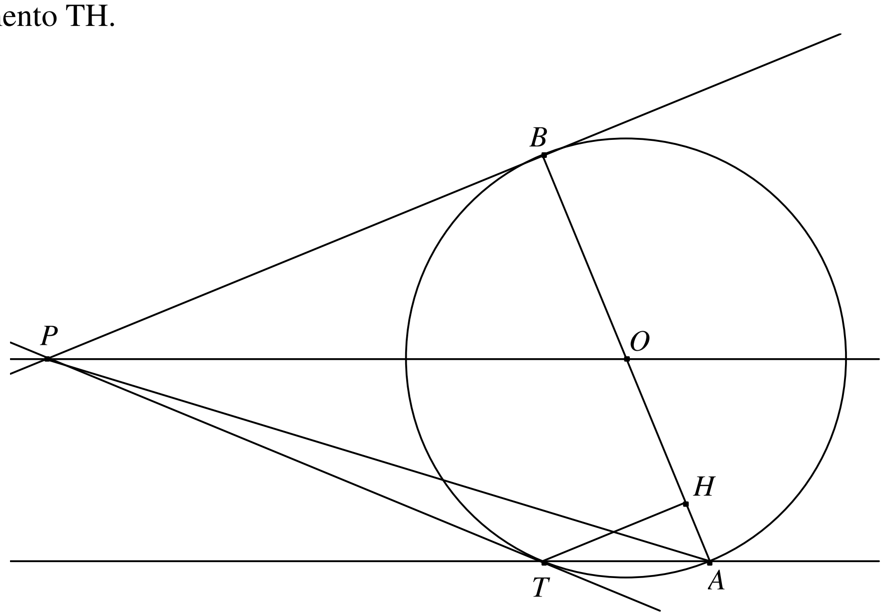
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" ***(Edwin A. Abbott)***

Flatlandia 14-28 Febbraio 2011

Il testo del problema:
Data una circonferenza di centro O, sia P un punto esterno ad essa. Condotte da P le tangenti PB e PT alla circonferenza, sia AB il diametro passante per B.
1) Dimostrare che la retta AT e la retta OP sono parallele.
2) Detto H il piede della perpendicolare condotta da T al diametro AB, dimostrare che AP dimezza il segmento TH.



Commento

Abbiamo ricevuto sette risposte così suddivise: due da classi terze di una stessa Scuola Media, quattro da classi seconde di Licei Scientifici e infine una risposta da una studentessa (sempre di Liceo Scientifico) che non precisa la Classe di appartenenza (non riportiamo quindi la soluzione di questa allieva).

Il problema poneva due domande (tra loro collegate): nel primo quesito si chiedeva di dimostrare il parallelismo di due rette; nel secondo quesito si chiedeva di dimostrare che il segmento congiungente due punti presenti nella figura, con le caratteristiche specificate dal testo, intersecava un secondo segmento nel suo punto medio.
Solo in due delle risposte pervenute il problema viene risolto in tutte le sue parti in modo sostanzialmente corretto (salvo piccole imprecisioni). In altre risposte sono presenti errori e imprecisioni, spesso accompagnati da una stesura del testo veramente poco accurata. Riteniamo doveroso ribadire di nuovo che non è possibile dimostrare con Cabri (o con altro software di Geometria Dinamica) una proprietà geometrica. Questi software possono solo aiutare lo studente a fare congetture riguardo all'esistenza o meno di una certa proprietà, ma tali congetture devono poi essere dimostrate.

Infine dobbiamo rilevare ancora una volta il mancato rispetto delle specifiche stabilite per la scrittura del testo, accompagnato da una certa “sciatteria” nella sua elaborazione; oltre al già citato caso della mancata precisazione della Classe di appartenenza, abbiamo dovuto rilevare di nuovo un caso in cui la soluzione era inserita all’interno di una figura realizzata con GeoGebra (ma il discorso vale anche per Cabri, …), il che rende impossibile il suo successivo utilizzo per la pubblicazione in rete e infine due casi in cui compariva nel testo il riferimento a un punto (non presente nella figura allegata) senza aver minimamente precisato in precedenza come era stato creato tale punto.
Un’ultima “pignoleria”: se B è l’unico punto di intersezione della retta PB con una circonferenza $\mathcal{C}$ e intendiamo utilizzare la notazione insiemistica, allora dobbiamo scrivere PB $\cap \, \mathcal{C} = \{B\}$.

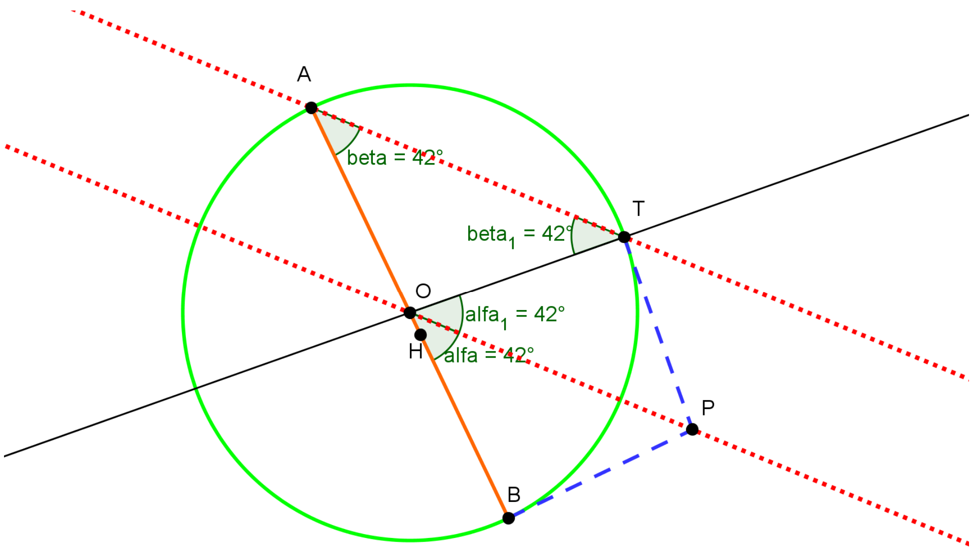
Sono pervenute risposte dalle seguenti Scuole:
SM “M.C. Nannei”, Collegio Dimesse, Udine (UD)
LS, Collegio S. Carlo, Milano (MI)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS “Don Milani”, Montichiari (BS)
LS “A. Banfi”, Vimercate (MI)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Olivia Modesto, Sofia Onorato, Classe 3B
Scuola Media “M.C. Nannei”, Collegio Dimesse, Udine (UD)

1)



1) Dal momento che i segmenti PT e PB sono parti di rette tangenti al cerchio di centro O e di raggio OB passanti per lo stesso punto P, le loro lunghezze sono uguali;

2) i triangoli rettangoli OTP e OBP sono uguali, hanno ipotenusa (OP) in comune e gli altri 2 lati (TP e PB) uguali;

3) [L’ampiezza dell’] angolo POB posso chiamarlo alfa e quindi anche [l’ampiezza dell’] angolo TOP posso chiamarlo alfa (sono uguali);

4) sapendo ciò possiamo capire che [ampiezza] TOA=180[°]-2alfa;

5) OTA e OAT posso chiamarli beta ([il triangolo] OAT è isoscele perché OA e OT sono raggi);

6) Siccome la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un triangolo è 180[°]: TOA=180[°]-2beta;

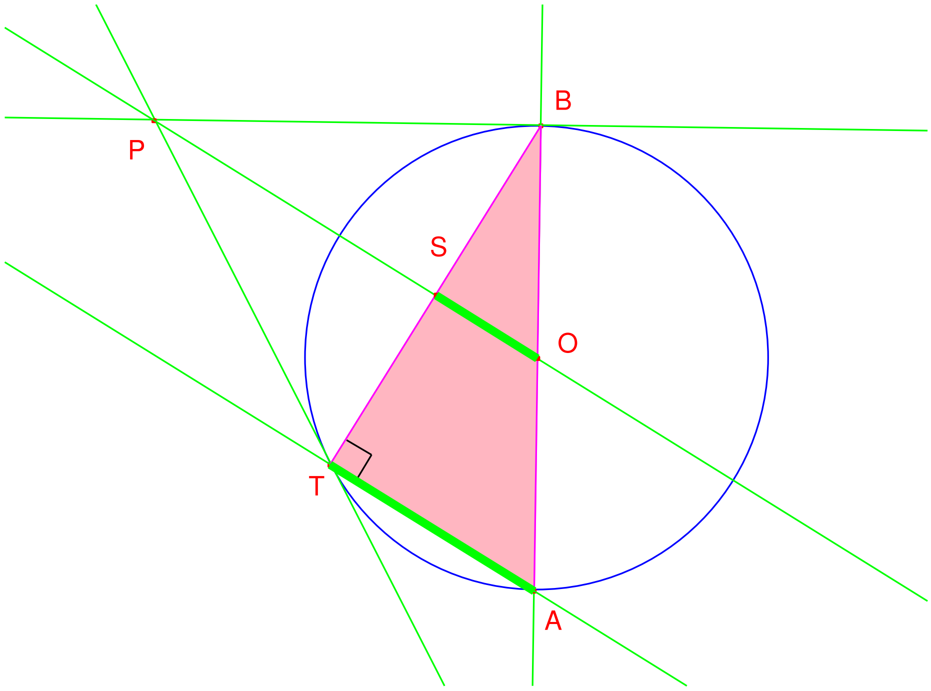
7) con queste informazioni capiamo che 180[°]-2beta=180[°]-2alfa e quindi beta=alfa;

8) quindi, dal momento che gli angoli [alterni] interni formati dalle due rette [[passanti per]] TA e [[per]] PO [con la trasversale TO] sono uguali, le due rette AT e OP sono parallele.

2)
[[…]]

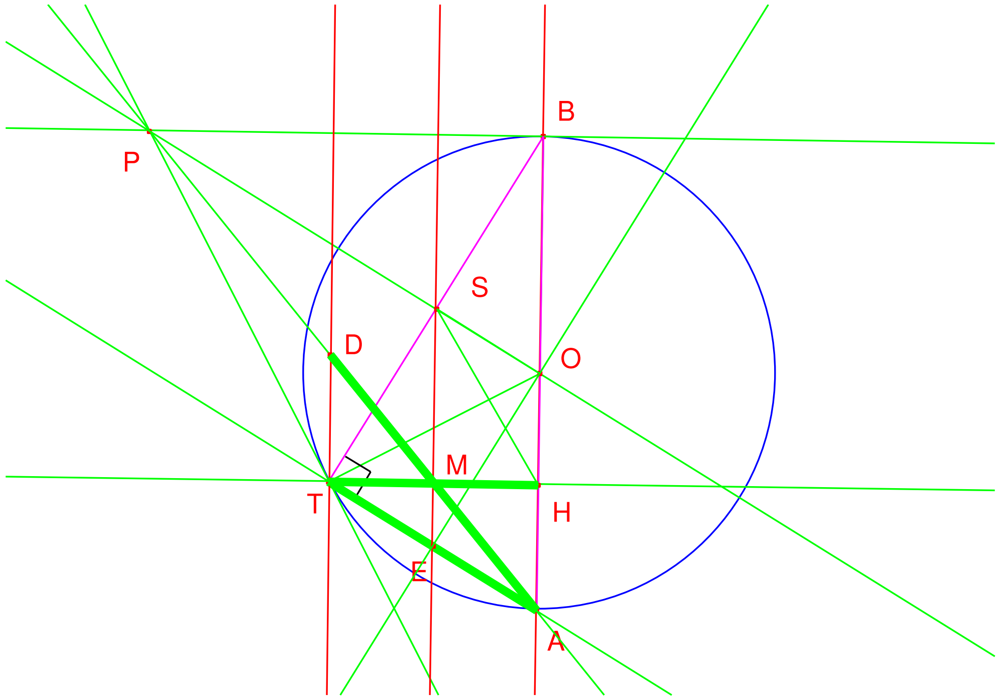
Maria Aragona, Manuela Scarivaglione(?), Classe 2E
Liceo Scientifico “Pitagora”, Rende (CS)

1)



Unisco i punti di tangenza T e B. Il triangolo TPB è isoscele e PS è la bisettrice dell’angolo $\widehat{TPB}$ e mediana del segmento TB per il teorema che riguarda le tangenti alla circonferenza che partono [condotte] da un punto esterno.
Nel triangolo rettangolo ABT [perché rettangolo?], S è il punto medio di TB e O è il punto medio di AB. Unendo S con O e applicando il teorema di Talete sui triangoli, si ha che SO è parallelo a TA.
Dunque la retta AT è parallela alla retta OP.

2)

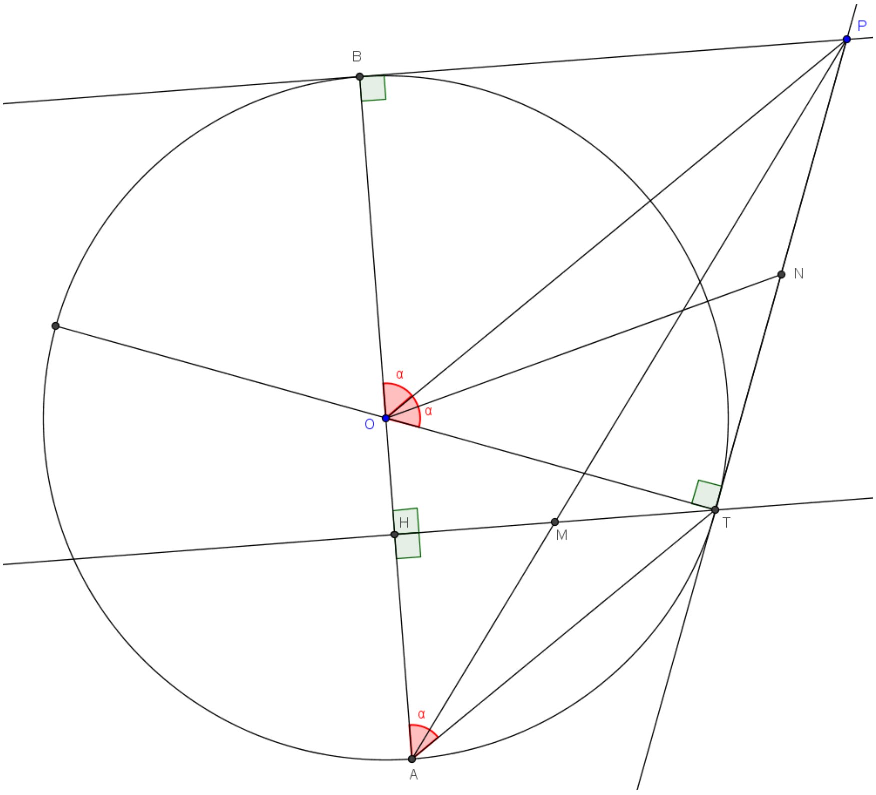


Considero E punto medio di TA e unisco E con S. Per il teorema di Talete applicato ai triangoli ES è parallelo ad AB.
Traccio da T una parallela ad ES. Per la proprietà transitiva [della relazione di parallelismo] essa è anche parallela ad AO. Si forma perciò un fascio [una terna] di rette parallele.
Considerando il fascio [la terna] di parallele sopra descritto, tagliate dalle trasversali TA e TH, poiché TE ≅ EA allora TM ≅ MH essendo M il punto medio di TH.
Considerando lo stesso fascio [la stessa terna] di rette tagliate dalle trasversali TA e AD, sempre per il teorema di Talete, poiché TE ≅ EA allora anche la trasversale DA incontrerà la parallela ES nel suo punto medio.
Poiché TH interseca ES nel suo punto medio M e DA interseca ES anche nel suo punto medio, allora il punto medio di TH coincide con il punto medio di DA. Quindi AP dimezza il segmento TH.
[[Il problema è stato verificato con il programma Cabri II Plus.]]!

[Questa parte della dimostrazione è sbagliata, in quanto nulla ci assicura che il punto medio di TH (cioè M) sia anche il punto medio di AD.]
Gli stessi studenti avevano mandato anche una seconda versione di questa seconda parte, che ritenevano più corretta della precedente, riteniamo di non pubblicare neppure quest'ultima in quanto in essa compare un punto C la cui costruzione non è chiarita dal testo e neppure compare nella figura.]

Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 2B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

1)



Sia α l'ampiezza dell' angolo $B\hat{O}P$. Per il teorema delle tangenti $B\hat{O}P \cong P\hat{O}T = \alpha$, perciò l'angolo $B\hat{O}T = 2\alpha$. L'angolo $B\hat{A}T = \frac{1}{2} B\hat{O}T$ perchè angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco $\overset{\frown}{BT}$ dell' angolo al centro $B\hat{O}T$. Quindi l'angolo $B\hat{A}T = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$.

Perciò OP // AT perché le rette OP e AT formano, con la trasversale AB, angoli corrispondenti $B\hat{O}P$ e $O\hat{A}T$ congruenti.

2)

Sia M il punto di intersezione tra i segmenti PA e HT e N sia il punto medio del segmento PT. Tracciamo il segmento ON. [L'ampiezza dell']angolo $O\hat{T}P = 90°$ perché [PT è tangente alla circonferenza in T] [[angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza]].

Allora i triangoli AHT e OTP sono simili per il 1° criterio di similitudine poiché hanno:

$H\hat{A}T \cong T\hat{O}P = \alpha$ per dimostrazione precedente e $A\hat{H}T \cong O\hat{T}P = 90°$.

Per cui possiamo scrivere la seguente proporzione:

$$\overline{OT} : \overline{AH} = \overline{TP} : \overline{HT}$$

[L'ampiezza dell']angolo $A\hat{B}P = 90°$ perché [PB è tangente alla circonferenza in B] [[è un angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza]].

I triangoli BAP e HAM sono simili per il 1° criterio di similitudine, poichè hanno :

$A\hat{B}P \cong A\hat{H}M = 90°$ e l'angolo $B\hat{A}P$ in comune.

Per cui possiamo scrivere la seguente proporzione :

$$\overline{AB} : \overline{AH} = \overline{BP} : \overline{HM} \quad (*)$$

Ma $\overline{BP} \cong \overline{PT}$ per il teorema delle tangenti e $\overline{AB} \cong 2\overline{OT}$ perché $\overline{AB}$ è un diametro e $\overline{OT}$ un raggio.

Quindi, sostituendo nella proporzione (*) si ottiene :

$$2\overline{OT} : \overline{AH} = 2\overline{TN} : \overline{HM}$$

(considerando che N è il punto medio di $\overline{PT}$ per costruzione).
Semplificando, si ottiene :

$$\overline{OT} : \overline{AH} = \overline{TN} : \overline{HM}$$

Poiché, per dimostrazione precedente, si era ottenuto che $\overline{OT} : \overline{AH} = \overline{TP} : \overline{HT}$, allora si può scrivere che :

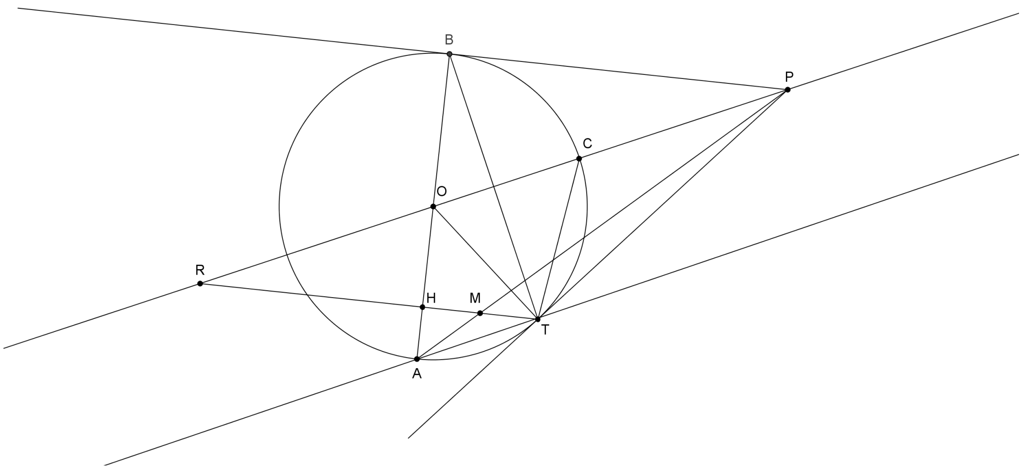
$$\overline{TP} : \overline{HT} = \overline{TN} : \overline{HM}$$

e, per una proprietà delle proporzioni, si possono scambiare i medi, ottenendo :

$$\overline{TP} : \overline{TN} = \overline{HT} : \overline{HM}$$

Poiché $\overline{TP} = 2\overline{TN}$ per costruzione, allora deve essere $\overline{HT} = 2\overline{HM}$ cioè M è il punto medio del segmento $\overline{HT}$.

Stefano Biffi, Classe 2E
Liceo Scientifico "A. Banfi", Vimercate (MB)



Hp: PB tangente alla circonferenza in B
PT tangente alla circonferenza in T
AB diametro della circonferenza di centro O
TH $\perp$ AB
R punto di incontro [intersezione] tra la retta PO e la retta TH.
M il punto di incontro [intersezione] tra la retta PA e la retta TH.

Th: 1) retta AT parallela alla retta OP
2) TM congruente a MH

DIMOSTRAZIONE

Osservazioni preliminari:

a) per il teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza si può affermare che: $P\hat{B}A \cong angolo\ retto$, PB$\cong$PT, $B\hat{P}R \cong T\hat{P}R$, $B\hat{O}P \cong T\hat{O}P$.

Si può così affermare che $B\hat{O}P$ è congruente alla metà di $B\hat{O}T$

b) PB e TH sono parallele perché entrambe perpendicolari alla retta AB.
$T\hat{R}P \cong B\hat{P}R$ perché angoli alterni interni (parallele PB e TH e trasversale PR) e dato che $B\hat{P}R \cong T\hat{P}R$ si deduce, per la proprietà transitiva della congruenza, che $T\hat{P}R \cong T\hat{R}P$.
Il triangolo PTR, avendo gli angoli $T\hat{P}R$ *e* $T\hat{R}P$ congruenti, è isoscele di base PR.

Prima parte: (retta AT parallela alla retta OP)

Per il teorema dell'angolo alla circonferenza, l'angolo $B\hat{A}T$ è la metà del corrispondente angolo al centro $B\hat{O}T$ e quindi si può affermare che $B\hat{A}T \cong B\hat{O}P$ (perché nel punto a) delle osservazioni preliminari si è detto che $B\hat{O}P$ è congruente alla metà di $B\hat{O}T$).
Si può quindi affermare che AT è parallela a OP perché tali rette tagliate dalla trasversale AB formano angoli corrispondenti ($B\hat{A}T$ e $B\hat{O}P$) congruenti.

c.v.d.

Seconda parte: (TM congruente a MH)

Si considerino i triangoli PMR e TMA. Essi hanno $A\hat{T}M$ (che si può anche chiamare $A\hat{T}H$) congruente ad $T\hat{R}P$ perchè angoli alterni interni (parallele TA e PR, per quanto dimostrato nella prima parte, trasversale TR) e $T\hat{A}M$ congruente a $M\hat{P}R$ perché alterni interni (parallele TA e PR, per quanto dimostrato nella prima parte, trasversale PA). I due triangoli sono quindi simili per il primo criterio di similitudine e quindi hanno i lati corrispondenti in proporzione: $PM : MA = MR : TM$. Applicando la proprietà del comporre a tale proporzione si ha $(PM + MA) : MA = (MR + MT) : TM$ e quindi, dato che $PM + MA = PA$ e $TM + MR = TR$, si ottiene $PA : MA = TR : TM$.

Si considerino i triangoli PBA e MAH. Essi sono triangoli rettangoli ed hanno $P\hat{A}B = M\hat{A}H$. I due triangoli sono quindi simili per il primo criterio di similitudine e quindi hanno i lati corrispondenti in proporzione: $PA : MA = PB : MH$.

Confrontando le proporzioni $PA : MA = TR : TM$ e $PA : MA = PB : MH$ si può affermare che, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $TR : TM = PB : MH$.

Scambiando tra loro i due medi si ottiene $TR : PB = TM : MH$. Per l'osservazione a) PB è congruente a PT e per l'osservazione b) PT è congruente a TR, quindi il rapporto tra TR e PB vale uno. Si può quindi affermare che TM è congruente a MH.

c.v.d.