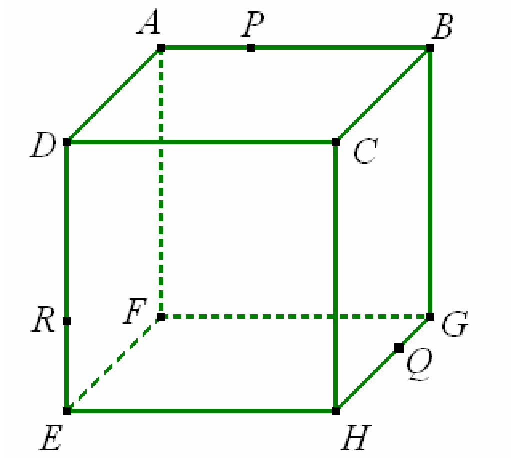
FLATlandia

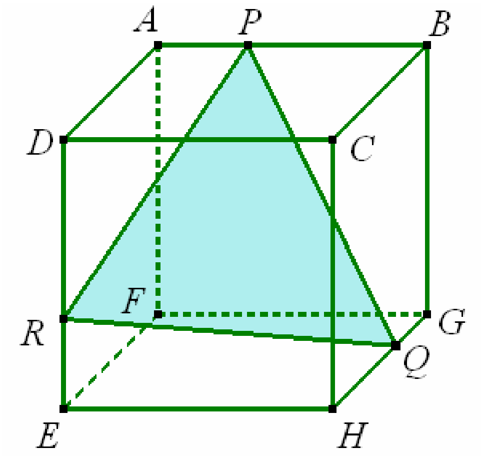
"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia 4-18 Aprile 2011

Il testo del problema:
Indichiamo con *ABCDEFGH* (vedi figura) un cubo il cui lato misura 3 unità. Il punto *P* giace sul lato *AB* a una distanza da *A* pari a 1/3 di *AB*, il punto Q giace sul lato *GH* a una distanza da *G* pari a 1/3 di GH e il punto *R* giace sul lato *ED* a una distanza da *E* pari a 1/3 di ED.



a) Che tipo di triangolo è *PQR*?
b) Quanto vale l'area di *PQR*?
c) Descrivere la piramide avente per base il triangolo *PQR* e vertice in *C*. Dimostrare che è retta.
Motivare le risposte.



Commento
Abbiamo ricevuto sei risposte: una da una classe seconda di una Scuola Media, tre da classi seconde di Licei Scientifici e infine due risposte da una stessa classe terza PNI sempre di Liceo Scientifico.
Il problema poneva tre domande (le prime due riguardanti la stessa figura): nel primo quesito si chiedeva di individuare la tipologia di un triangolo avente i vertici su tre differenti spigoli di un cubo; nel secondo quesito si chiedeva di determinare il valore dell'area del triangolo precedentemente individuato; nel terzo quesito si chiedeva di descrivere la piramide avente per base

il triangolo precedentemente discusso e per vertice un dato vertice del cubo e infine di dimostrare che tale piramide era retta.
Abbiamo apprezzato il fatto che diversi studenti abbiano tentato di risolvere questo problema di geometria solida, tuttavia in nessuna delle risposte pervenute il problema viene risolto in tutte le sue parti in modo corretto. In particolare viene spesso utilizzato implicitamente il teorema delle tre perpendicolari (o sue formulazioni equivalenti).
Infine vogliamo ribadire che la verifica di una proprietà geometrica effettuata con un qualsiasi software di Geometria Dinamica non costituisce una dimostrazione della proprietà stessa (anche se è apprezzabile la risoluzione inviata dagli allievi della Classe 2^F della Scuola Media "A. Brofferio" di Asti, nella quale le proprietà richieste sono verificate con l'uso del software SketchUp).

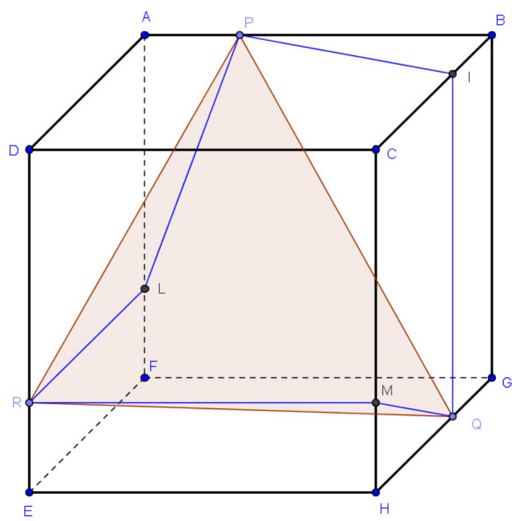
Sono pervenute risposte dalle seguenti Scuole:
LS "Don Milani", Montichiari (BS)
LS "C. Cafiero", Barletta (BA)
LS "Pitagora", Rende (CS)
LS "G. Spezia", Domodossola (NO)
SM "A.Brofferio", Asti

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 2B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

a)



Siccome $\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AB},\quad \overline{ER}=\frac{1}{3}\overline{ED},\quad \overline{GQ}=\frac{1}{3}\overline{GH}$ allora :

$\overline{AP}=\frac{1}{3}\cdot 3=1\,cm$, $\overline{ER}=\frac{1}{3}\cdot 3=1\,cm$, $\overline{GQ}=\frac{1}{3}\cdot 3=1\,cm.$ [il testo non fissa l'unità di misura]

Tracciamo la retta passante per il punto Q, perpendicolare al segmento $\overline{GH}$ ed appartenente al piano definito dai punti H, G, B, C. Sia I il punto in cui tale retta interseca il segmento $\overline{CB}$. Siccome il quadrilatero IQGB è un rettangolo per costruzione, allora $\overline{IQ} \cong \overline{BG} = 3\,cm$.

Per il teorema di Pitagora : $\overline{IP} = \sqrt{\overline{IB}^2 + \overline{PB}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\,cm$.

Per il teorema di Pitagora : $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{IP}^2 + \overline{IQ}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{14}\,cm$. [Perché il triangolo PIQ è rettangolo?]

Tracciamo la retta passante per il punto R, perpendicolare al segmento $\overline{ED}$ ed appartenente al piano definito dai punti A,D,E,F. Sia L il punto in cui tale retta interseca il segmento $\overline{AF}$. Siccome il quadrilatero ADRL è un rettangolo per costruzione, allora $\overline{RL} \cong \overline{AD} = 3\,cm$ e $\overline{DR} \cong \overline{AL} = 2\,cm$.

Per il teorema di Pitagora : $\overline{PL} = \sqrt{\overline{AL}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\,cm$.

Per il teorema di Pitagora : $\overline{PR} = \sqrt{\overline{RL}^2 + \overline{PL}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{14}\,cm$.

Tracciamo la retta passante per il punto R, perpendicolare al segmento $\overline{ED}$ ed appartenente al piano definito dai punti D,C, H ,E. Sia M il punto in cui tale retta interseca il segmento $\overline{CH}$. Siccome il quadrilatero RMHE è un rettangolo per costruzione, allora $\overline{RM} \cong \overline{EH} = 3\,cm$ e $\overline{RE} \cong \overline{MH} = 1\,cm$.

Per il teorema di Pitagora : $\overline{MQ} = \sqrt{\overline{MH}^2 + \overline{MQ}^2}\left[\sqrt{\overline{MH}^2 + \overline{HQ}^2}\right] = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,cm$.

Per il teorema di Pitagora : $\overline{RQ} = \sqrt{\overline{RM}^2 + \overline{MQ}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{14}\,cm$.

Quindi $\overline{RP} \cong \overline{PQ} \cong \overline{RQ} = \sqrt{14}\,cm$ e il triangolo RPQ avendo i tre lati congruenti è equilatero.

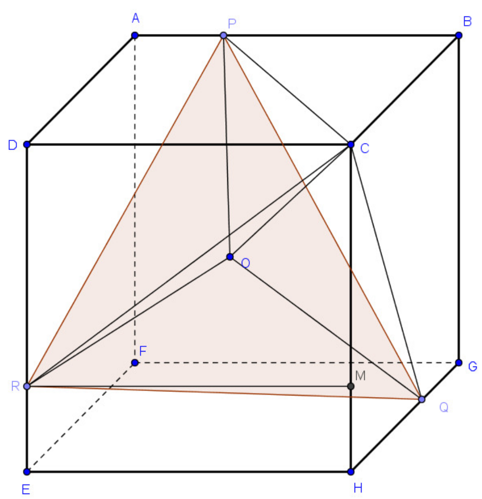
b)

Per la formula di Erone , l'area del triangolo RPQ è :

$$A_{RPQ} = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{14} \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{14} - \sqrt{14}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{14} - \sqrt{14}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{14} - \sqrt{14}\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{14} \cdot \frac{14\sqrt{14}}{8}} = \frac{7}{2}\sqrt{3}\,cm^2.$$

c)

Sia O il piede dell' altezza della piramide ottenuta congiungendo R, Q, e P con C.



Per il teorema di Pitagora $\overline{CR}=\sqrt{\overline{CM}^2+\overline{RM}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\ cm$.

Per il teorema di Pitagora $\overline{RO}=\sqrt{\overline{CR}^2-\overline{CO}^2}=\sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2-\overline{CO}^2}=\sqrt{13-\overline{CO}^2}\ cm$.

Per il teorema di Pitagora $\overline{CQ}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\ cm$.

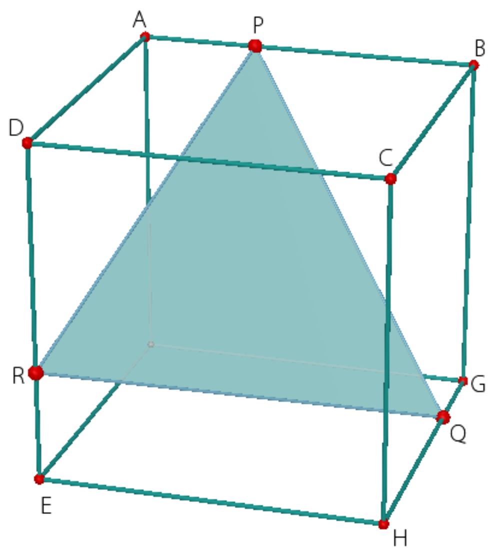
Per il teorema di Pitagora $\overline{QO}=\sqrt{\overline{CQ}^2-\overline{CO}^2}=\sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2-\overline{CO}^2}=\sqrt{13-\overline{CO}^2}\ cm$.

Per il teorema di Pitagora $\overline{PC}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{CB}^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\ cm$.

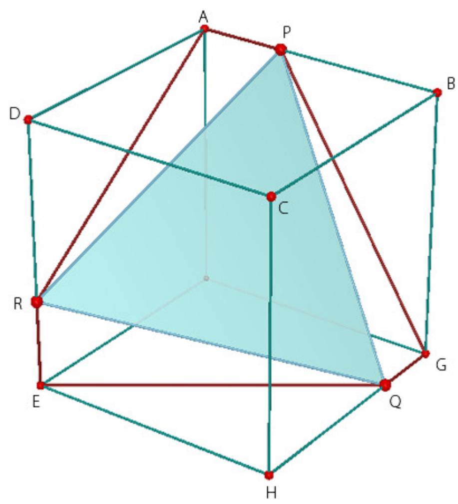
Per il teorema di Pitagora $\overline{PO}=\sqrt{\overline{PC}^2-\overline{CO}^2}=\sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2-\overline{CO}^2}=\sqrt{13-\overline{CO}^2}\ cm$.

Quindi $\overline{RO}\cong\overline{QO}\cong\overline{PO}=\sqrt{13-\overline{CO}^2}\ cm$, cioè il punto O è equidistante dai punti R, Q e P. Allora O è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo PQR, [ma essendo tale triangolo equilatero, O è anche il centro della circonferenza inscritta, perciò] [[cioè]] la piramide è retta.

Classe 2D, Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta (BA)



a)
Per classificare il triangolo PQR è necessaria qualche informazione sui suoi lati o sui suoi angoli.
Si congiunge E con Q, A con R e P con G.
Soffermandosi sul triangolo REQ si nota che questo è retto in E, essendo lo spigolo del cubo perpendicolare alla faccia di base ⇒ RQ è l'ipotenusa di REQ, pertanto è possibile applicare il teorema di Pitagora ⇒ $\overline{RQ}=\sqrt{\overline{RE}^2+\overline{EQ}^2}$ ⇒ ma EQ è a sua volta l'ipotenusa



del triangolo EHQ sulla faccia EFGH ⇒ $\overline{EQ} = \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{HQ}^2} = \sqrt{9u^2 + 4u^2} = \sqrt{13}u$ ⇒

$\overline{RQ} = \sqrt{1u^2 + 13u^2} = \sqrt{14}u$

Si applica lo stesso ragionamento ai triangoli RAP e PGQ ottenendo:

$\overline{RP} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \sqrt{\overline{DA}^2 + \overline{DR}^2}^2} = \sqrt{14}u$

$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{GQ}^2 + \sqrt{\overline{GB}^2 + \overline{BP}^2}^2} = \sqrt{14}u$

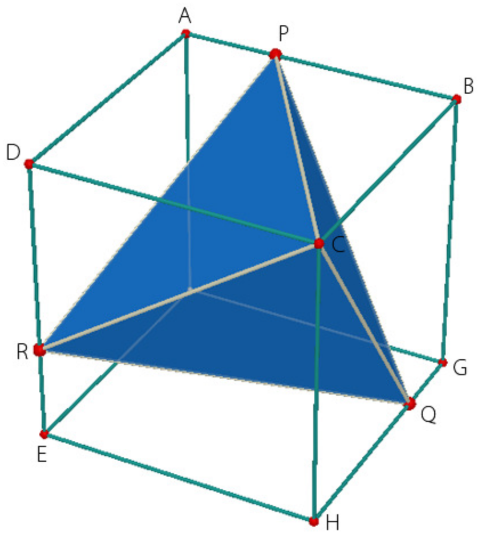
*Ne consegue che **Il triangolo PQR è equilatero.***

b)

[Indicato] Con T il piede dell'altezza relativa alla base RQ, per le formule dei triangoli di 30°, 60° e 90°: $\overline{PT} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{14}u = \frac{\sqrt{42}}{2}u$ ⇒ $A_{PQR} = (\sqrt{14}u * \sqrt{42}u)/4 = \frac{7}{2}\sqrt{3}u^2$

c)

Si congiungono i vertici del triangolo R, P e Q con il vertice del cubo C, ottenendo così una piramide a base triangolare con vertice in C.



Ora, "**una piramide è retta se la sua base è un poligono circoscrivibile ad una circonferenza il cui centro è il piede dell'altezza. [Di conseguenza le altezze delle facce laterali sono congruenti, e sono chiamate apotema della piramide"** [Occorrerebbe dunque dimostrare che, indicato con O l'incentro del triangolo PQR, risulta CO perpendicolare al piano individuato da PQR.]

La base PRQ è un triangolo equilatero, ⇒ Basta dimostrare che le tre altezze delle facce sono congruenti per dimostrare che la piramide è retta.

R ∈ EHCD ∧ C ∈ EHCD ⇒ RC ∈ EDHC [EHDC] quindi è possibile applicare il teorema di Pitagora nel triangolo DRC rettangolo in D ⇒ $\overline{RC} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{DR}^2} = \sqrt{13}u$. Si applica lo stesso ragionamento per PC e QC, ottenendo che:

$\overline{PC} = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{PB}^2} = \sqrt{13}u$

$\overline{QC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HQ}^2} = \sqrt{13}u$

$\overline{PC} = \overline{RC} = \overline{QC}$ ⇒ PC ≅ RC ≅ QC

Si considerano i triangoli RCP, PCQ e RCQ (nonché le facce della piramide):

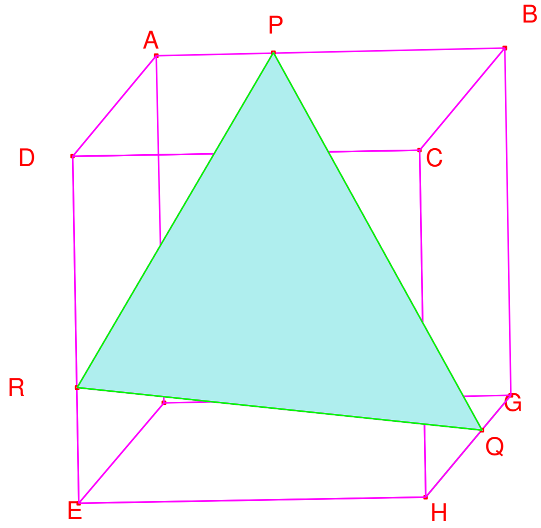
PC ≅ RC ≅ QC per dimostrazione

RQ ≅ QP ≅ PR per dimostrazione (il triangolo di base è equilatero)

} Congruenti per il 3°Criterio di congruenza dei triangoli.

Ne segue che anche le altezze relative alle basi (RQ, QP e PR) sono congruenti ⇒ **La piramide è retta.**

Maria Ilenia Aragona,Simona Giulia Foglia, Manuela Scarivaglione(?), Classe 2E
Anna Carmen Leonetti, Mario Marotta, Federica Marrelli, Emanuele Spizzirri, Classe 2B
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)

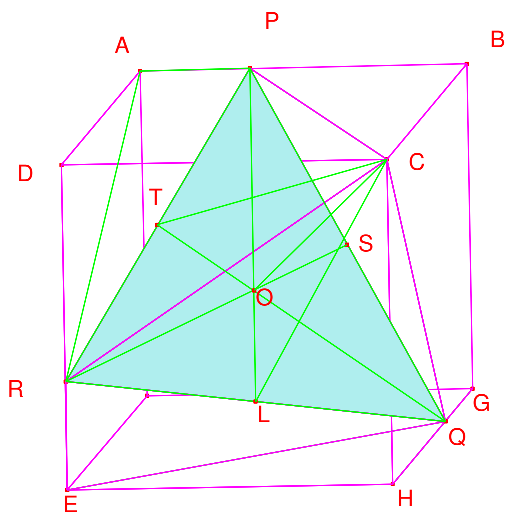


a)
Uniamo i punti E e Q. Si vengono a formare due triangoli rettangoli EHQ ed EQR. Applichiamo il Teorema di Pitagora sul triangolo EHQ poiché l'angolo $\widehat{EHQ}$ è retto dato che coincide con l'angolo della faccia del cubo dato; inoltre ER è perpendicolare alla faccia del cubo EHGF e quindi ha [a] tutte le rette che giacciano in questo piano.
$EQ^2 = EH^2 + HQ^2$
Da cui EQ $=\sqrt{EH^2 + HQ^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
Applichiamo ora il Teorema di Pitagora al triangolo EQR.
$RQ^2 = ER^2 + EQ^2$
Da cui RQ $= \sqrt{ER^2 + EQ^2} = \sqrt{1+13} = \sqrt{14}$
Uniamo ora i punti A e R. Si formano altri due triangoli rettangoli ADR e APR analogamente applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ADR.
$AR^2 = AD^2 + DR^2$
Da cui AR $= \sqrt{AD^2 + DR^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
Applichiamo ora il Teorema di Pitagora sul triangolo APR.
$RP^2 = AR^2 + AP^2$
Da cui RP $= \sqrt{AR^2 + AP^2} = \sqrt{13+1} = \sqrt{14}$
Uniamo infine P e G. Si formano due triangoli rettangoli PGB e PQG. Analogamente alle motivazioni precedenti applichiamo il Teorema di Pitagora sul triangolo PBG.
$PG^2 = PB^2 + BG^2$
Da cui PG $= \sqrt{BG^2 + PB^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
Applichiamo ora il Teorema di Pitagora sul triangolo PGQ.
$PQ^2 = PG^2 + QG^2$
Da cui PQ $= \sqrt{PG^2 + QG^2} = \sqrt{13+1} = \sqrt{14}$
Essendo dunque PQ $\cong$ QR $\cong$ RP $= \sqrt{14}$ il triangolo PQR è equilatero.

b)
Calcoliamo ora l'area del triangolo:
h $= \frac{l}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{14}}{2} * \sqrt{3}$

A = $\frac{b*h}{2}$ =$\sqrt{14}$ *$\frac{\sqrt{14}}{2}$ * $\sqrt{3}$*$\frac{1}{2}$ = $\frac{14}{4}\sqrt{3}$ = $\frac{7}{2}\sqrt{3}$

c)



Calcoliamo ora gli apotemi della piramide. [Bisogna calcolare PC, CQ e anche CR. Dopo aver verificato che i tre segmenti sono congruenti e che quindi i triangoli PCR, CQR e PCQ sono isosceli, si procede come nel testo riportato] Applichiamo prima il teorema di Pitagora sul [al] triangolo PCB.

$PC^2 = PB^2 + BC^2$

Da cui PC = $\sqrt{PB^2 + BC^2}$ =$\sqrt{4+9}$ =$\sqrt{13}$

Applichiamo ora il Teorema di Pitagora sul [al] triangolo PTC.

$PC^2 = PT^2 + TC^2$

Da cui TC = $\sqrt{PC^2 - PT^2}$ = $\sqrt{13 - \frac{14}{4}}$ = $\sqrt{\frac{52-14}{4}}$ = $\frac{\sqrt{38}}{2}$

Applichiamo il Teorema di Pitagora sul [al] triangolo HQC.

$CQ^2 = CH^2 + HQ^2$

Da cui CQ = $\sqrt{CH^2 + HQ^2}$ =$\sqrt{9+4}$ =$\sqrt{13}$

Applichiamo ora il Teorema di Pitagora al triangolo CSQ.

$CQ^2 = CS^2 + SQ^2$

Da cui CS = $\sqrt{CQ^2 - SQ^2}$ = $\sqrt{13 - \frac{14}{4}}$ = $\sqrt{\frac{52-14}{4}}$ = $\frac{\sqrt{38}}{2}$

Applichiamo infine il Teorema di Pitagora sul [al] triangolo CLQ

$CQ^2 = CL^2 + CQ^2$

Da cui CL = $\sqrt{CQ^2 - LQ^2}$ = $\sqrt{13 - \frac{14}{4}}$ = $\sqrt{\frac{52-14}{4}}$ = $\frac{\sqrt{38}}{2}$

Essendo TC ≅ CS ≅ CL [TC = CS = CL]= $\frac{\sqrt{38}}{2}$ gli apotemi sono congruenti tra loro.

Consideriamo ora i triangoli [[rettangoli]] TCQ, CSR, LCP [questi triangoli non sono rettangoli]. Essi hanno:

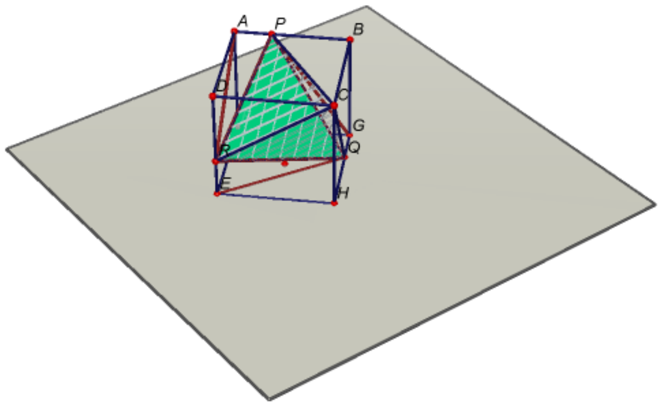
TC ≅ CS ≅ CL perché apotemi congruenti della piramide.

TQ ≅ SR ≅ PL perché altezze del triangolo equilatero di base PQR.

CQ ≅ RC ≅ PC perché spigoli laterali della piramide [per quanto dimostrato precedentemente].

I triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza e quindi equivalenti perché hanno la stessa altezza che parte da C e che è perpendicolare ai segmenti TR [TQ], PL, RS. Poiché in un triangolo equilatero l'incontro delle tre altezze coincide con l'incentro O allora CO è perpendicolare alla base PQR [questo dovrebbe essere dimostrato] e quindi la piramide è retta.

Paolo Timponelli, Classe 3A PNI
Liceo Scientifico "G. Spezia", Domodossola (NO)

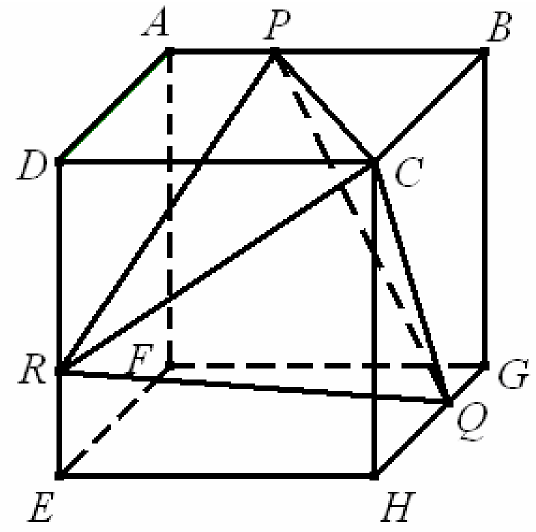


a)
I triangoli EHQ, ADR e PBG sono tutti e tre congruenti perché triangoli rettangoli aventi BP=DR=HQ e EH=AD=BG, quindi si deduce che PG=QE=AR.
I triangoli APR, REQ e QPG sono tutti e tre congruenti perché triangoli rettangoli [perché sono rettangoli?] aventi PG=QE=AR e RE=QG=PA, quindi si deduce che PQ=QR=RA [RP], quindi il triangolo PQR è equilatero.

b)
Per il teorema di pitagora [Pitagora] $EH^2+QH^2=EQ^2$, quindi EQ= √(4+9)=√(13)
Sempre per il teorema di pitagora [Pitagora] $RE^2+EQ^2=RQ^2$, quindi RQ=√(14)
l'altezza del triangolo h = (RQ*√(3))/2=(√(14)*√(3))/2=√(42)/2
l'area del triangolo = (RQ*h)/2 = (7*√(3))/2

c)
I triangoli RDC, BPC e CHQ sono congruenti perché rettangoli e HQ=PB=DR e DC=CH=CB, quindi le tre facce della piramide sono 3 triangoli isosceli congruenti tra loro (la base è un triangolo equilatero quindi anche le basi dei triangoli isosceli sono congruenti). La piramide è quindi una piramide regolare e quindi retta [perché?]. (alternativa, visto che le facce [laterali] sono triangoli isosceli, le loro altezze cadranno nel punto medio della base, quindi il punto medio dei lati del triangolo equilatero. Poiché in un triangolo equilatero i punti medi dei lati sono anche i punti di tangenza con la circonferenza inscritta, allora le altezze cadranno nei punti di tangenza e quindi la piramide è retta.[occorre dimostrare che l'incentro è il piede della perpendicolare condotta dal vertice C al piano contenente il triangolo PQR]

Tobia Mariotto, Classe 3A PNI
Liceo Scientifico "G. Spezia", Domodossola (NO)



a)
RH= $\sqrt{}(3^2+1^2)$= $\sqrt{}(9+1)$=$\sqrt{}10$
RQ= $\sqrt{}(\sqrt{}10^2+2^2)$=$\sqrt{}(10+4)$=$\sqrt{}14$ [che cosa garantisce che RHQ è un triangolo rettangolo?]

DP= $\sqrt{}(3^2+1^2)$= $\sqrt{}(9+1)$=$\sqrt{}10$
PR= $\sqrt{}(\sqrt{}10^2+2^2)$=$\sqrt{}(10+4)$=$\sqrt{}14$ [che cosa garantisce che DPR è un triangolo rettangolo?]

BQ= $\sqrt{}(3^2+1^2)$= $\sqrt{}(9+1)$=$\sqrt{}10$
PQ= $\sqrt{}(\sqrt{}10^2+2^2)$=$\sqrt{}(10+4)$=$\sqrt{}14$ [che cosa garantisce che PQB è un triangolo rettangolo?]

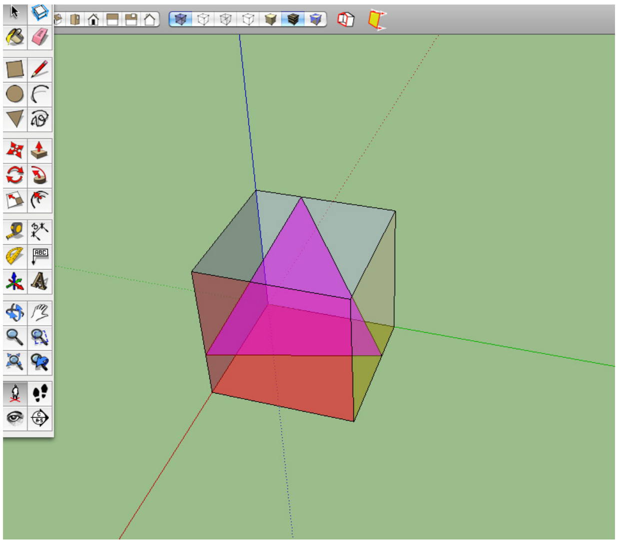
I lati di questo triangolo hanno tutti la stessa lunghezza, quindi il triangolo è equilatero.

b)
h= $(\sqrt{}3*RQ)/2$= $(\sqrt{}3*\sqrt{}14)/2$= $(\sqrt{}42)/2$
A= (RQ*h) [(RQ*h)/2] = $(\sqrt{}14*(\sqrt{}42)/2)/2$= $(7\sqrt{}3)/2$

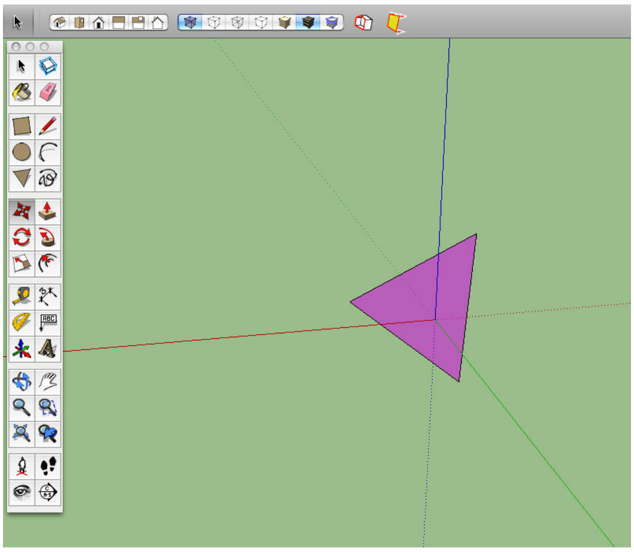
c)
CQ= $\sqrt{}(3^2+2^2)$= $\sqrt{}(9+4)$=$\sqrt{}13$
RC= $\sqrt{}(3^2+2^2)$= $\sqrt{}(9+4)$=$\sqrt{}13$
Poiché RC=CQ il triangolo [RCQ] è isoscele con base RQ e lati CQ e RC, l' altezza relativa alla base cade nel suo punto medio, che è anche il punto di tangenza della circonferenza inscritta a PQR con il lato RQ. Quindi l'altezza [della faccia CRQ relativa al lato RQ] cade nel punto di tangenza della circonferenza inscritta [nel] triangolo equilatero PQR con il lato RQ. Analogamente si dimostra che le altezze delle altre facce cadono nei punti medi dei rispettivi lati del triangolo equilatero.
Quindi, poiché tutte le altezze delle facce laterali cadono nei punti di tangenza della circonferenza inscritta al triangolo equilatero PQR con il triangolo stesso, la piramide è retta. [occorre dimostrare che l'incentro è il piede della perpendicolare condotta dal vertice C al piano contenente il triangolo PQR]

Alice Calderone, Federico De Liguori, Andrea Macario, Martina Mogioni, Francesca Stobbione, Matteo Vagari, Classe 2F (Progetto cl@ssi 2.0 MIUR – ANSAS)
Scuola Media "A. Brofferio", Asti (AT)

a)
Entriamo in ambiente Sketchup e costruiamo un cubo.
Individuiamo quindi i punti sugli spigoli secondo le indicazioni del problema proposto e disegnamo [disegniamo] il triangolo.

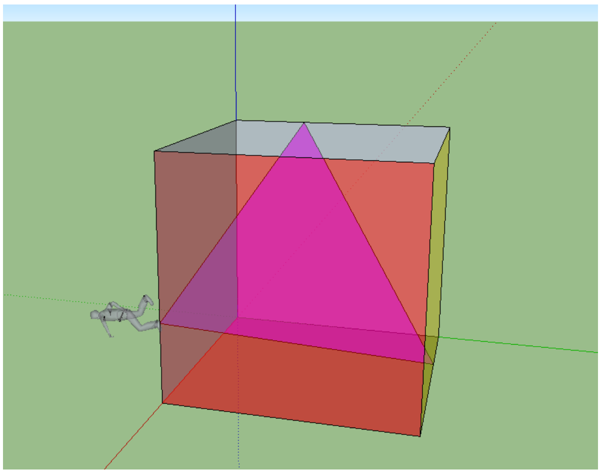


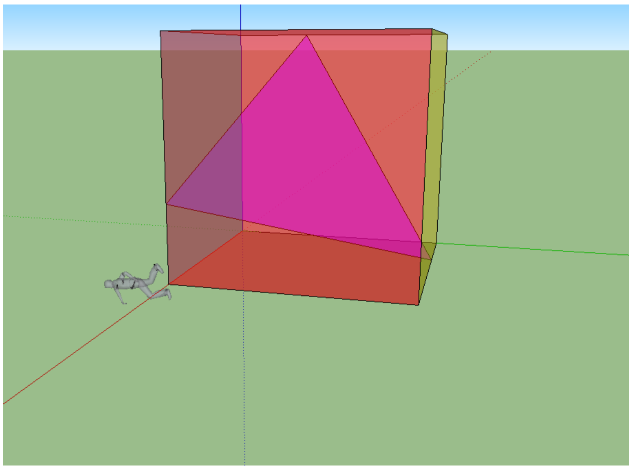
Osserviamo bene la costruzione.
Nascondendo il gruppo "cubo" vediamo bene il triangolo, lo ruotiamo. Ci sembra proprio equilatero.



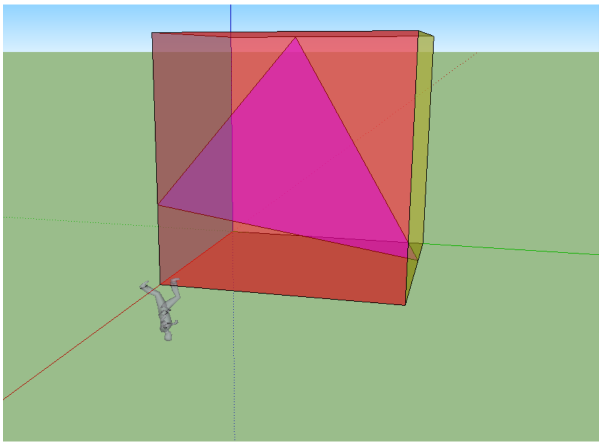
Dobbiamo però esserne certi…
Osserviamo che per passare da un vertice all'altro del triangolo si fa sempre lo stesso percorso.
Supponiamo di essere un omino posizionato su un vertice qualunque del triangolo esternamente al cubo e di camminare lungo gli spigoli.
Indicazioni del percorso che è individuato da tre segmenti:

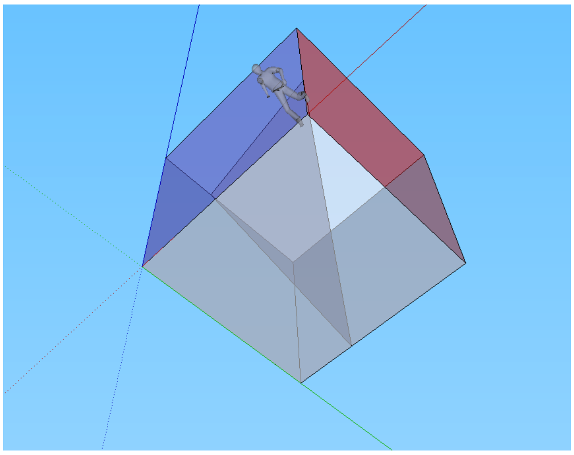
1° tratto (1° segmento): l'omino percorre lo spigolo su cui si trova e si muove verso il vertice più vicino (a 1/3 dal vertice) fino a raggiungerlo.

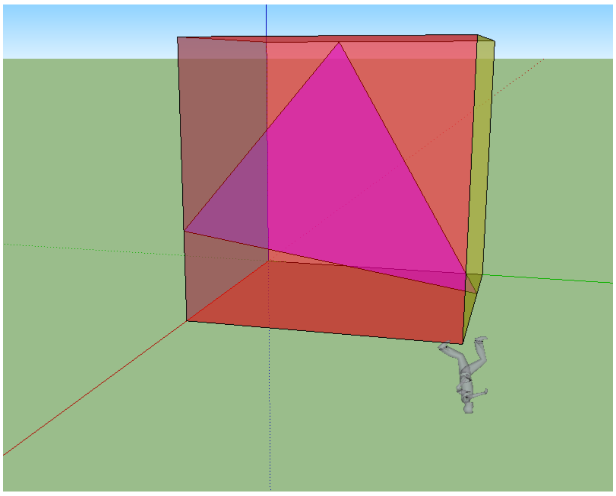




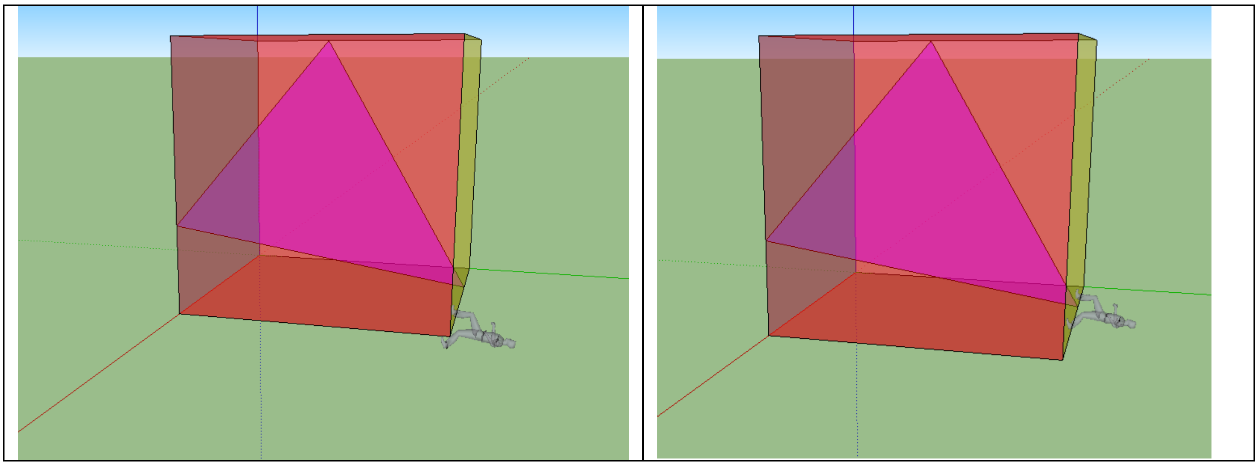
2° tratto (2° segmento): ruota di 90° in senso antiorario; appare un bivio: procede sullo spigolo di sinistra e lo percorre tutto.







3° tratto (3° segmento): ruota di 90° in senso orario; appare un bivio: procede sullo spigolo di destra e ne percorre i 2/3.

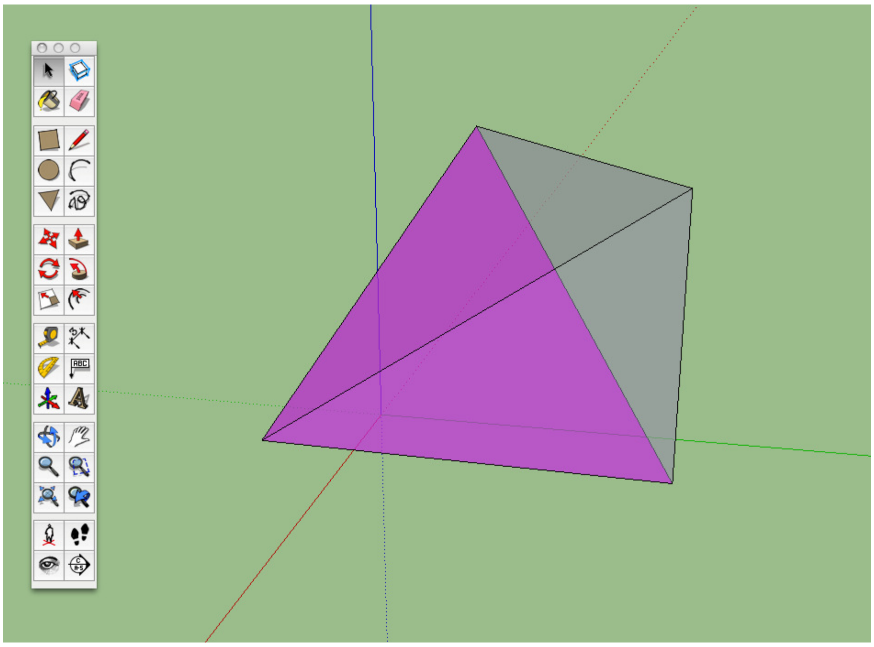


Sketchup ci permette di ruotare in ogni modo il cubo, dall'alto, dal basso, da destra, da sinistra.
Ci siamo potuti quindi accertare che il percorso per raggiungere due qualunque vertici del triangolo è sempre lo stesso
Quindi concludiamo che:

i vertici del triangolo sono gli estremi di tre spezzate poligonali congruenti (formate da tre segmenti non complanari) e quindi non possono che essere equidistanti [occorre giustificare un po' meglio].

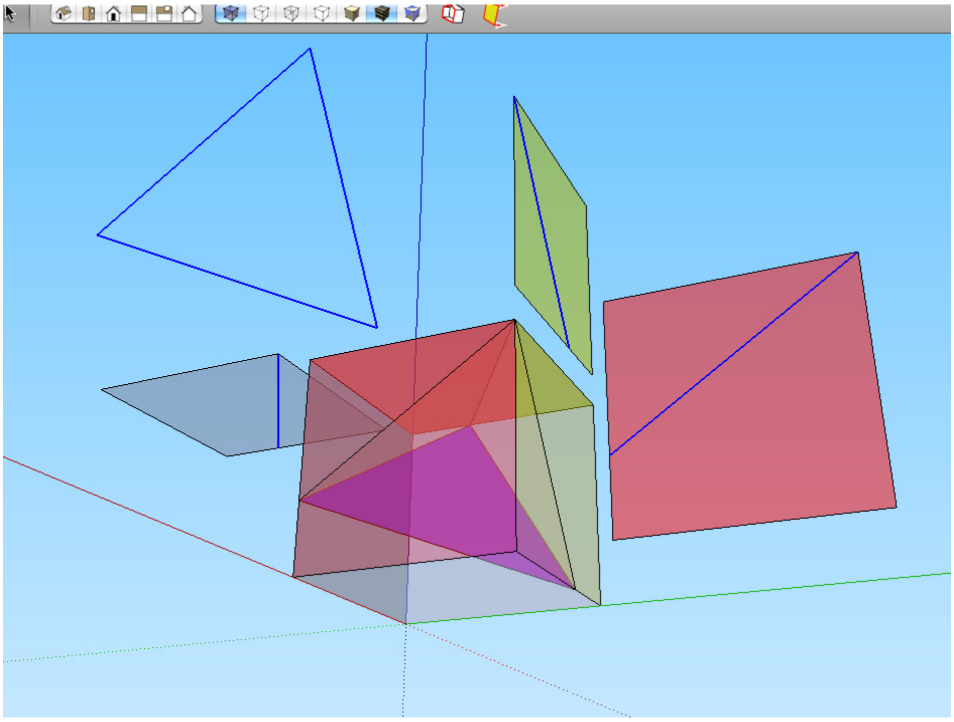
Il triangolo è equilatero!

b)
Si tratta adesso di costruire la piramide avente per base il triangolo equilatero e per vertice [quello] [[lo spigolo]] indicato dal testo del problema :

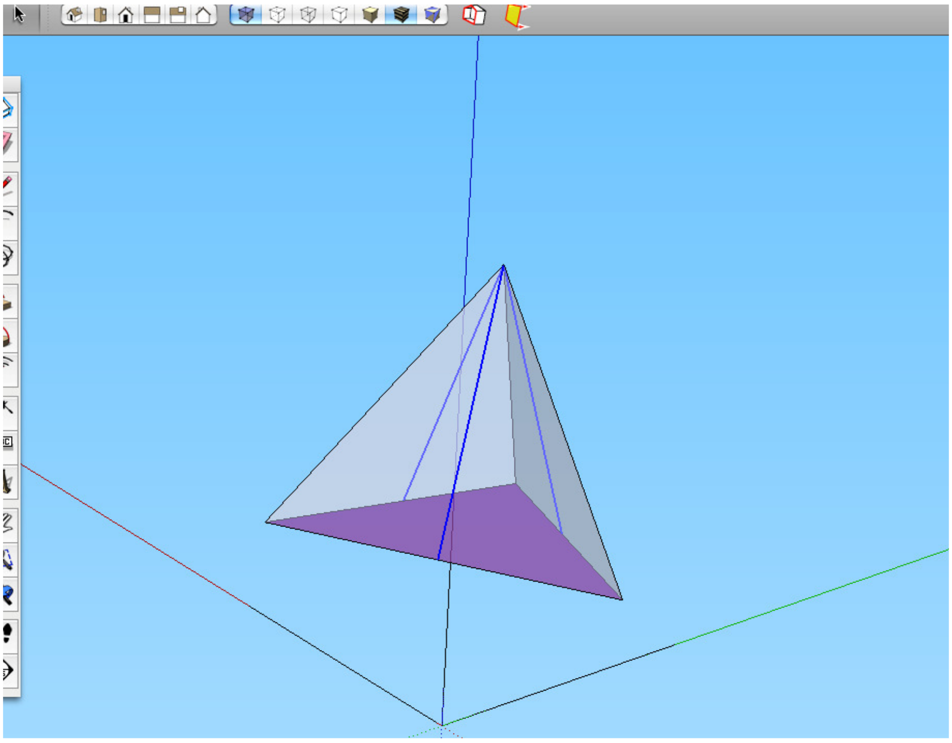


Dobbiamo verificare che la piramide è retta… cioè che ha gli apotemi congruenti.

Gli apotemi sono le altezze delle tre facce laterali.
Incominciamo col verificare che sono congruenti gli spigoli laterali della piramide.
Con Sketchup è molto facile, infatti possiamo copiare e spostare le tre facce del cubo su cui si trovano gli spigoli



Osserviamo che i tre spigoli della piramide sono congruenti (segmenti congiungenti un vertice del quadrato con il punto del lato opposto distante un terzo dallo spigolo opposto).
A questo punto è immediato concludere che le facce sono triangoli isosceli congruenti e, pertanto, hanno le altezze congruenti.



La piramide costruita è retta.

Ecco le tre fasi del percorso di soluzione del problema: