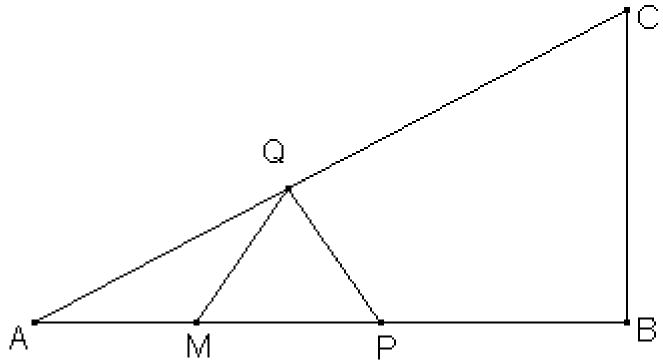
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo"* *(Edwin A. Abbott)

Flatlandia 10-24 Ottobre 2011 – Commento e soluzioni ricevute

Il testo del problema:

ABC è un triangolo rettangolo in cui l'ampiezza dell'angolo $\angle ACB$ è uguale a 60 gradi. Indichiamo con Q un punto dell'ipotenusa e con M e P due punti del cateto AB tali che le lunghezze dei segmenti AM, MQ e QP siano tutte uguali (vedi figura).



a) Determinare l'ampiezza dell'angolo $\angle QPB$.
b) Di che natura è il triangolo MPQ ?
c) Indicare una costruzione dei punti M, Q e P, indicando inoltre la posizione limite di M su AB.
d) Più in generale, indicata con α l'ampiezza dell'angolo $\angle ACB$, la precedente costruzione è sempre possibile?

Motivare le risposte.

Commento

Sono giunte dodici risposte (quindi questo inizio di anno scolastico sembra promettente!), sette da classi seconde di diversi Licei Scientifici, due da classi terze sempre di Liceo Scientifico e infine tre risposte da classi terze di Scuola Media.

Il problema poneva quattro quesiti, di cui i primi tre relativi alla stessa figura e il quarto a una sua generalizzazione. Nel primo quesito si chiedeva di determinare l'ampiezza di un particolare angolo, nel secondo di stabilire la natura di un particolare triangolo, nel terzo di indicare una possibile costruzione dei vertici del suddetto triangolo e di individuare la posizione limite di uno di essi e nell'ultimo di generalizzare la precedente costruzione.

Tutti rispondono in modo sostanzialmente corretto alle prime tre domande (anche se in alcuni casi manca la motivazione), mentre pochi rispondono alla quarta domanda in modo soddisfacente: si riscontrano risposte incomplete e affermazioni non giustificate.

Vogliamo sottolineare ancora una volta la presenza in quasi tutte le soluzioni di un "errore" [forse dovremmo dire una imprecisione] abbastanza comune in tutti i livelli scolari, cioè confondere un angolo con la sua ampiezza, il che porta a utilizzare la stessa notazione per indicare due concetti diversi.

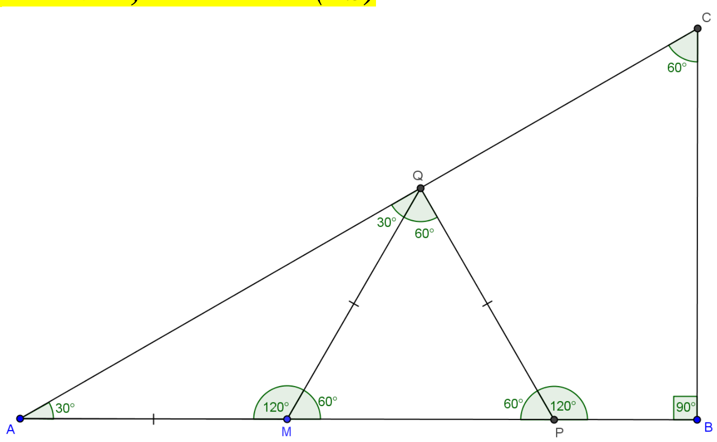
Infine una raccomandazione: quando si vogliono indicare gli studenti che hanno risolto il problema è necessario indicare sia il nome che il cognome; inoltre accanto alla classe è opportuno aggiungere anche la sezione.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "Don Milani", Montichiari (BS)
Ist. Sup., Sez. LST, "A. Badoni", Lecco
LS "L. Cremona", Milano
LS "Virgilio", Roma
LS "B. Russell", Roma
LS "C. Cafiero", Barletta (BA)
SM "G.B. Tiepolo", Milano
SM "Dimesse", Udine
SM "Brofferio", Asti

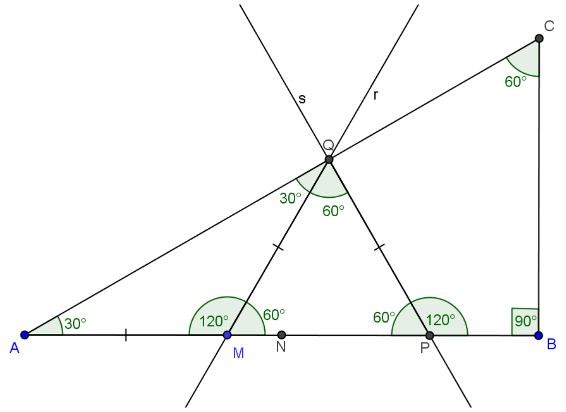
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 3B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

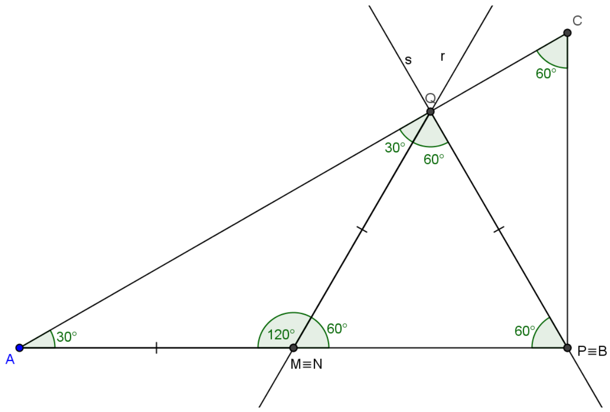


a, b)
$C\hat{A}B = 180° - A\hat{B}C - A\hat{C}B = 180° - 90° - 60° = 30°$. Allora, poiché il triangolo AMQ è isoscele per ipotesi, $A\hat{Q}M = 30°$ e $A\hat{M}Q = 180° - 30° - 30° = 120°$. Quindi $Q\hat{M}P = 180° - 120° = 60°$ e, poiché il triangolo MPQ è isoscele per ipotesi, $Q\hat{P}M \cong Q\hat{M}P = 60°$. Allora $\underline{Q\hat{P}B = 180° - 60° = 120°}$. Inoltre <u>il triangolo MPQ è equilatero</u> poiché ha due angoli (e di conseguenza anche il terzo) di [ampiezza pari a] 60°.

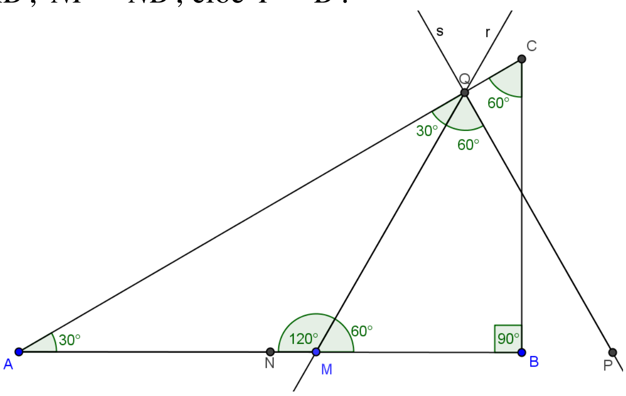


c)

Detto N il punto medio di AB, prendo un punto $M \in AN$. Traccio la retta r passante per M e intersecante AC in Q tale che $Q\hat{M}B = 60°$. $A\hat{M}Q = 180° - 60° = 120°$. Di conseguenza, essendo $C\hat{A}B = 180° - 90° - 60° = 30°$, $A\hat{Q}M = 180° - 120° - 30° = 30°$ e quindi il triangolo AMQ è isoscele, cioè $AM \cong MQ$. Traccio la retta $s \perp AC$ passante per Q e intersecante AB in P. $M\hat{Q}P = 90° - 30° = 60°$. Allora il triangolo MPQ è equilatero poiché ha due angoli di [ampiezza pari a] 60°. Quindi $MP \cong PQ \cong QM \cong AM$.



Se $M \equiv N$, $AM \equiv AN \rightarrow \overline{AM} = \overline{AN} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$. Quindi $\overline{MP} = \overline{AM} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$. Ma, poiché $MP \equiv NP$, $MP \cong AM \cong NB$ e $P \in AB$, $NP \equiv NB$, cioè $P \equiv B$.



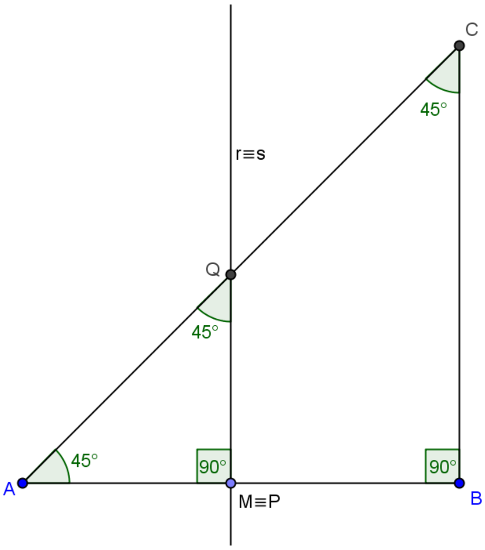
Se $M \in NB$, $\overline{AM} > \overline{AN}$ e, essendo $AM \cong MP$, $\overline{AP} = 2\overline{AM} > 2\overline{AN} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{AP} > \overline{AB}$. Quindi $P \notin AB$ (che è assurdo per l'ipotesi $P \in AB$).

Allora la posizione limite di M su AB è $M \equiv N$, cioè M punto medio di AB.

d)

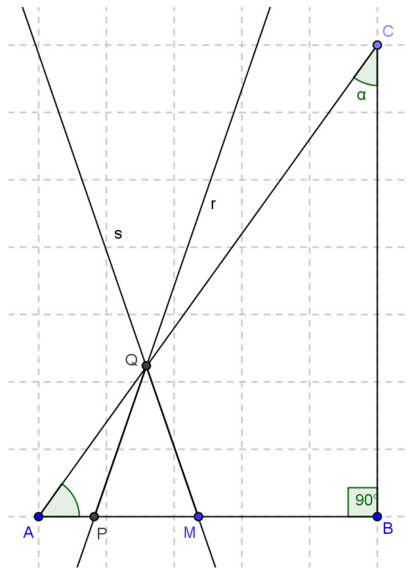
Se $A\hat{C}B = \alpha$, è possibile una costruzione simile tracciando r tale che $Q\hat{M}B = 180° - 2\alpha$ e tracciando s tale che $A\hat{Q}P = 3\alpha - 90°$. Infatti:

Per $\alpha = 45°$,



si ha $C\hat{A}B = 180° - 90° - 45° = 45°$. Quindi, preso M su AB, tracciando la retta r (passante per M e intersecante AC in Q tale che $Q\hat{M}B = 180° - 2\alpha$) si ha $Q\hat{M}B = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$, cioè $r \perp AB$. Quindi $A\hat{Q}M = 180° - 90° - 45° = 45°$ e il triangolo AQM è isoscele, cioè $AM \cong QM$. Tracciando la retta s (passante per Q e intersecante AB in P tale che $A\hat{Q}P = 3\alpha - 90°$) si ha $A\hat{Q}P = 3 \cdot 45° - 90° = 45°$ e $A\hat{Q}P \equiv A\hat{Q}M$, cioè $M \equiv P \rightarrow QM \equiv QP$. Quindi $AM \cong QM \cong QP$. (Inoltre poiché sia r che s passano per Q e M, $r \equiv s$)

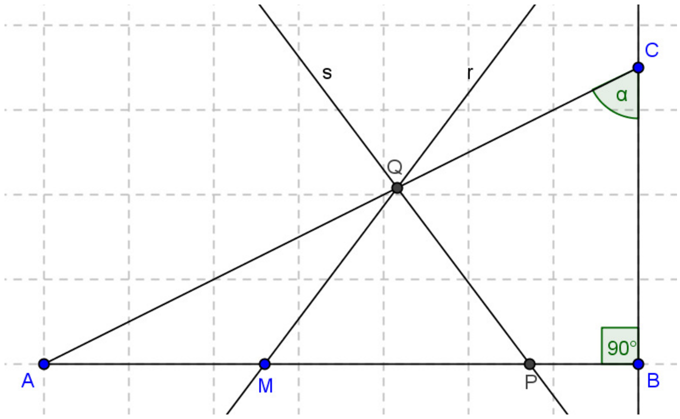
Per $\alpha < 45°$,



tracciando la retta r si ha $Q\hat{M}B = 180° - 2\alpha > 90°$. Quindi $Q\hat{M}A = 180° - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$ e, essendo $C\hat{A}B = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$, $A\hat{Q}M = 180° - (90° - \alpha) - 2\alpha = 90° - \alpha > 45°$ cioè $A\hat{Q}M \cong C\hat{A}B$ e il triangolo AQM è isoscele, cioè $AM \cong QM$. Tracciando la retta s si ha $A\hat{Q}P = 3\alpha - 90° < 45°$ ($A\hat{Q}M > A\hat{Q}P$). Quindi

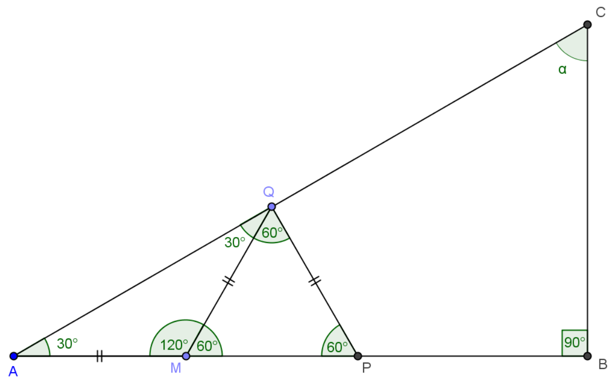
$P\hat{Q}M = A\hat{Q}M - A\hat{Q}P = 90° - \alpha - (3\alpha - 90°) = 180 - 4\alpha$ e $Q\hat{P}M = 180° - (180° - 4\alpha) - 2\alpha = 2\alpha$. Allora, poiché $Q\hat{P}M \cong Q\hat{M}P$, il triangolo PQM è isoscele, cioè $QP \cong QM \cong AM$

Per $\alpha > 45°$,



tracciando la retta r si ha $Q\hat{M}B = 180° - 2\alpha < 90°$. Quindi $A\hat{M}Q = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$ e, essendo $C\hat{A}B = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$, $A\hat{Q}M = 180° - (90° - \alpha) - 2\alpha = 90 - \alpha < 45°$ cioè $A\hat{Q}M \cong C\hat{A}B$ e il triangolo AQM è isoscele, cioè $AM \cong QM$. Tracciando la retta s si ha $A\hat{Q}P = 3\alpha - 90° > 45°$ ($A\hat{Q}P > A\hat{Q}M$). Quindi $P\hat{Q}M = A\hat{Q}P - A\hat{Q}M = 3\alpha - 90° - (90° - \alpha) = 4\alpha - 180°$ e $Q\hat{P}M = 180° - (4\alpha - 180°) - (180° - 2\alpha) = 180° - 2\alpha$. Allora, poiché $Q\hat{P}M \cong Q\hat{M}P$, il triangolo PQM è isoscele, cioè $QP \cong QM \cong AM$.
C.V.D.

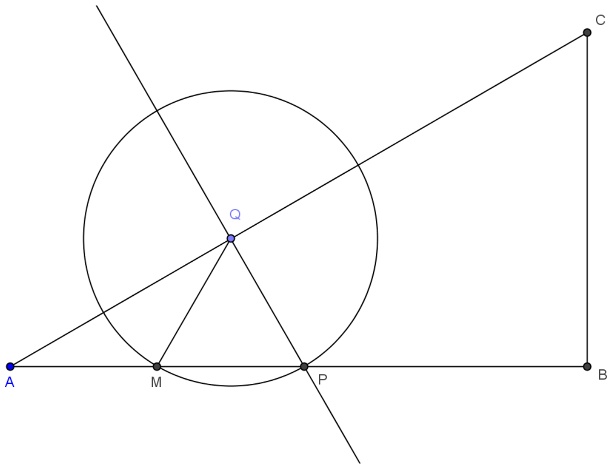
Kevin Palmerini, Classe 2A
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)



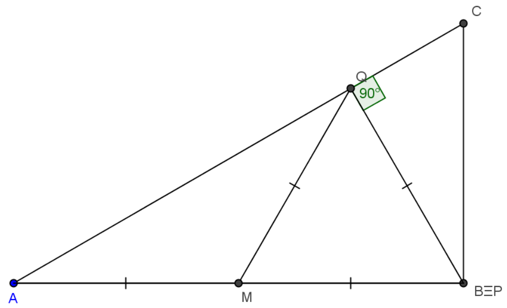
a)
[Poiché] il triangolo ABC essendo [è] rettangolo ed avendo [ha] due angoli di ampiezza pari a 90° e [[di]] 60°, l'angolo $B\hat{A}C$ sarà sicuramente di [ampiezza pari a] 30° (180° – 90° – 60°). Il triangolo AQM è isoscele, pertanto anche $A\hat{Q}M$ è di [ampiezza pari a] 30°, mentre [l'ampiezza di] $A\hat{M}Q$ è 120°. Essendo $Q\hat{M}P$ l'angolo adiacente a $A\hat{M}Q$, esso è di [ampiezza pari a] 60°, ma il triangolo MPQ è isoscele, quindi anche $M\hat{P}Q$ è di 60°. L'angolo adiacente a quest'ultimo è $Q\hat{P}B$ e la sua ampiezza è data da 180° – 60°, ossia 120°.
b)

Per i passaggi precedenti abbiamo scoperto che $Q\hat{M}P \cong M\hat{P}Q$ [e la loro ampiezza vale] 60°, ma allora anche $M\hat{Q}P$ è di [ampiezza pari a] 60° (180° – 60° – 60°) e allora [quindi] il triangolo MPQ è equilatero.

c)



Per trovare i punti M, Q e P, prendo un punto qualsiasi sull'ipotenusa AC che è [indico con] Q, dopodiché traccio la perpendicolare all'ipotenusa passante per quel punto e questa retta interseca il cateto AB nel punto P, successivamente disegno una circonferenza che ha per centro Q e come punto di contatto con la circonferenza [passante per] P, in modo che quest'ultima intersechi il cateto AB nel punto M. Se considero il triangolo AQP io so che $A\hat{Q}P$ è [di ampiezza pari a] 90°, mentre $Q\hat{A}P$ è di [ampiezza pari a] 30°, allora $Q\hat{P}A$ è di [misura] 60°, ma anche $Q\hat{M}P$ è di [misura] 60°, poiché il triangolo MPQ è isoscele, infatti $\overline{MQ} \cong \overline{QP}$ [$MQ \cong QP$] perché sono raggi della [di una stessa] circonferenza, ma allora anche $M\hat{Q}P$ è di [ampiezza pari a] 60° e siccome $A\hat{Q}P$ era [misurava] 90°, $A\hat{Q}M$ sarà di [ampiezza pari a] 30°, ma allora il triangolo AQM è isoscele perché ha i due angoli alla base congruenti e quindi si ottiene che $\overline{AM} \cong \overline{QM} \cong \overline{QP} \cong \overline{MP}$.

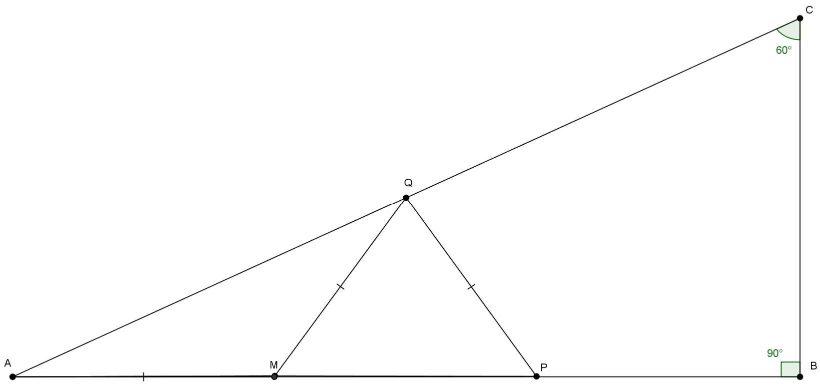


Inoltre il punto limite di M coincide con il punto medio del cateto AB, infatti P, in questo caso coincide con il punto B, mentre il punto Q coincide con il piede della perpendicolare tracciata da B sull'ipotenusa AC.

d)

[[…]]

Kevin Cavazzini,Alessandro Lenoci, Classe 2B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

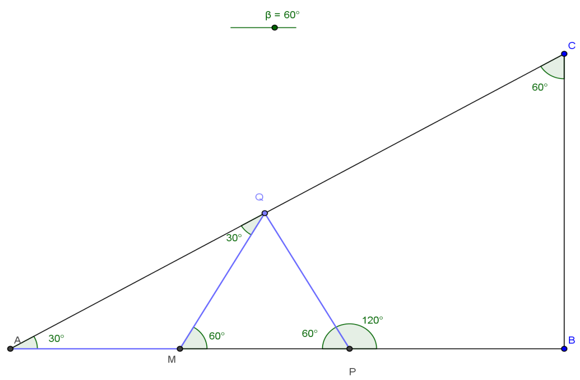


a, b)
Siccome il triangolo ABC è rettangolo per ipotesi e $\angle ACB$ misura 60°, allora per il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo, $\angle BAC$ è uguale [ha ampiezza pari a] a 30°. Siccome il triangolo MAQ è isoscele sui lati $\overline{AM}$ e $\overline{MQ}$ allora $\angle AQM$ = [ha ampiezza pari a] 30°. L'angolo $\angle PMQ$, per il teorema dell'angolo esterno, sarà uguale a $\angle MAQ + \angle AQM = 30° + 30° = 60°$ [e quindi la relativa ampiezza sarà 30° + 30° = 60°]. Dunque il triangolo PMQ essendo isoscele e con un angolo di 60° sarà equilatero. Quindi $\angle QPB = \pi[180°] - \angle QPM = 180° - 60° = 120°$ poiché è supplementare a $\angle QPM$.

c)
Il triangolo AQP è rettangolo ($\angle AQP = \angle AQM + \angle MQP = 30° + 60° = 90°$ [e quindi la relativa ampiezza sarà 30° + 60° = 90°]). Dunque una costruzione possibile per i punti M, Q e P sarebbe:
Si traccia una Circonferenza di centro M e raggio $\overline{MP}$ [MP] e di diametro $\overline{AP}$ [AP]. Si viene a formare un triangolo inscritto in una circonferenza con un lato che appartiene al diametro, che è ovviamente rettangolo in Q, quindi il limite di M su $\overline{AB}$ [AB] si raggiunge con M punto medio di $\overline{AB}$ [AB]. Così $\overline{MQ}$ [MQ] sarebbe mediana di $\overline{AB}$ [AB] [nel triangolo AQB] e per proprietà dei triangoli rettangoli, congruente alla sua metà.

d)
[[…]]

Ahmad, Alberto, Giorgia, Ilaria, Lorenzo, Lucia [mancano i cognomi], Classe 2B
Liceo Scientifico Tecnologico, I.I.S."A. Badoni", Lecco (LC)



a)

$A\hat{C}B$= 60° per ipotesi => $C\hat{A}B$= 30°

$AM \cong MQ$per ipotesi => $M\hat{A}Q \cong M\hat{Q}A$

$$M\hat{A}Q = 30° \quad => \quad M\hat{Q}A = 30°$$

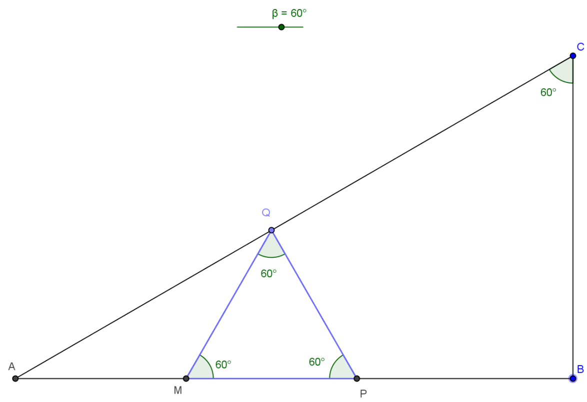
$Q\hat{M}P = 60°$ (per il teorema dell'angolo esterno)

$MQ \cong QP$ per ipotesi => $Q\hat{M}P \cong Q\hat{P}M$

$Q\hat{P}B \cong \hat{P} - Q\hat{P}M$ [$M\hat{P}B - Q\hat{P}M$] => $Q\hat{P}B = 180° - 60° = 120°$

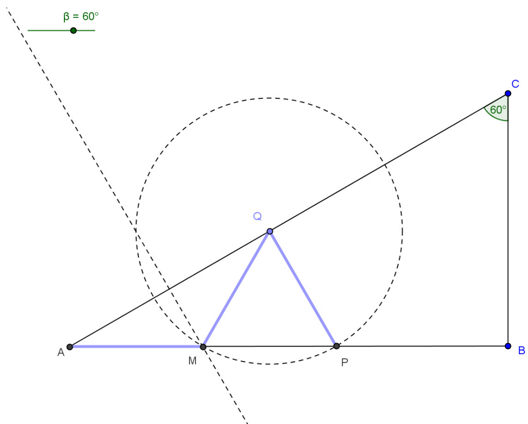
b)

$Q\hat{M}P \cong Q\hat{P}M = 60°$ per dimostrazione precedente => $QM \cong QP$, ma $QM \cong PM$ per costruzione [quale costruzione? Non c'è nelle ipotesi] => $PM \cong QP$ per transitività => Il triangolo MPQ è equilatero.

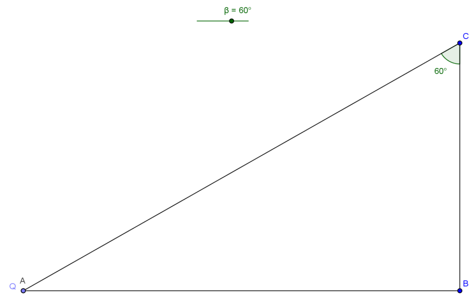


c)

1. preso un punto qualunque Q sull'ipotenusa AC;
2. tracciato l'asse del segmento AQ. L'asse del segmento interseca il lato AB in un punto che è il punto M richiesto. Infatti, applicando le proprietà dell'asse come luogo geometrico si ha $AM \cong MQ$;
3. costruito la circonferenza di raggio QM e con centro Q. La circonferenza interseca il lato AB in punto che chiamiamo P ($MQ \cong QP$). Per transitività $AM \cong QP$.

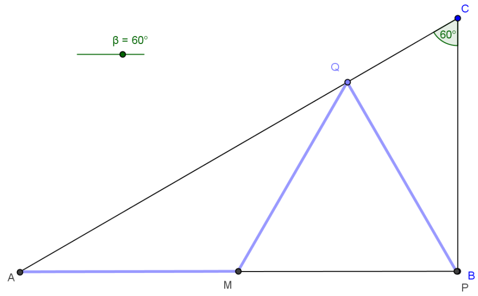


- Individuazione della posizione limite <u>da un punto di vista geometrico</u>
  Se $M \equiv A$ il triangolo PQM degenera in un punto.

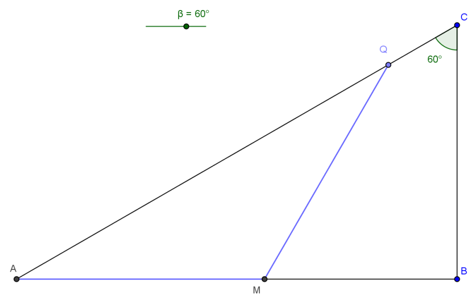


Se $AM + MP \leq AB$, poiché $AM \cong MP$ per dimostrazione precedente

=> $2AM \leq AB$ => $AM \leq \frac{AB}{2}$



Se $AM + MP > AB$ => $AM > \frac{AB}{2}$ => P non appartiene ad AB => la costruzione del triangolo PQM non è più possibile.



[Quindi la posizione limite di M su AB è …]

- Individuazione della posizione limite <u>da un punto di vista algebrico</u>

Posto $\overline{AC} = x$, poiché ABC è un triangolo con angoli di ampiezza pari a 30°, 60°, 90° rispettivamente, si ha $\overline{CB} = \frac{x}{2}$ ed $\overline{AB} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$. Se $P \equiv B$ allora M è punto medio di AB. Si avrà $\overline{AM} = \frac{AB}{2} = \frac{x}{4}\sqrt{3} = \overline{QP}$

d)
[[…]]

Davide Toschi, Classe 2G
Liceo Scientifico "L. Cremona", Milano (MI)

a)
Essendo MQP un triangolo isoscele, per le ampiezze degli angoli vale

QPB = 180° - QPM = 180° - QMP.

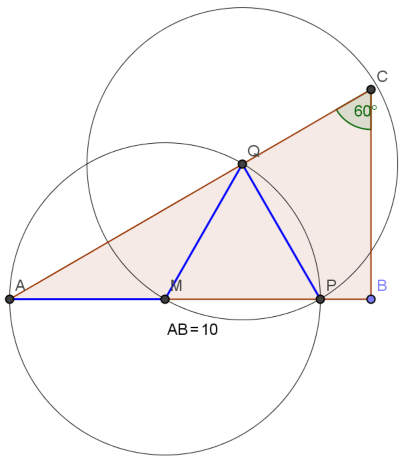
Essendo QMA un triangolo isoscele, per le ampiezze degli angoli vale

QMP = MAQ + MQA = 2 MAQ.

Ma MAQ = 90° - ACB = 30°, quindi QPB = 180° - 60° = 120°.

b)
Per quanto dimostrato in a) segue che l'ampiezza dell'angolo QPM = 180° - QPB = 60°.
Quindi il triangolo MPQ, isoscele per costruzione, è equilatero.

c)



Preso un punto M sul segmento AB, costruisco la circonferenza di centro M e raggio MA. L'intersezione, diversa da A, della circonferenza con il lato AC è il punto Q. Costruisco ora la circonferenza di centro Q e raggio QM. L'intersezione, diversa da M, con AB è il punto P. La posizione limite di M, affinché la costruzione sia possibile, si trova considerando P ≡ B. Per quanto dimostrato in b), per le lunghezze dei segmenti [segmenti] vale

$$AM_{lim} = M_{lim}B = AB/2.$$

Quindi la posizione limite di M su AB è il suo punto medio e la costruzione è possibile per M appartenente al segmento AM_{lim}.

d)
Poiché AMQ = 2α , a seconda del valore di α il punto P può appartenere al segmento AM o al suo prolungamento dalla parte di M. Suddivido la discussione nei due casi:
1) 0° < α ≤ 45° : in questo caso AP ≤ AM
2) 45° < α < 90° : in questo caso AP > AM.

1) Per qualunque posizione di M su AB, esiste sempre Q su AC poiche' [poiché] in questo caso AMQ ≤ 90° e anche nel caso limite M ≡ B il segmento MQ e' interno all'angolo retto ABC. Invece P esiste su AB soltanto se QP e' [è] interno all'angolo AQM, cioe' [cioè] se PQM ≤ AQM.
Considero il triangolo isoscele PQM: PQM = 180° - 2 AMQ = 180° - 4α.
Considero il triangolo isoscele AMQ: AQM = QAM = 90° - α.
Quindi P esiste soltanto se 180° - 4α ≤ 90° - α, da cui α ≥ 30°.
Ne segue che
- se α < 30° la costruzione non è mai possibile
- se 30° ≤ α ≤ 45° la costruzione è possibile per qualunque punto M del cateto AB.

2) In questo caso risulta sempre, per le ampiezze degli angoli,

$$QPM = QMP = 180° - QMA = 180° - 2\alpha < 90°.$$

Quindi nel caso limite P ≡ B, PQ e' [è] interno all'angolo retto ABC e Q esiste su AC. Quindi posso usare la posizione limite di P per determinare il valore limite di M.

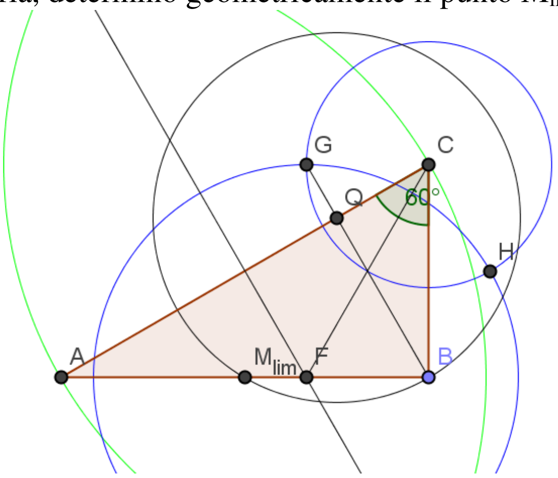
Considero il caso limite P ≡ B

Osservo che per la disuguaglianza triangolare, per le lunghezze dei segmenti vale

$$AB = AM + MB < AM + (MQ + QP)$$

da cui $AB < 3AM$ e $AM > AB/3$.

Quindi $AM \leq AB/3$ e [è] sicuramente condizione sufficiente per la costruzione. Volendo una condizione anche necessaria, determino geometricamente il punto M_{lim} .



Osservo che nel caso limite P ≡ B, per le ampiezze degli angoli vale

$$QPC = QBC = 90° - QPM = 90° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha - 90°$$

Per determinare $M_{lim,}$ (vedere figura) si costruisce l'asse dell'ipotenusa AC e si congiunge con il punto C la sua intersezione F con il cateto AB. Osservo che, per le ampiezze degli angoli vale

$$FCB = 90° - CFB = 90° - (180° - CFA) = 90° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha - 90°$$

Dunque l'angolo FCB e' conguente [è congruente] a QPC nel caso limite P ≡ B.

Trasporto quindi l'angolo FCB in B costruendo [costruendo] la diagonale GB del rettangolo FBCG. L'intersezione di GB con AC fornisce Q nel caso limite e M_{lim} si ottiene intersecando la circonferenza [circonferenza] di centro Q e raggio QB con il cateto AB.

Quindi, in questo secondo caso

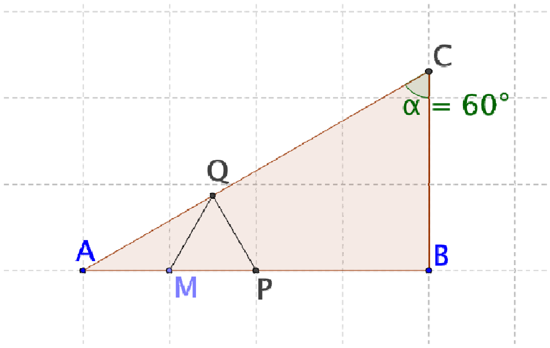
- se $45° < \alpha < 90°$ la costruzione è possibile per qualunque punto M tale che $AM \leq AM_{lim}$, con $AM_{lim} > AB/3$.

Riassumendo la discussione:

- se $\alpha < 30°$ la costruzione non è mai possibile
- se $30° \leq \alpha \leq 45°$ la costruzione è possibile per qualunque punto M del cateto AB
- se $45° < \alpha < 90°$ la costruzione è possibile per qualunque punto M tale che $AM \leq AM_{lim}$, dove e M_{lim} si puo' [può] determinare con la costruzione mostrata e $AM_{lim} > AB/3$.

Edoardo Maria Leonardi, Classe 2
Liceo Scientifico "Virgilio", Roma (RM)

a)



L'angolo $\angle CAB$ è [ha ampiezza] uguale a 30°, dato che α = 60° e che $\angle ABC$ è di [ha ampiezza] 90°. Essendo il segmento AM uguale a MQ per ipotesi, l'angolo $\angle QAM$ è uguale a $\angle AQM$. Quindi, per differenza,[l'ampiezza di] $\angle AMQ = 120°$. Allora [l'ampiezza di] $\angle QMP = 180° - 120° = 60°$. Essendo $MQ = QP$ per ipotesi, $\angle QMP = \angle QPM = 60°$. Allora l'angolo $\angle QPB = 180° - 60° = 120°$.

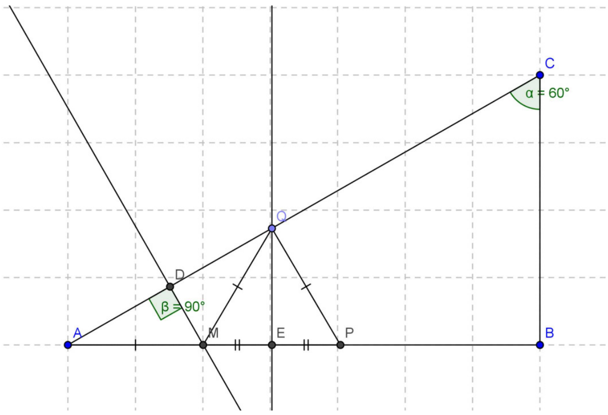
b)
Il triangolo MQP è equilatero perché, per differenza, anche l'angolo $\angle MQP$ è [ha ampiezza] uguale a 60°.

c)
Per effettuare una costruzione del triangolo MQP, bisogna prendere un punto M qualunque sul segmento compreso tra il punto A e il punto medio di AB. Si punta quindi con il compasso su M con apertura AM, disegnando un arco di circonferenza che interseca il lato AC nel punto Q. Si punta quindi in Q con apertura MQ e si descrive un arco che interseca il segmento AB nel punto P. Unendo M, P e Q si ha il triangolo richiesto. Quindi la posizione limite di M su AB è il punto medio del lato AB, in quanto essendo $AM = MQ$ e $MQ = MP$, si ha che $AM = MP$ e quindi il massimo valore assunto dai segmenti AM e MP è $\frac{AB}{2}$.
d)
[[…]]
Adriano Chialastri, Classe 2E
Liceo Scientifico "B. Russell", Roma (RM)

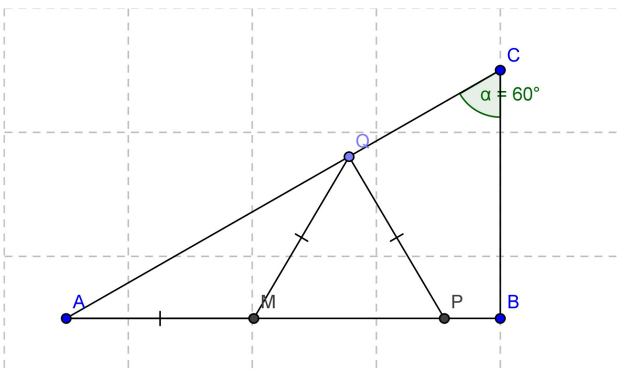
a)
Sapendo che ∠ACB = α, che [l'ampiezza di] ∠ABC = 90° e che la somma [delle ampiezzer] degli angoli interni di un triangolo è di 180°, si avrà che [l'ampiezza di] ∠BAC = 180° - 90° - α = 90°-α
[ampiezza di] ∠BAC = 90° - α
Per ipotesi sappiamo che AM = MQ, quindi il triangolo AMQ è isoscele.
Se AMQ è isoscele allora ∠MAQ e ∠MQA sono congruenti (per teorema inverso del triangolo isoscele).
Visto che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°e che [l'ampiezza di] ∠BAC=90°-α,
[ampiezza di] ∠AMQ = 180° - 2(90° - α) = 180°- 180° + 2α = 2α
[ampiezza di] ∠QMP = 180° - [ampiezza di] ∠AMQ (angolo supplementare) = 180° - 2α = 180° - 2(60°) =180° - 120°= 60°
Per ipotesi sappiamo inoltre che MQ = QP, quindi il triangolo QMP è isoscele.
Se QMP è isoscele allora ∠QMP e ∠QPM sono congruenti (per teorema inverso del triangolo isoscele).
Se [ampiezza di]∠QMP = 60° e ∠QMP=∠QPM, allora [ampiezza di]∠QPM = 60°.
Se [ampiezza di]∠QPM = 60°, allora [ampiezza di]∠QPB = 180° - 60° (angolo supplementare) =120°

b)
Sapendo [ampiezza di]∠QMP = [ampiezza di]∠QPM = 60° e che QM = QP (per ipotesi), si avrà che il triangolo MPQ non solo e [è] isoscele, ma anche equilatero (angolo alla base [di ampiezza] = = 60°).

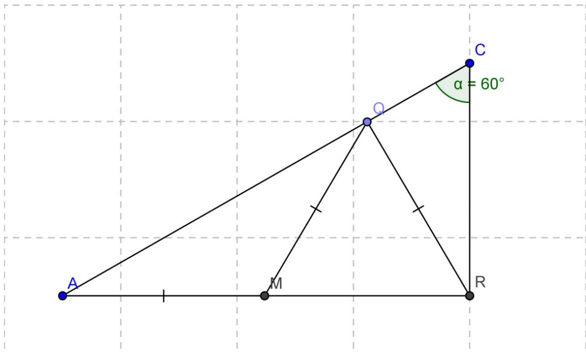
c)



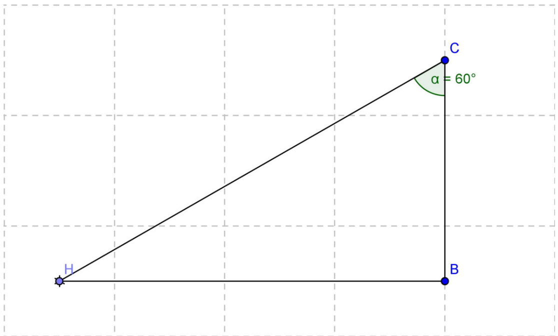
Prendo un punto Q qualsiasi [? *Occorre fare qualche precisazione*] su AC. Trovo il punto medio D del segmento AQ. Traccio la perpendicolare di [ad] AQ nel punto D, così individuo il punto di intersezione M tra la perpendicolare ed il cateto AB. Traccio poi il segmento MQ. Traccio la perpendicolare di AB passante per Q e indico come E il punto di intersezione tra AB e la perpendicolare. Trovo dunque il punto simmetrico di M rispetto alla suddetta perpendicolare che indico come P. I segmenti AM, MQ e QP sono dunque congruenti.
AD = DQ, DM = DM ed ∠ADM=∠QDM, quindi il triangolo ADM ed il triangolo QDM sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli. Quindi AM = MQ.
ME = EP, QE = QE e ∠QEM = QEP, quindi il triangolo QEM ed il triangolo QEP sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli. Quindi MQ = QP.
Se AM = MQ e MQ = QP, allora AM = QP per [la] proprietà transitiva [della relazione di uguaglianza] e quindi AM = MQ = QP.



Pur muovendo il punto Q sul segmento AC sono comunque valide le dimostrazioni precedenti [Geogebra (come del resto Cabri) non fa dimostrazioni] poiché tutti gli angoli rimangono invariati.



Si individua come prima posizione limite quella in cui P coincide con B (punto indicato come R). Si può notare inoltre che AM = MR. Il triangolo QMR è equilatero per dimostrazione 2 [quanto visto in b)] (quindi QM = MR) e AM = QM per ipotesi. Quindi, se MR = QM e QM = AM, AM = MR per [la] proprietà transitiva [della relazione di uguaglianza]. Da ciò se ne deduce che in questa situazione M è punto medio di AR.
Anche in questa dimostrazione si mantengono valide le dimostrazioni per le medesime ragioni dell'esempio precedente […].

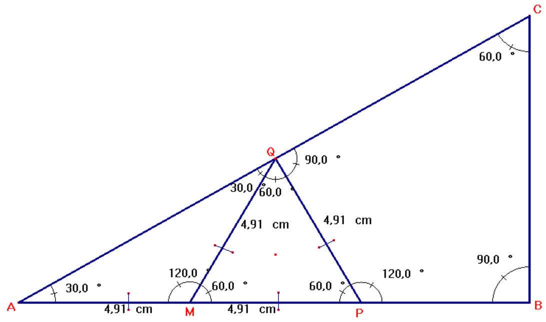


Si individua come seconda posizione limite quella in cui Q, M, P ed A si trovano a coincidere in un unico punto (indicato come H). In questo caso i segmenti AM, MQ e QP vengono a coincidere in H e quindi le dimostrazioni precedenti vengono meno.

d)
[[…]]

Angela Giulia Piccolo, Classe 2B
Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta (BA)

a, b)



Dato ABC triangolo rettangolo in $\hat{B}$ [B]: [ampiezza di]A$\hat{C}$B = 60°; A$\hat{B}$C retto; [ampiezza di]C$\hat{A}$B = 30°.

[ampiezza di]A$\hat{Q}$M = [ampiezza di]M$\hat{A}$Q = 30° perché AMQ triangolo isoscele per ipotesi.

Q$\hat{M}$A è supplementare della somma degli angoli Q$\hat{A}$M ∧ [e] A$\hat{Q}$M.

[ampiezza di]Q$\hat{A}$M + [ampiezza di]A$\hat{Q}$M = 60° → [ampiezza di]Q$\hat{M}$A = 120°.

Considero MPQ triangolo: Q$\hat{M}$P = Q$\hat{P}$M perché triangolo isoscele per ipotesi.

[ampiezza di]Q$\widehat{M}$P = [ampiezza di]Q$\hat{P}$M = 60° perché angolo supplementare a Q$\hat{M}$A [di ampiezza] = 120°.

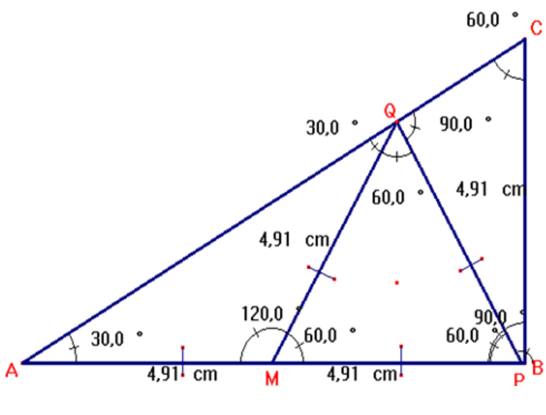
Poiché la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un triangolo è uguale a π [180°], [ampiezza di]M$\hat{Q}$P = 60° → il triangolo è equilatero.

[ampiezza di]Q$\hat{P}$B = 120° perché supplementare di M$\hat{P}$Q.

[ampiezza di]C$\hat{Q}$P = 90° perché supplementare della somma di A$\hat{Q}$M + M$\hat{Q}$P = 90°.

c)

Ecco una costruzione dei punti M, P, Q, in cui P≡B. [*La costruzione deve essere giustificata*]



La posizione limite di M su AB è quella rappresentata in figura:

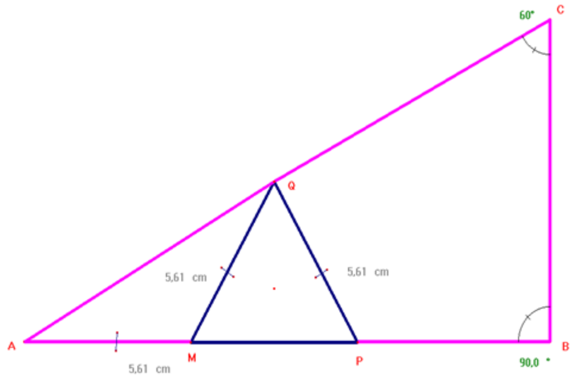
AM ≅ MP ≅ MQ ≅ QP, P ≡ B.
Notiamo come nei triangoli rettangoli la mediana relativa all'ipotenusa coincide sempre con la metà di essa. M punto medio di AB, B ≡ P.

d)

[[…]]

Adriana Loiodice, Classe 2B
Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta (BA)

a, b)



Considero il triangolo ABC rettangolo in B per ipotesi: [ampiezza di]$C\hat{A}B$ = 30° poiché la somma degli angoli interni di un triangolo = 180° (*per il corollario del II teorema dell'angolo esterno*). Considero il triangolo $A\hat{M}Q$ [AMQ] isoscele sulla base AQ: [ampiezza di]$A\hat{Q}M$ = [ampiezza di]$C\hat{A}B$ = 30° per il teorema inverso del triangolo isoscele; [ampiezza di]$A\hat{M}Q$ = 120° per il corollario del II teorema dell'angolo esterno.
Considero ora il triangolo MQP isoscele sulla base MP : [ampiezza di]$Q\hat{M}P$ = 60° perché adiacente all'angolo $A\hat{M}Q$; [ampiezza di]$Q\hat{P}M$ = [ampiezza di]$Q\hat{M}P$ = 60° per il teorema inverso del triangolo isoscele; [ampiezza di]$M\hat{Q}P$ = 60° per il corollario del II teorema dell'angolo esterno. **Il triangolo MQP è** quindi **equilatero** poiché isoscele su ciascun lato. [ampiezza di]$Q\hat{P}B$ **= 120°** perché adiacente a $Q\hat{P}M$ [di ampiezza]= 60° per dimostrazione.

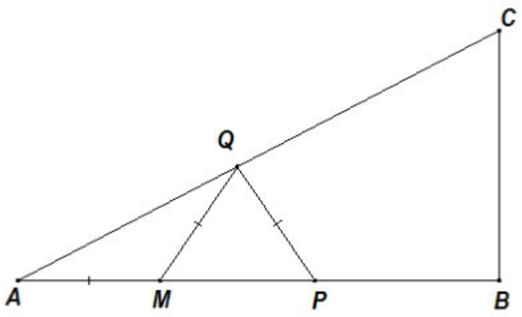
c)

[[…]]

d)

[[…]]

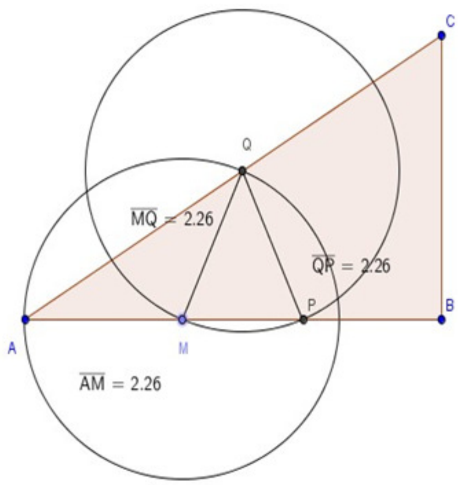
Andrea Savorelli, Classe 3I
Scuola Media "G.B. Tiepolo", Milano (MI)



a, b)

$\widehat{A} = 30°$	perché complementare di $\widehat{C}$
$A\widehat{Q}M = 30°$	il triangolo AQM è isoscele e $AM \cong MQ$ per ipotesi
$Q\widehat{M}A = 120°$	perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°
$Q\widehat{M}P = 60°$	perché supplementare di $A\widehat{M}Q$
$M\widehat{P}Q = 60°$	il triangolo MPQ è isoscele $QM \cong QP$
$Q\widehat{P}B = 120°$	perché supplementare di $M\widehat{P}Q$
$M\widehat{Q}P = 60°$	perché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°
MQP	Il triangolo è equilatero perché ha tre angoli congruenti

c)



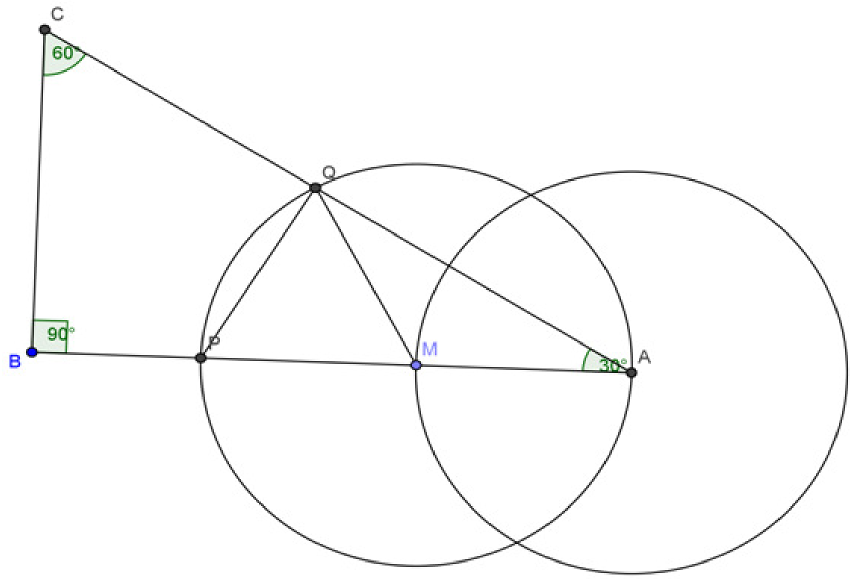
- Trovo su AB un punto **M** che deve essere compreso tra A e il punto medio di AB
- Con centro in M e raggio AM traccio una semicirconferenza; l'intersezione tra questa e l'ipotenusa è il punto **Q**
- Con centro in Q e raggio uguale ad AM traccio un semicirconferenza; il punto d'incontro con il cateto AB è il punto **P**

d)
[[…]]

Arianna Tavano, Classe 3B
Scuola Media "Dimesse", Udine (UD)

a)
<QPB misura 120° perché:
<CAB misura 30° e dato che AM e MQ sono uguali, allora [l'ampiezza di]<AQM = 30° e [l'ampiezza di]<AMQ = 180° - (30° + 30°) = 120°. Per trovare [l'ampiezza di]<QMP devo fare 180° – 120° = 60°, quindi il triangolo QMP è equilatero (vedi punto b). [l'ampiezza di]<QPB = 180° – 60° = 120°.

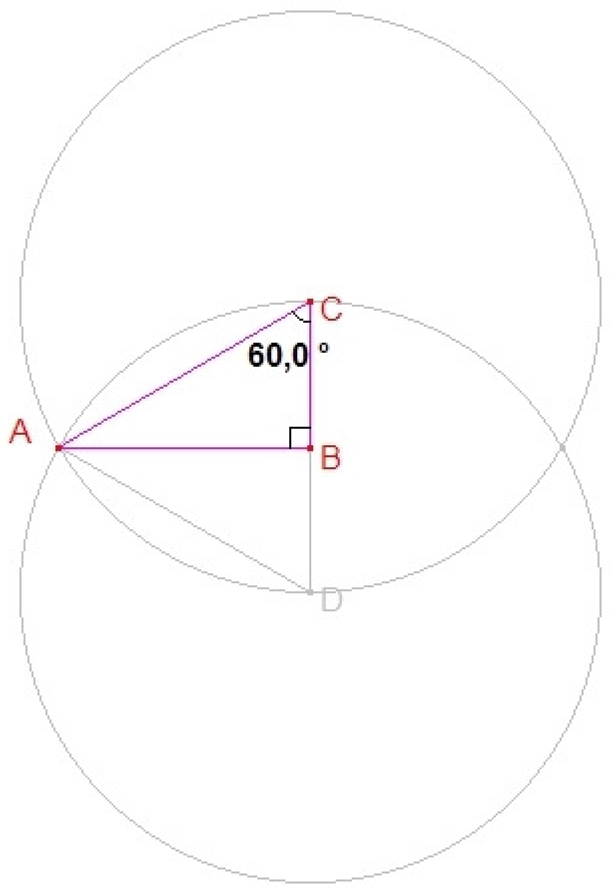
b)
MPQ è un triangolo isoscele per costruzione e uno degli angoli alla base è di [ha ampiezza pari a] 60°.
Costruzione:
punto il compasso in A con apertura qualsiasi [non qualsiasi perché M e P devono appartenere ad AB] e segno il punto M. Siccome PM e MA devono essere uguali, riporto la misura di MA puntando il compasso in M con apertura MA. L' intersezione tra quest'ultima circonferenza e il segmento AC dà origine al punto Q e quella con il segmento AB dà origina [origine] al punto P.



c)
La posizione limite di M su AB è il punto medio del segmento AB [perché?].

d)
[[…]]

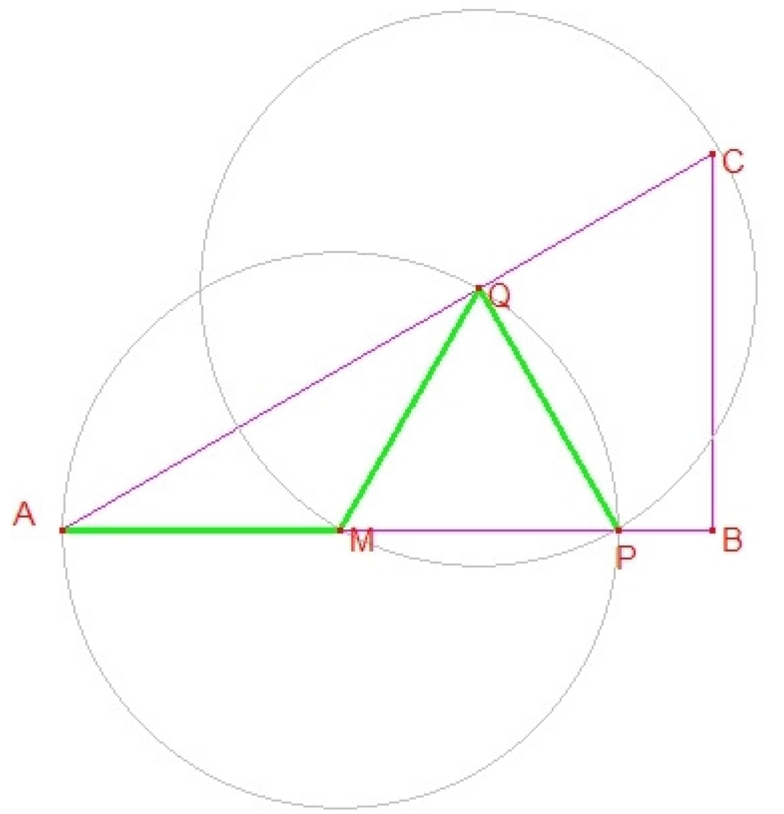
Classe 3F
Scuola Media “Brofferio”, Asti (AT)
(risoluzione con delle prove alla LIM; docente: prof.ssa Cinzia Chelo)

Costruzione di un triangolo rettangolo con un angolo acuto di 60° 1) costruiamo il triangolo equilatero ACD di lato CD 2) segnamo [segniamo] il punto medio di CD e lo chiamiamo B; AB è anche altezza e pertanto abbiamo fatto costruire a Cabri il triangolo ACB rispondente ai requisiti del problema	

Costruiamo la situazione del problema

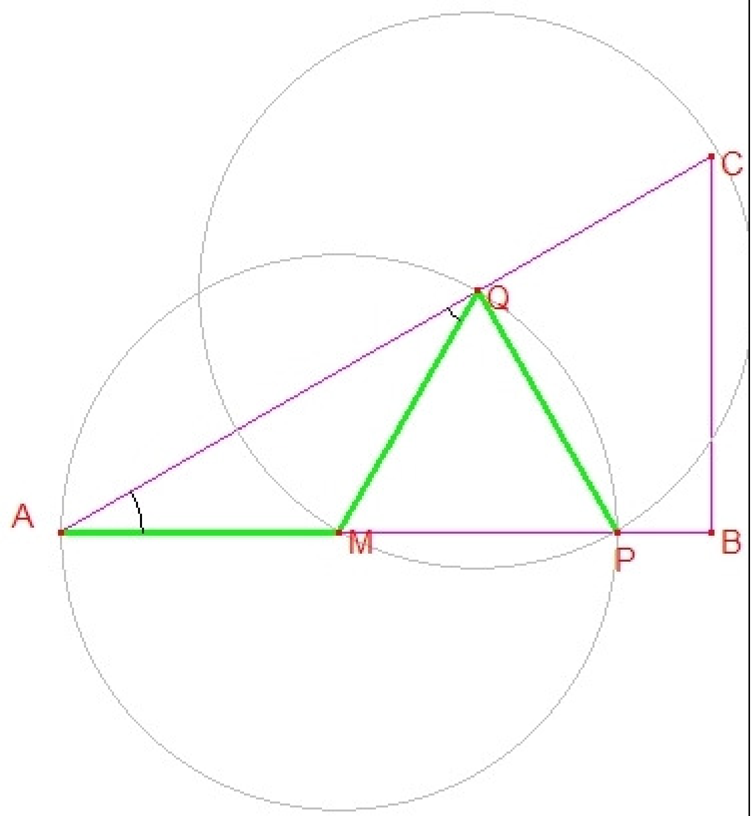
1) dopo aver letto con molta attenzione e più volte il testo e dopo aver fatto più prove,
decidiamo di partire dal punto M (punto semilibero appaertenente [appartenente] al lato AB)
2) disegnamo [disegniamo] due circonferenze (di centri rispettivamente M e Q)
per garantire AM=MQ=QP

Osservazioni:
- P sembra l'intersezione delle due circonferenze... chissà se è vero...
- trascinando M sul segmento AB vediamo subito che, ad un certo punto, QP sparisce...

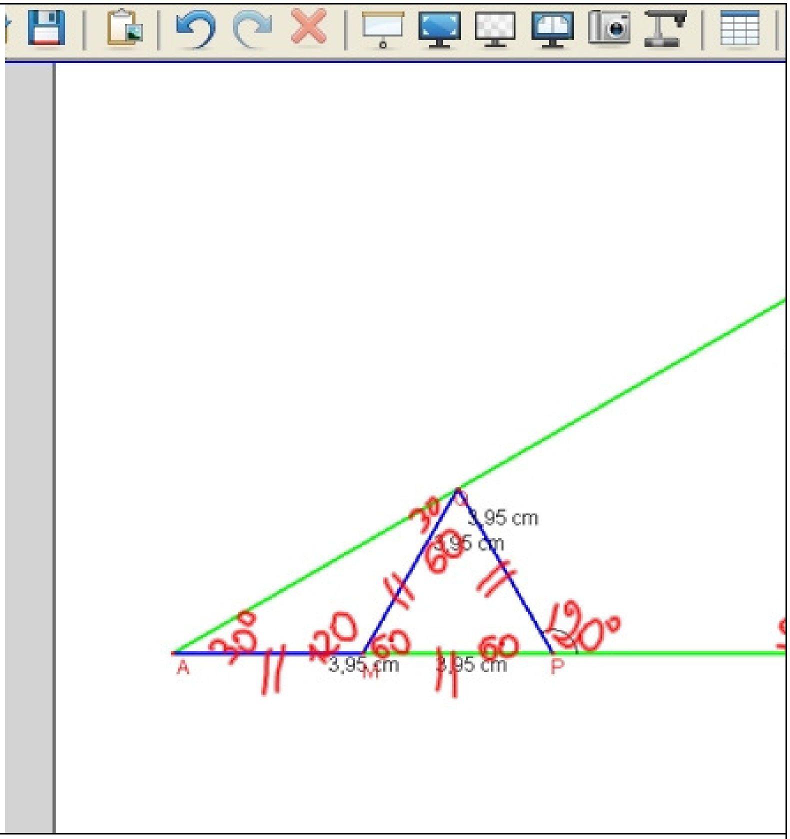


a) Determinare l'ampiezza dell'angolo QPB

Ci sembra abbastanza facile, basta sapere che la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°.
Abbiamo fatto dei ragionamenti e delle prove alla LIM
Infatti:
CAB = 30° perché complementare di ACB (=60°)
AQM = QAM = 30° perché abbiamo costruito AM = MQ
AMQ = 180° - (2· 30°) = 120°
QMP = 180° - 120° = 60° perché adiacente a AMQ
MPQ = 60° perché abbiamo costruito MQ = QP
E finalmente
QBP = 120° perché adiacente a MPQ



Le nostre prove alla LIM



b) di che natura è il triangolo MPQ?

intanto sappiamo che è isoscele
guardiamo un po' meglio…
ma certo!
è equilatero perché ha gli angoli alla base di 60° e quindi anche l'angolo al vertice misura 60°
Che facile!