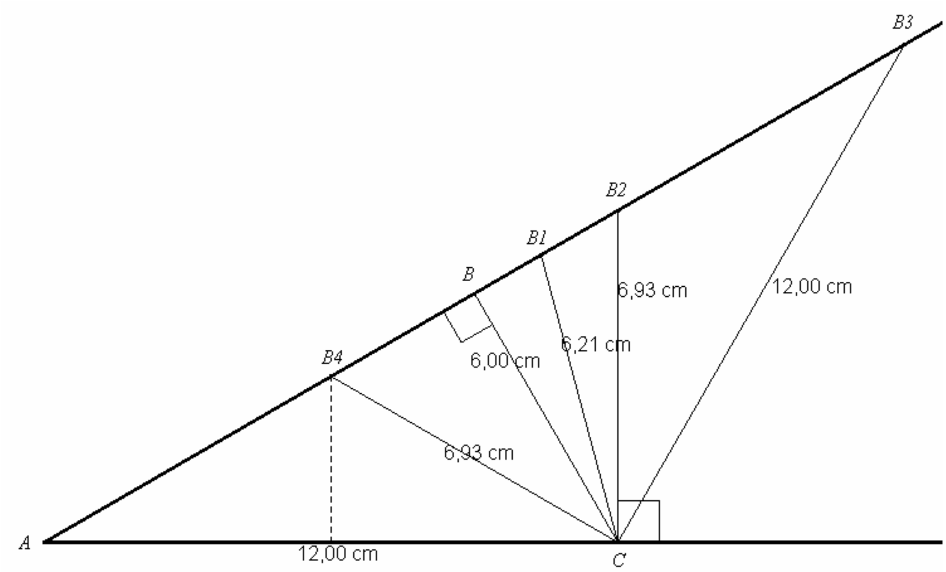
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia 14-28 Marzo 2011

Il testo del problema:
Siano date due semirette di origine A formanti un angolo di ampiezza 30°. Su una di esse è fissato il punto C tale che il segmento AC misuri 12 cm.
Sia B un punto variabile sulla seconda semiretta.
Indicata con k la misura del segmento BC, determinare gli eventuali valori di k per i quali:
a) esistono due e soltanto due triangoli ABC;
b) esiste un unico triangolo ABC.
Descrivere inoltre, tra i triangoli così costruibili, quelli isosceli e quelli rettangoli.



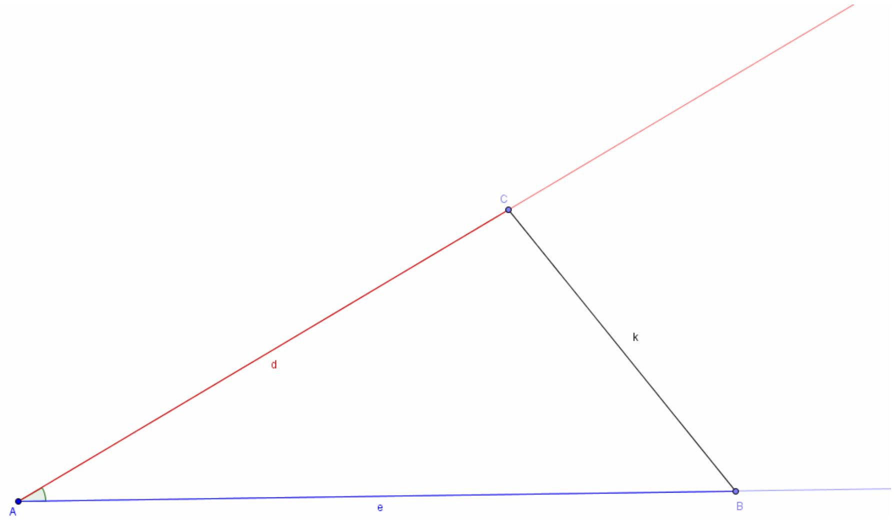
Commento
Sono giunte quattro risposte, tutte da classi seconde di tre diversi Licei Scientifici. Il problema sembrava particolarmente adatto a una fase preliminare di "esplorazione" con un software di Geometria Dinamica. Esso poneva inizialmente due quesiti che riguardavano la stessa figura: nel primo si chiedeva di stabilire per quali valori della lunghezza di un certo segmento esistessero esattamente due triangoli verificanti le condizioni poste dal problema; nel secondo la stessa richiesta riguardava il caso in cui un solo triangolo era costruibile. Infine si chiedeva di discutere quali tra i triangoli così costruiti risultassero isosceli o rettangoli.
Due delle risposte accettate risolvono il problema in tutte le sue parti in modo sostanzialmente corretto (salvo alcune imprecisioni). Nell'altra risposta sono invece presenti alcuni errori e imprecisioni e un uso spesso troppo "disinvolto" dei simboli. Dobbiamo ancora una volta ribadire la necessità di distinguere tra un ente geometrico e la sua misura.
Infine non abbiamo accettato la risposta in cui la soluzione del problema era inserita all'interno del file contenente la figura, in quanto risulta poi impossibile utilizzare tale file per la pubblicazione in rete.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS “C. Cafiero”, Barletta (BA)
LS “G. Alessi”, Perugia (PG)
LS “Don Milani”, Montichiari (BS)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Nicola Rizzi, Classe 2D
Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta (BA)



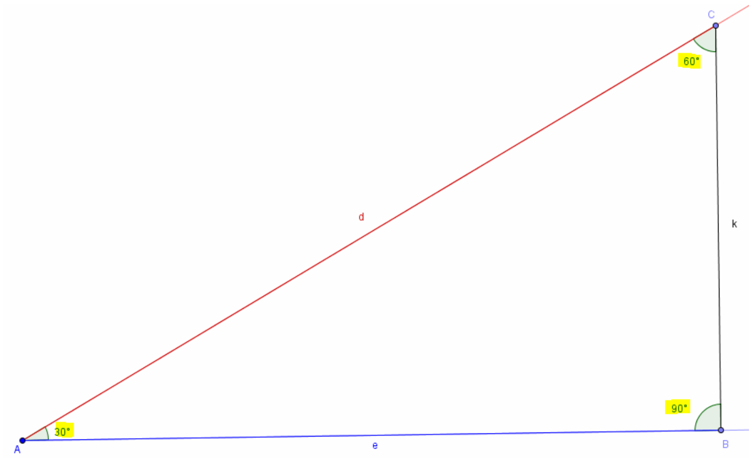
a)
Devo calcolare un valore di k per cui esistono solo due triangoli ABC.

Bisogna premettere che k ≠ 0 [k > 0] in ogni caso, infatti k è [la lunghezza di] un segmento che indica la distanza tra il punto C e [un generico punto della] semiretta che contiene AB, pertanto la distanza minima tra un punto esterno e una semiretta si ha quando tale distanza [segmento] è ⊥

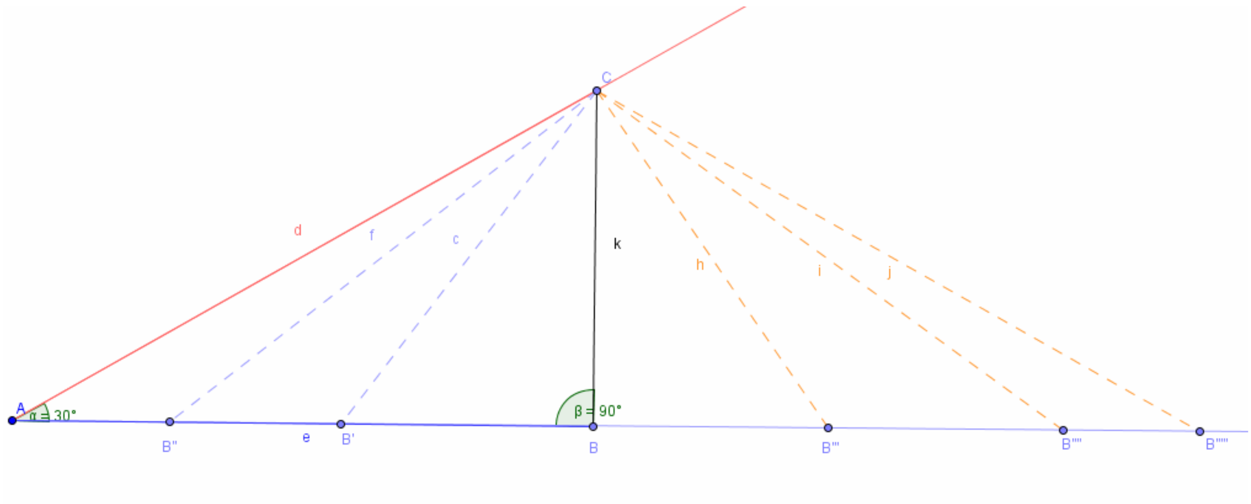
[perpendicolare] alla semiretta stessa. In tal caso si ha CBA = 90°, ma BAC = 30° per ipotesi ⇒

ACB = 60° ⇒ ABC, rettangolo in B, è un particolare triangolo rettangolo che ha il cateto adiacente

all'angolo di 60° (nel nostro caso [di lunghezza] k) congruente alla metà dell'ipotenusa (AC) ⇒ k = 6. Per concludere [affinché esista il triangolo ABC dev'essere] **k ≥ 6**



È possibile subito notare che all'aumentare dell'ampiezza di CBA, anche il valore di k aumenta fino a che B ≡ A, quando ciò accade non esiste il triangolo ABC ⇒ per CBA > 90°, 6 < k < 12



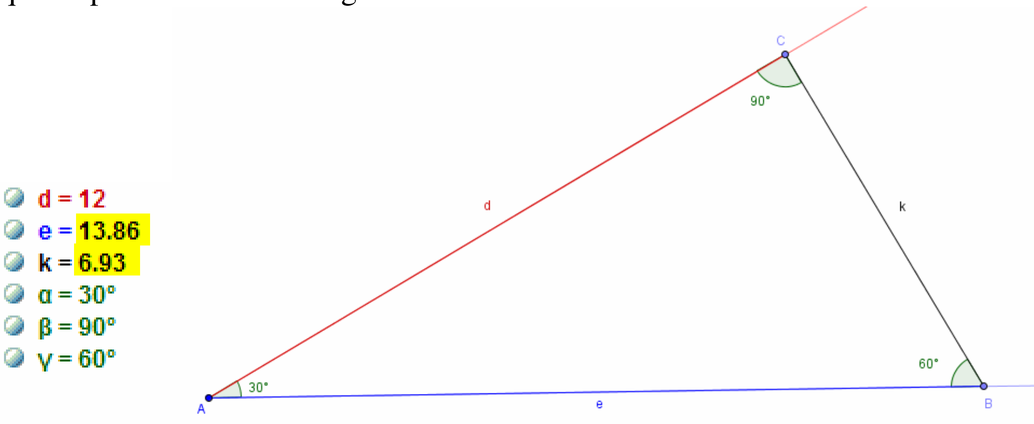
Quando invece CBA < 90°, quindi il punto B si sposta verso destra [si trova a una distanza da A maggiore rispetto al piede della perpendicolare, è sempre possibile individuare [[un punto B ⇒ per

CBA < 90°, ∃k ∀B]] [un corrispondente valore di k].

Possiamo dedurre che **esiste un triangolo ABC per [avente] CBA < 90° ∧ uno per [avente] CBA > 90° per 6 < k < 12.**

b) Dal precedente ragionamento è possibile dedurre che **esiste un solo triangolo ABC per k = 6**, in quanto la perpendicolare condotta da un punto esterno a una (semi)retta è unica, **e per k ≥ 12.**

Per quando riguarda i casi in cui ABC è rettangolo un caso è stato già analizzato in precedenza, quindi per k = 6. Però bisogna anche considerare il caso in cui ACB sia retto.



In tal caso otteniamo ancora un triangolo con gli angoli di 30°, 60°, 90°:

AC = $\frac{\sqrt{3}}{2}$AB

AB = $\frac{2}{\sqrt{3}}$AC = $\frac{24}{\sqrt{3}}$ ≅ 13.86 cm

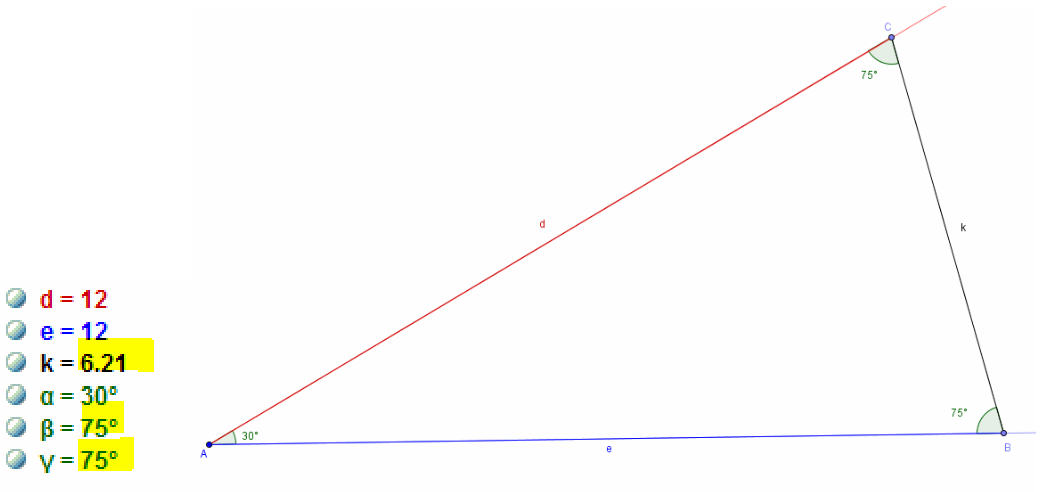
k = AB/2 = 6.93 cm

Per quanto riguarda i casi in cui ABC è isoscele dobbiamo distinguere il caso in cui k = 12, in cui

AB ≅ AC [BC ≅ AC] e il caso in cui AB ≅ k [AB ≅ BC] [e il caso in cui AB ≅ AC].

Per calcolare k se AB ≅ AC bisogna servirsi di un programma di disegno geometrico [che fornisca

il valore approssimato della lunghezza di un segmento].



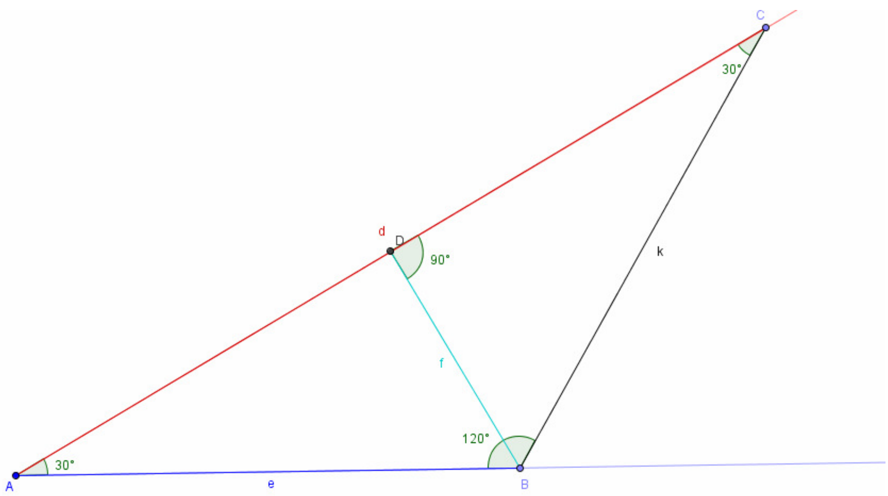
Otteniamo k = 6,21 cm

Per calcolare k se AB ≅ k [AB ≅ BC] tracciamo l’altezza BD relativa al lato AC. I due triangoli

rettangoli che si sono venuti a formare godono delle proprietà dei triangoli [hanno angoli di ampiezze] di 30°, 60°, 90°:

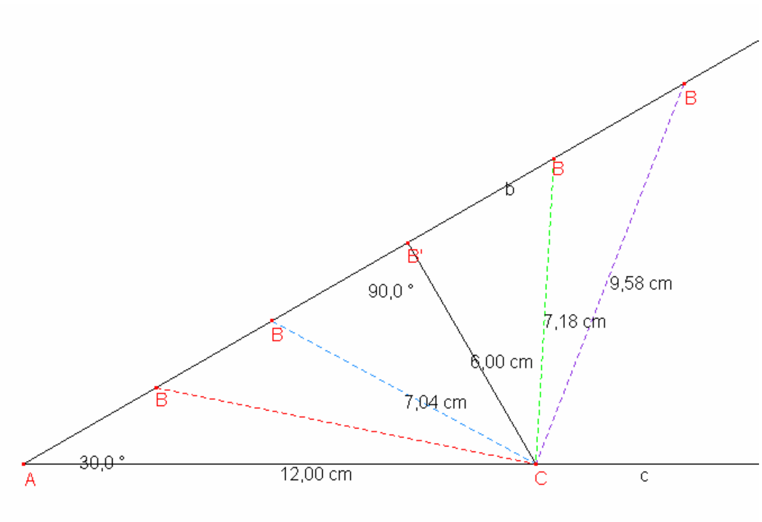
DC = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ k [$\overline{DC} = 6$ cm]

k = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ DC = $\frac{12}{\sqrt{3}} \cong 6{,}93$ cm

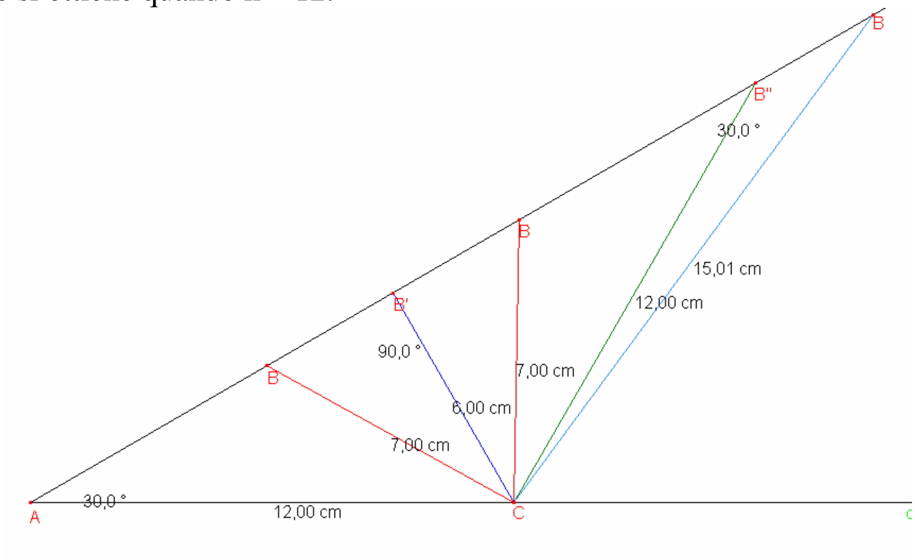


Valentina Dipace, Classe 2D
Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta (BA)

Facendo muovere il punto B sulla semiretta b, si osserva che: chiamando k la misura del segmento BC, il minimo valore di k si ottiene quando BC è perpendicolare alla semiretta b. In questo caso il valore di k = 6. Chiamiamo B' tale punto .



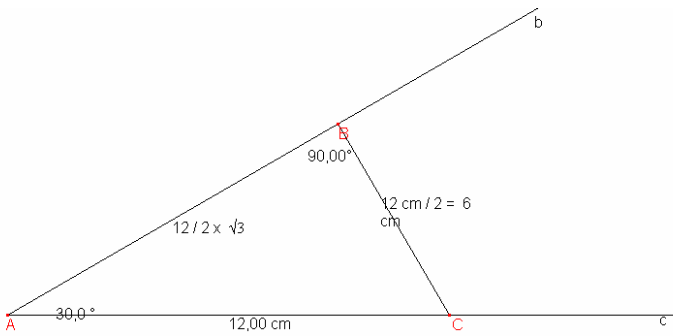
Quando il punto B si trova a coincidere con A, il triangolo ABC non esiste. Riportiamo nella figura il punto B" che si ottiene quando k = 12.

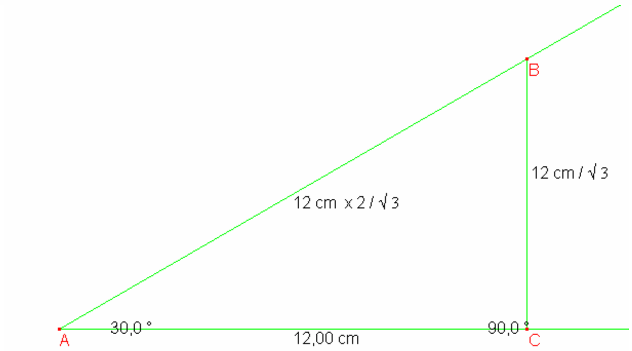


Dalla figura precedente si evince che:

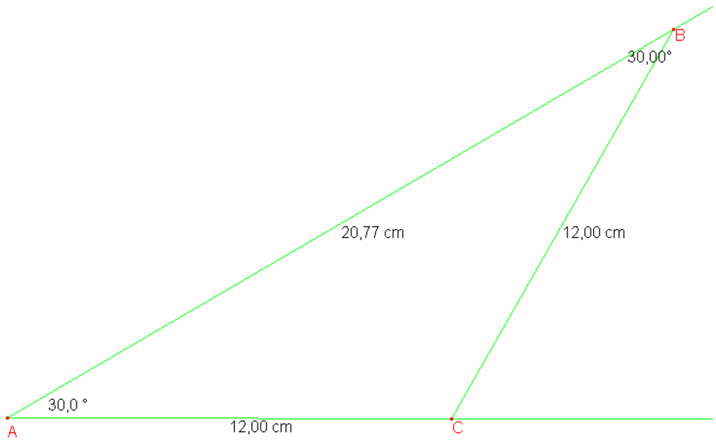
a) Partendo dal punto B', facendo muovere il punto B in modo [da posizionarlo in punti] equidistante e simmetrico rispetto a B', si ottengono valori uguali di k [perché?], che crescono muovendosi da B' verso A e da B' verso B". Possiamo concludere quindi che si ottengono due e due soli triangoli ABC per $6 < k < 12$.
b) Per $k = 6$ V [o] $k \geq 12$ esiste un solo triangolo ABC

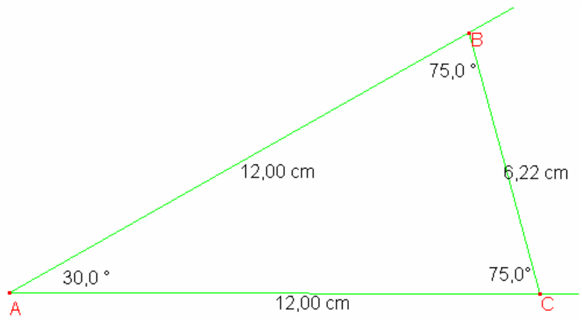
Le figure che seguono evidenziano i possibili triangoli rettangoli: con angolo retto in B in un caso e in C nell'altro caso.

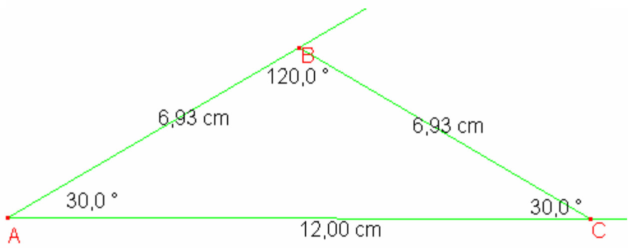




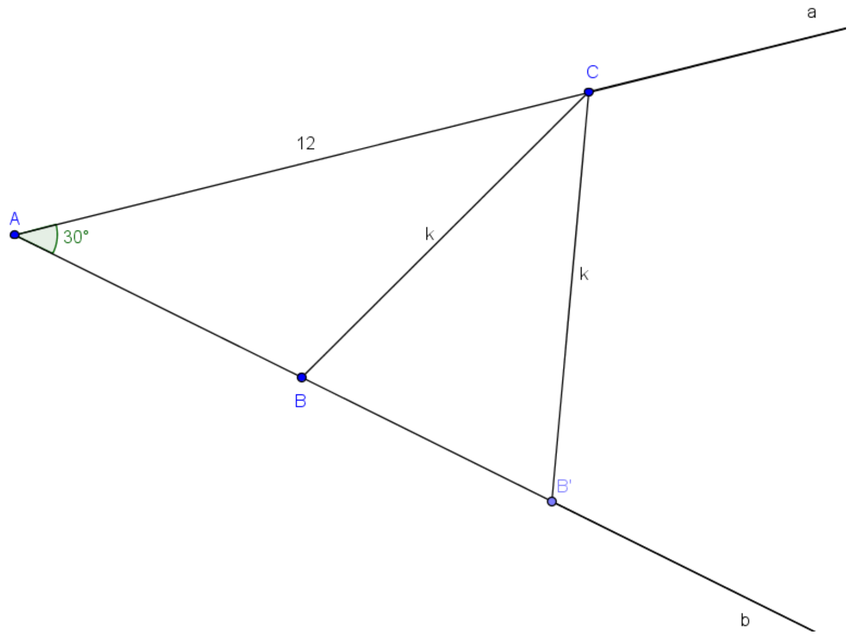
Esistono 3 diversi tipi di triangoli isosceli: quando AC = CB o AC = AB o AB = CB come dimostrano [illustrano] le figure.







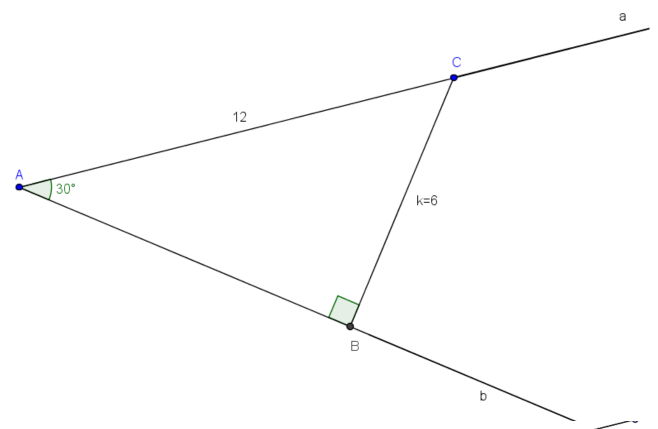
Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 2B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

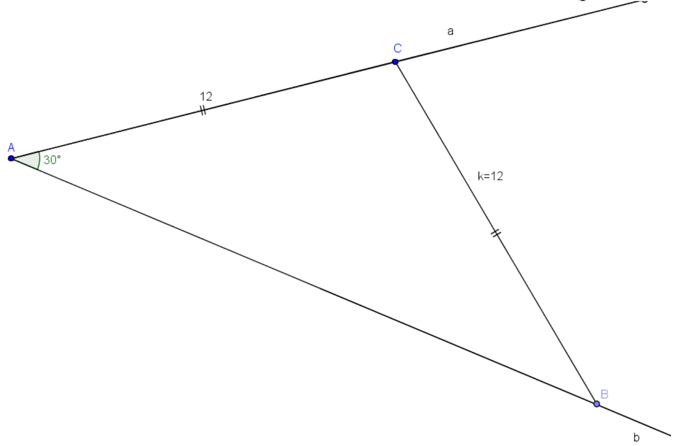


Tracciando una circonferenza di centro C e di raggio k, esiste un triangolo ABC per ogni intersezione della circonferenza con la semiretta b. Poiché una circonferenza può intersecare una retta al massimo in due punti, per ogni singolo valore di k possono esistere al massimo due triangoli ABC.
Se tale circonferenza è tangente alla semiretta b, esiste un solo punto di intersezione e, quindi, un solo triangolo ABC in cui $\overline{BC} \perp b$. In questo caso l'angolo $A\hat{C}B = 180° - 90° - 30° = 60°$, cioè il triangolo ABC sarebbe metà di un triangolo equilatero e $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2}\left[\frac{\overline{AC}}{2}\right] = \frac{12}{2} = 6\,cm$.
Perciò per k = 6 esiste un solo triangolo ABC rettangolo in B.
Allora se k < 6 la sopracitata circonferenza non interseca la semiretta b e non esiste nessun triangolo ABC.
Se k > 12 il raggio $\overline{BC}$ della circonferenza è : $\overline{BC} > \overline{AC}$, quindi A è un punto interno alla circonferenza, la quale interseca la semiretta b in un solo punto B; allora per k > 12 esiste uno e un solo triangolo ABC.
Se k = 12 la circonferenza interseca la semiretta b in un punto B che coincide con il punto A (poiché $\overline{AC} \cong \overline{BC}$) e in un punto B' diverso dal punto A. Quindi, poiché un triangolo non può avere due vertici coincidenti, per k = 12 esiste un solo triangolo AB'C e tale triangolo è isoscele, perché $\overline{AC} \cong \overline{BC} = k = 12$.
Per riassumere :

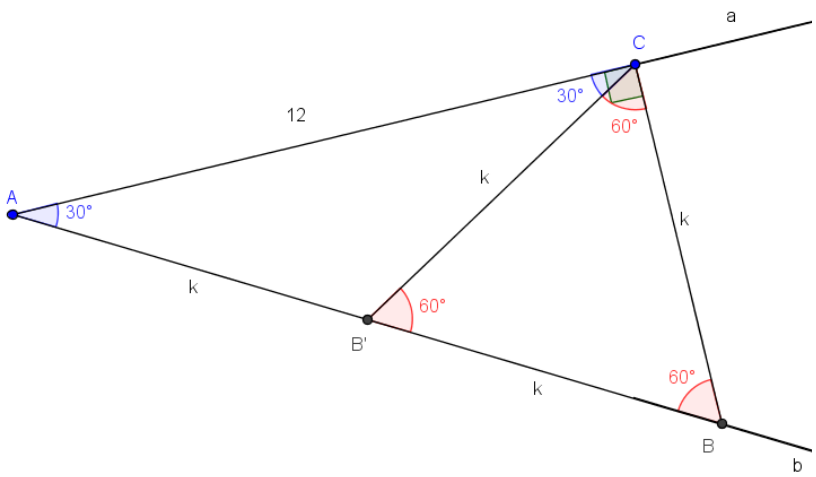
- Se k < 6 non esiste nessun triangolo ABC;
- Se $k = 6 \vee k \geq 12$ esiste un solo triangolo ABC;
- Se $6 < k < 12$ esistono due e soltanto due triangoli ABC.

Per dimostrazione precedente il triangolo ABC è rettangolo per k = 6 e isoscele per k = 12 (vedi figure seguenti).





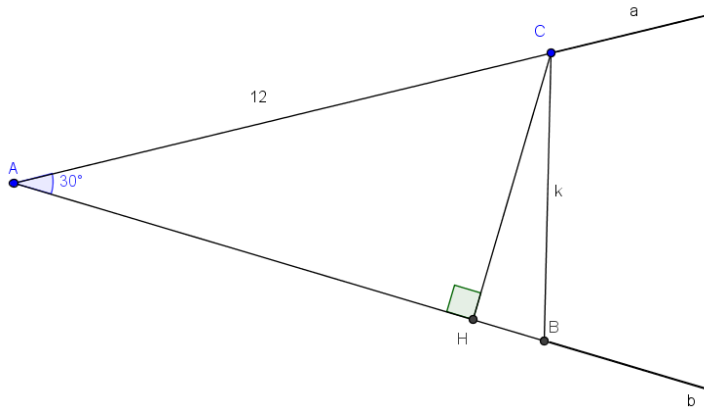
Osserviamo ora la figura seguente :



Il triangolo ABC è rettangolo anche se l'angolo $A\hat{C}B = 90°$, di conseguenza $C\hat{B}A = 60°$.
Per la proprietà caratteristica dei triangoli rettangoli, chiamata $\overline{B'C}$ la mediana relativa all' ipotenusa $\overline{AB}$, si ha che $\overline{AB'} \cong \overline{B'B} \cong \overline{CB'}$.
Poiché il triangolo CBB' è un triangolo isoscele e l'angolo $B'\hat{B}C = 60°$, allora il triangolo CBB' è, in realtà, un triangolo equilatero e $\overline{BC} \cong \overline{CB'} \cong \overline{BB'} \cong \overline{B'A} = k$.
Inoltre il triangolo AB'C è isoscele.
Applicando il teorema di Pitagora sul triangolo ABC :

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 \rightarrow 12^2 + k^2 = (2k)^2 \rightarrow 144 + k^2 = 4k^2 \rightarrow 3k^2 = 144 \rightarrow k = \sqrt{\frac{144}{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Quindi se $k = 4\sqrt{3}$ esiste un triangolo rettangolo ABC e un triangolo isoscele AB'C.
Il triangolo ABC è isoscele anche quando $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ (vedi figura seguente)



Tracciamo $\overline{CH} \perp b$ e, per dimostrazione precedente, $\overline{CH} = 6\,cm$.
Applicando il teorema di Pitagora sul triangolo rettangolo AHC si può scrivere :
$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108}\,cm$.
Applicando il teorema di Pitagora sul triangolo rettangolo CHB si può scrivere :
$\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{CB}^2 \rightarrow 6^2 + \left(12 - \sqrt{108}\right)^2 = k^2 \rightarrow 36 + 144 - 24\sqrt{108} + 108 = k^2$
da cui si può ricavare k utilizzando la formula del radicale doppio :

$$k = \sqrt{\frac{288 + \sqrt{82944 - 62208}}{2}} - \sqrt{\frac{288 - \sqrt{82944 - 62208}}{2}} = \sqrt{\frac{288 + 144}{2}} - \sqrt{\frac{288 - 144}{2}} = \sqrt{216} - \sqrt{72}$$

cioè
$k = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.
Perciò se $k = 6\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$ si ha un triangolo isoscele ABC.
Per riassumere :

- Il triangolo ABC è rettangolo per $k = 6 \vee k = 4\sqrt{3}$
- Il triangolo ABC è isoscele per $k = 12 \vee k = 4\sqrt{3} \vee k = 6\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$