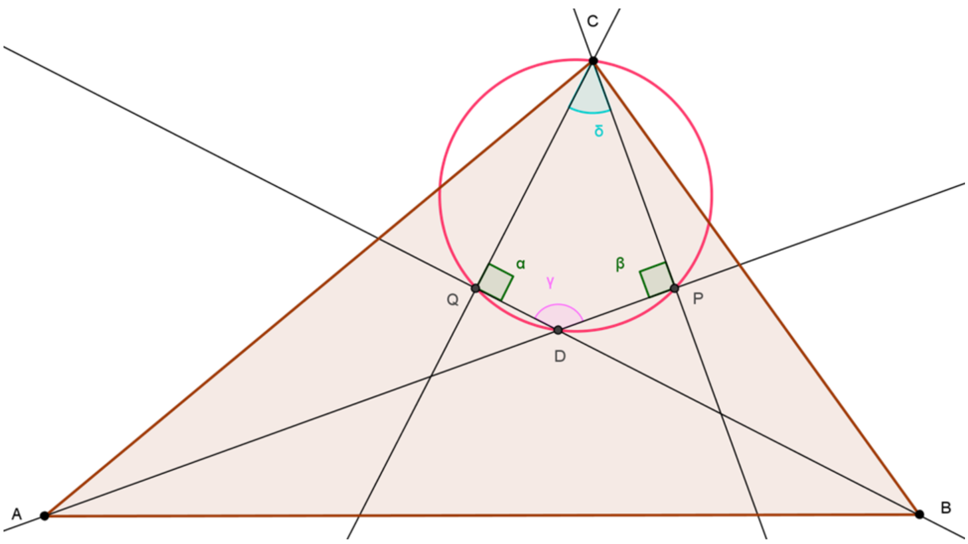
C.V.D.



2)
Essendo D il punto d'intersezione delle due bisettrici degli angoli convessi CAB e CBA, esso è il punto d'intersezione di tutte e tre le bisettrici del triangolo. Gli angoli convessi DCA e DCB sono quindi congruenti. Indico l'ampiezza dell'angolo convesso DAB (congruente a DAC per ipotesi) con "α" e l'ampiezza dell'angolo convesso DBA (congruente a DBC per ipotesi) con "β".
-L'ampiezza dell'angolo convesso QDA (angolo esterno al triangolo ADB sul prolungamento di BD) è uguale ad $\alpha + \beta$ per il teorema dell'angolo esterno.
-Chiamo con "M" il punto di intersezione della retta QD con CA.
-L'ampiezza dell'angolo convesso CMQ (angolo esterno al triangolo AMD sul prolungamento di AM) è uguale a $2\alpha + \beta$ per il teorema dell'angolo esterno.
-L'ampiezza dell'angolo convesso QCM è uguale a $90° - 2\alpha - \beta$ per differenza di angoli (la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180° e l'angolo convesso CQM è retto per ipotesi).
-L'ampiezza dell'angolo convesso DCA è uguale a $90° - \alpha - \beta$; infatti la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180° e l'angolo convesso DCA è congruente a metà dell'angolo convesso BCA essendo CD bisettrice dell'angolo.
-L'ampiezza dell'angolo convesso QCD è uguale ad α (differenza delle ampiezze degli angoli MCD e MCQ).
-L'ampiezza dell'angolo convesso DPQ è uguale all'ampiezza di QCD (e quindi ad α) perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco QD nella circonferenza passante per i punti C Q D P (esiste per dimostrazione precedente).
-Essendo l'ampiezza dell'angolo convesso DPQ uguale all'ampiezza di DAB (entrambi uguali ad α): le rette PQ e AB formano angoli alterni interni congruenti con la trasversale AP. Le rette PQ e AB sono quindi parallele.

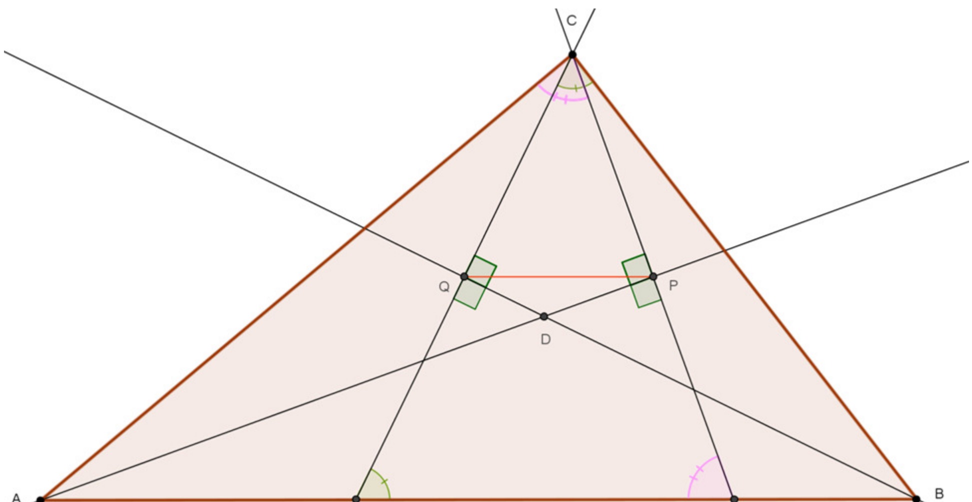
C.V.D.

Classe 3B, Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)



1)
Gli angoli opposti α e β sono entrambe [entrambi] retti (per costruzione il segmento CQ è perpendicolare al segmento QD e il segmento CP è perpendicolare al segmento DP) e la somma delle loro ampiezze misura 180°; anche la somma delle ampiezze degli angoli opposti γ e δ misura 180°. Tutto ciò, per la condizione di inscrivibilità di un quadrilatero (angoli opposti supplementari), implica che DPCQ è inscrivibile in una circonferenza.

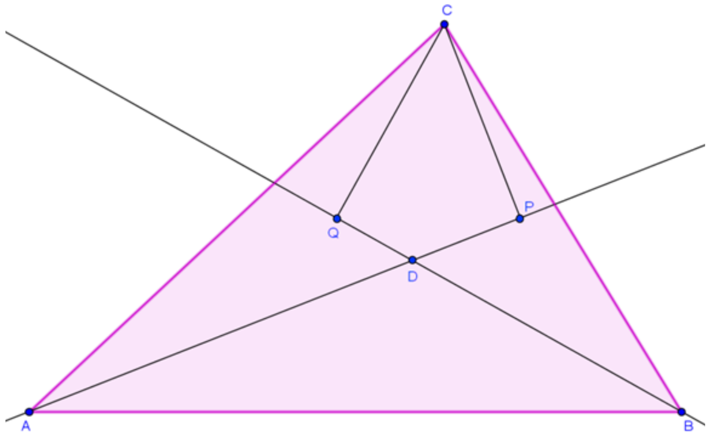
2)
Prolunghiamo la retta perpendicolare a DQ, passante per il punto Q e prolunghiamo la retta perpendicolare a DP, passante per il punto P, entrambe fino ad incontrare il lato AB del triangolo ABC e rispettivamente nei punti E ed F. Con tale costruzione, si formano i triangoli isosceli EBC ed FAC. Il triangolo EBC è isoscele perché composto dai due triangoli rettangoli congruenti EBQ e QBC in quanto, per il 2° criterio di congruenza, risultano congruenti gli angoli rettangoli in Q, i due angoli al vertice B perché generati dalla bisettrice e il lato BQ che è condiviso dai due triangoli in questione. Risulta inoltre che, essendo BQ l'altezza del triangolo EBC, il punto Q è punto medio di EC.



D'altra parte, il triangolo FAC è isoscele perché composto dai due triangoli rettangoli congruenti CAP e PAF in quanto, per il 2° criterio di congruenza, risultano congruenti gli angoli rettangoli in P, i due angoli al vertice A perché generati dalla bisettrice e il lato AP condiviso dai due triangoli in questione. Risulta inoltre che essendo AP l'altezza del triangolo CAF, il punto P è punto medio di FC.

Possiamo quindi affermare che CE:CQ = CF:CP e, considerando il Teorema di Talete, possiamo concludere che, poiché la retta passante per CE determina la formazione di segmenti direttamente proporzionali ai segmenti corrispondenti nell'altra retta passante per CF, il segmento QP è parallelo al lato AB.

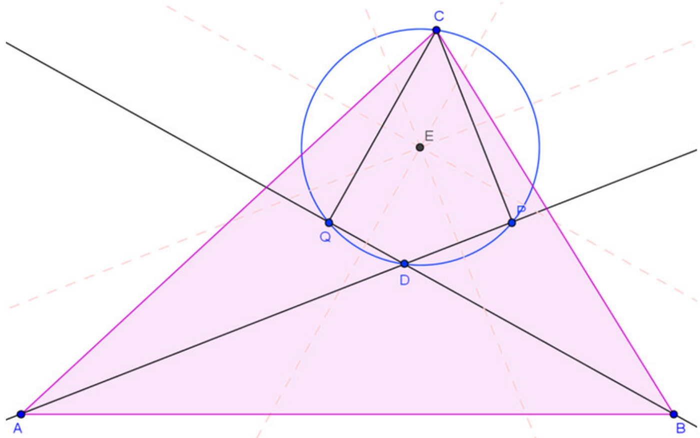
Classe 3C, Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)



1)

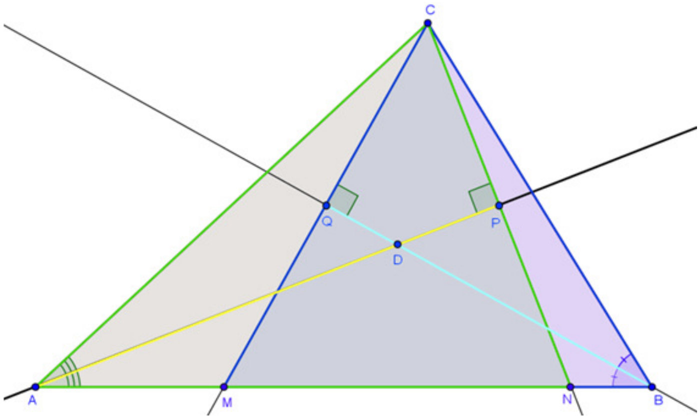
Consideriamo il quadrilatero CQDP, di cui sappiamo che i lati CP e CQ sono perpendicolari rispettivamente alla bisettrice degli angoli in A e B per costruzione. Possiamo subito osservare che il quadrilatero APQD [CQDP] ha due angoli opposti supplementari, infatti le ampiezze degli angoli $C\hat{P}D$ e $C\hat{Q}D$ sono pari a 90°, allora anche gli altri due angoli opposti $Q\hat{C}P$ e $Q\hat{D}P$ saranno supplementari, perché la somma delle ampiezze degli angoli interni di un quadrilatero è sempre 360°.

Pertanto il quadrilatero CQDP sarà inscrivibile in una circonferenza, il cui centro E sarà il circocentro, ottenuto tracciando gli assi relativi ai quattro lati del quadrilatero CQDP.



2)

Per dimostrare che PQ è parallelo al lato AB, abbiamo prolungato i segmenti CQ e CP fino ad intersecare il lato AB rispettivamente nei punti M ed N.



Consideriamo i triangoli ACN e BCM, notiamo che le bisettrici degli angoli in A e in B sono perpendicolari rispettivamente ai lati CN e CM, infatti per costruzione le ampiezze degli angoli $C\hat{P}A$ e $C\hat{Q}B$ sono pari a 90°. Pertanto i segmenti AP e BQ risultano altezze rispettivamente dei triangoli ACN e BCM.

Consideriamo il triangolo ACN, possiamo notare che :

- $C\hat{A}P \equiv P\hat{A}N$
- $C\hat{P}A \equiv N\hat{P}A$
- $\overline{AP}$ [AP] è in comune

I triangoli ACP e ANP risultano congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli, infatti hanno rispettivamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti.

Possiamo concludere che $\overline{CP} = \overline{PN}$, quindi P è il punto medio del segmento CN.

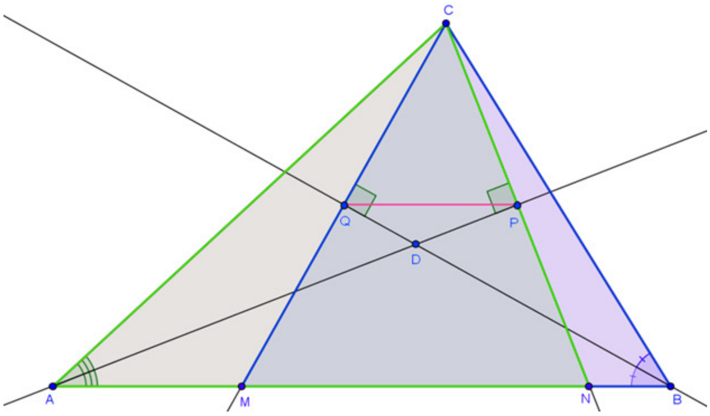
Consideriamo il triangolo BCM, possiamo notare che :

- $C\hat{B}Q \equiv Q\hat{B}M$
- $C\hat{Q}B \equiv M\hat{Q}B$
- $\overline{BQ}$ [BQ] è in comune

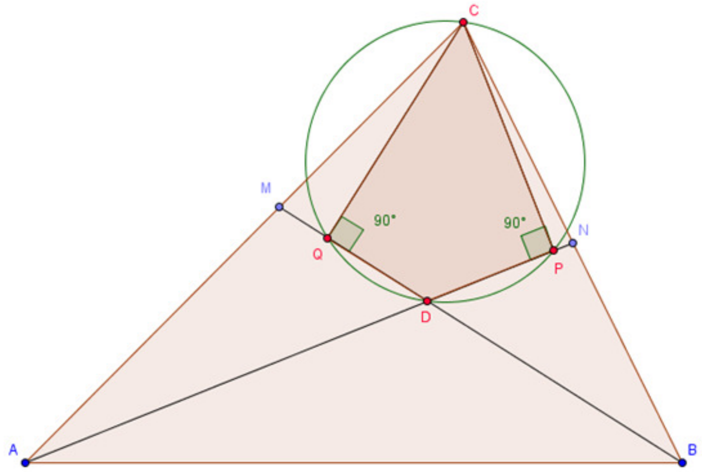
I triangoli BCQ e BMQ risultano anch'essi congruenti per il secondo criterio di congruenza.

Concludiamo quindi che $\overline{CQ} = \overline{QM}$, quindi Q è il punto medio del segmento CM.

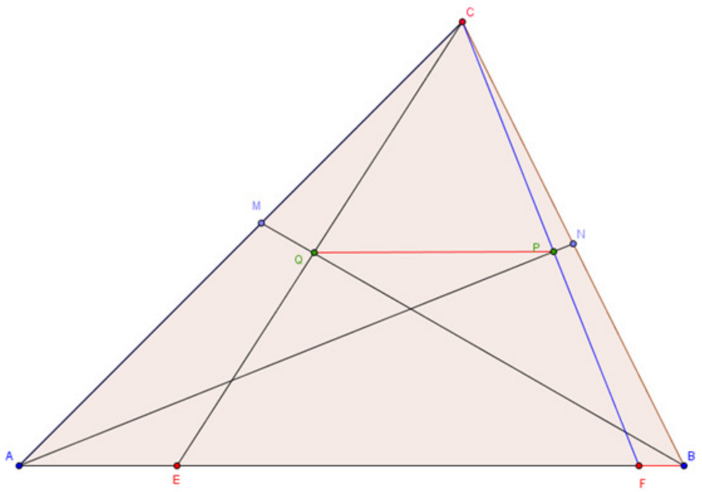
Consideriamo ora il triangolo CMN e congiungiamo i punti Q e P, punti medi rispettivamente dei lati CM e CN. Secondo una nota proprietà dei triangoli il segmento che congiunge i punti medi dei lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è la metà di esso, quindi QP è parallelo a MN, di conseguenza PQ//AB. c.v.d.



Classe 3D, Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)



1)
Condizione necessaria per inscrivere un quadrilatero in una circonferenza è che gli angoli opposti siano supplementari.
Considerando che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un quadrilatero è pari a 360°, poiché per costruzione del quadrilatero DPCQ gli angoli opposti $C\hat{Q}D$ e $D\hat{P}C$ sono retti (e quindi supplementari), allora anche gli altri due angoli opposti $Q\hat{C}P$ e $P\hat{D}Q$ sono supplementari.



2)
Per dimostrare quanto richiesto, dopo aver prolungato i segmenti CP e CQ fino ad intersecare il lato AB rispettivamente nei punti F ed E, abbiamo osservato i due triangoli CAF e CBE ottenuti.
In particolare, per il primo triangolo, il segmento AP rappresenta l'altezza (per costruzione è perpendicolare al lato CF) , la bisettrice (per costruzione), e quindi anche mediana (per il secondo criterio di congruenza APF ≡ APC) . Pertanto il triangolo CAF è isoscele e il punto P è punto medio del lato CF.
Successivamente abbiamo eseguito analoghe considerazioni per il triangolo CBE, dove il segmento BQ rappresenta l'altezza, la bisettrice e la mediana, e pertanto Q è punto medio del lato CE.
A questo punto, considerando il triangolo CFE, dimostrato che P e Q sono punti medi dei lati CF e CE, dal teorema di Talete, ne deriva che la congiungente PQ dei punti medi dei due lati del triangolo è parallela al terzo lato EF (che si trova su AB) . Quindi PQ è parallelo ad AB.