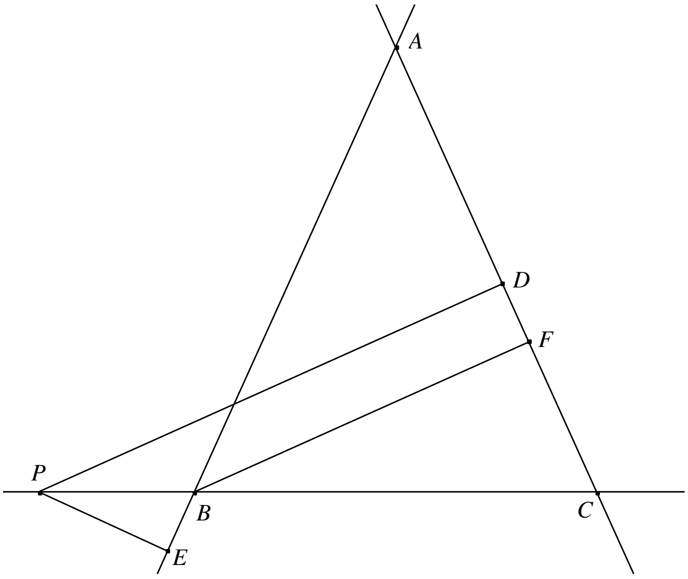
FLAT*landia*

***"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo"* [*(Edwin A. Abbott)*]**

Flatlandia 10-26 Maggio 2010

Il testo del problema:
Sia ABC un triangolo isoscele (AB e AC sono i lati uguali). Sul prolungamento di BC dalla parte di B si prenda un punto P e da esso si traccino le perpendicolari PD e PE rispettivamente alle rette dei lati AC e AB. Detta BF l'altezza del triangolo ABC relativa al lato AC, quale relazione esiste tra i segmenti PD, PE e BF ?
Se il punto P è interno al lato BC tale relazione sussiste ancora ? In caso negativo trovarne un'altra.



Commento
Abbiamo ricevuto quattordici (!) risposte così suddivise: una da un Educandato Statale, dieci dal biennio delle Scuole Superiori (sei da studenti di una stessa prima) e tre dal triennio delle Scuole Superiori (due del III anno e una addirittura del V anno [che dovrebbe essere considerata “fuori gara”]). Il problema poneva due domande: nel primo quesito si chiedeva di determinare la relazione esistente tra le lunghezze di tre segmenti indicati in figura; nel secondo quesito si chiedeva di verificare la sussistenza o meno della stessa relazione in seguito alla modifica della posizione di uno dei punti della precedente figura e, in caso di risposta negativa, di trovare la nuova relazione esistente tra detti segmenti.
Se da una parte constatiamo con soddisfazione la grande partecipazione alla soluzione dei problemi di Flatlandia, dall’altra dobbiamo rilevare una certa mancanza di accuratezza nella stesura delle risposte e, in alcuni casi, una scarsa attenzione alla costruzione delle figure, anche se i problemi connessi con l’avvicinarsi della conclusione dell’anno scolastico possono in parte giustificare una elaborazione “frettolosa”. Riteniamo comunque opportune ribadire alcune norme da seguire nella stesura delle soluzioni:
a) per la scrittura del testo occorre utilizzare un editor compatibile con Word 97-2003 (quindi evitare di inviare file con estensione docx); in particolare non possono essere accettati testi scritti a mano e poi copiati con lo scanner;

b) prima di inserire le figure, controllare che le etichette siano posizionate in modo chiaro in modo da non rendere le figure troppo "affollate" e quindi di difficile lettura [controllare anche che la figura sia aderente al testo del problema ed evitare l'uso del "disegnatore" di Word per la costruzione della figura];
c) se si decide di scrivere la soluzione come la dimostrazione di un teorema (con Ipotesi e Tesi) occorre esplicitare chiaramente anche la Tesi [ad esempio, non si può scrivere in modo generico "la relazione tra i lati …"].
Il problema di maggio conclude l'impegno di "lavoro" di quest'anno scolastico che ha visto la "rinascita" di Flatlandia.
Cogliamo l'occasione per ringraziare tutti coloro che hanno partecipato a questa rinnovata attività.
Per il prossimo anno scolastico ci auguriamo sia di ritrovare i nostri amici fedeli che di vedere aggiungersi nuovi partecipanti a condividere il progetto Flatlandia.

Sono pervenute risposte dalle seguenti Scuole:

- Educandato Statale "Agli Angeli", Verona (VR)
- LS "A. Banfi", Vimercate (MI)
- LS "P. Paleocapa", Rovigo (RO)
- LS "T. Gullace Talotta", Roma
- LS "B. Russell", Roma
- LS "Pitagora", Rende (CS)
- LS "Aristosseno", Taranto (TA)
- IIS "L. Cremona", Milano (MI)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Eleonora Distinto
Educandato Statale "Agli Angeli", Verona(VR)
[[…]] [Anche se la soluzione risulta sufficientemente corretta, non è possibile pubblicarla in quanto scritta in modo non conforme agli Standard stabiliti per i problemi di Flatlandia]

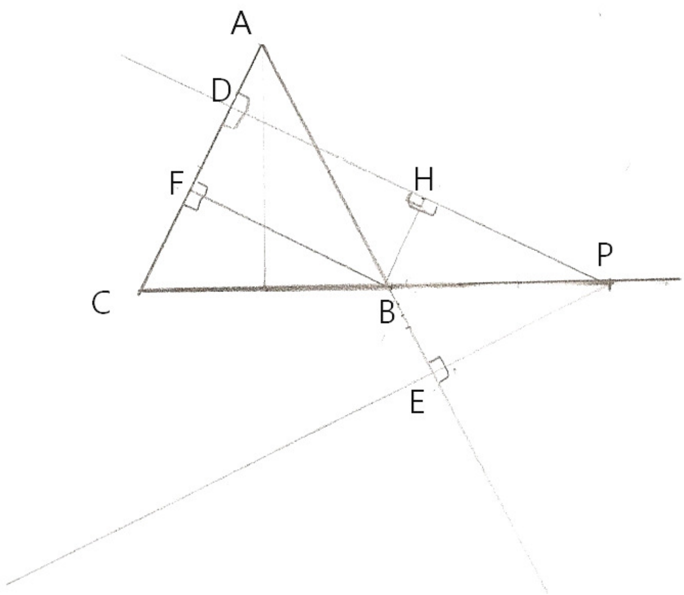
Matteo Gaudiello, Stefano Ronchi
Classe 1E, LS "A. Banfi", Vimercate (MI)
Hp:

– $AB \equiv CA$
– $PD \perp CA$
– $PE \perp AB$
– $BF \perp AC$

Th: Se $P \notin BC$, $PD \equiv PE+BF$

Se $P \in BC$? [$BF \equiv PD+PE$]

1. Se $P \notin BC$



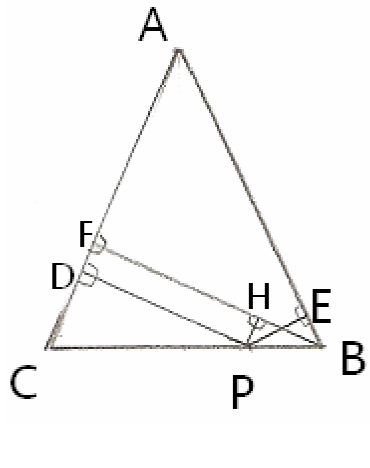
[questa figura “sembra” costruita “a mano”]

Traccio da B la perpendicolare BH a PD.
BHDF è un rettangolo per definizione, poiché ha 3 angoli retti e per il teorema sulla somma degli angoli interni di un poligono, anche il 4° deve essere retto.
Quindi $DH \equiv BF$ perchè lati opposti in un rettangolo.
Essendo $FCB+FBC \equiv \pi/2$ [$\angle FCB+\angle FBC = \pi/2$] perché angoli acuti di un triangolo rettangolo e $FBC+HBP \equiv \pi/2$ [$\angle FBC+\angle HBP = \pi/2$], poiché $FBH \equiv \pi/2$ [$\angle FBH = \pi/2$] come precedentemente dimostrato, e $CBP \equiv \pi$ [$\angle CBP = \pi$] , per la proprietà transitiva [per le proprietà della relazione di uguaglianza[risulta $\angle HBP = \angle FCB$ e quindi anche] $\angle HBP \equiv \angle FCB$. Ma $\angle FCB \equiv \angle ABC$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele, e $\angle ABC \equiv \angle PBE$ perché opposti al vertice, quindi per la proprietà transitiva [della congruenza fra angoli] $HBP \equiv EBP$.
Considero i triangoli rettangoli HPB e PBE, essi hanno:

- BP in comune,
- $\angle PBE \equiv \angle HBP$ come precedentemente dimostrato.

Quindi sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare $PE \equiv HP$ perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.
Ma $PD \equiv DH+HP$, quindi per la proprietà transitiva [per le proprietà della relazione di congruenza fra segmenti] $PD \equiv PE+BF$.

2. Se $P \in BC$



[anche questa figura “sembra” costruita “a mano”]

La relazione $PD \equiv PE+BF$ non sussiste più, infatti si ha che $BF \equiv PE+PD$ [[, poiché:]]
[A tale scopo] Traccio da P la perpendicolare PH a BF.
PHDF è un rettangolo per definizione, poiché ha 3 angoli retti e per il teorema sulla somma degli angoli interni di un poligono, anche il 4° deve essere retto.
Quindi $FH \equiv DP$ perchè [perché] lati opposti in un rettangolo.
$DCP+DPC \equiv \pi/2$ [$\angle DCP+\angle DPC = \pi/2$] perché angoli acuti in un triangolo rettangolo e $DPC+HPB \equiv \pi$ [$\angle DPC+\angle HPB = \pi/2$] , poiché $HPD \equiv \pi/2$ e $CPB \equiv \pi$ [$\angle HPD = \pi/2$ e $\angle CBP = \pi$], quindi per la proprietà transitiva [per le proprietà della relazione di uguaglianza risulta $\angle DCP = \angle HPB$ e quindi anche] $\angle DCP \equiv \angle HPB$, ma $\angle DCP \equiv \angle EBP$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele, allora per la proprietà transitiva [della congruenza fra angoli] $\angle HPB \equiv \angle EBP$.
Considero i triangoli rettangoli HPB e EPB, essi hanno:

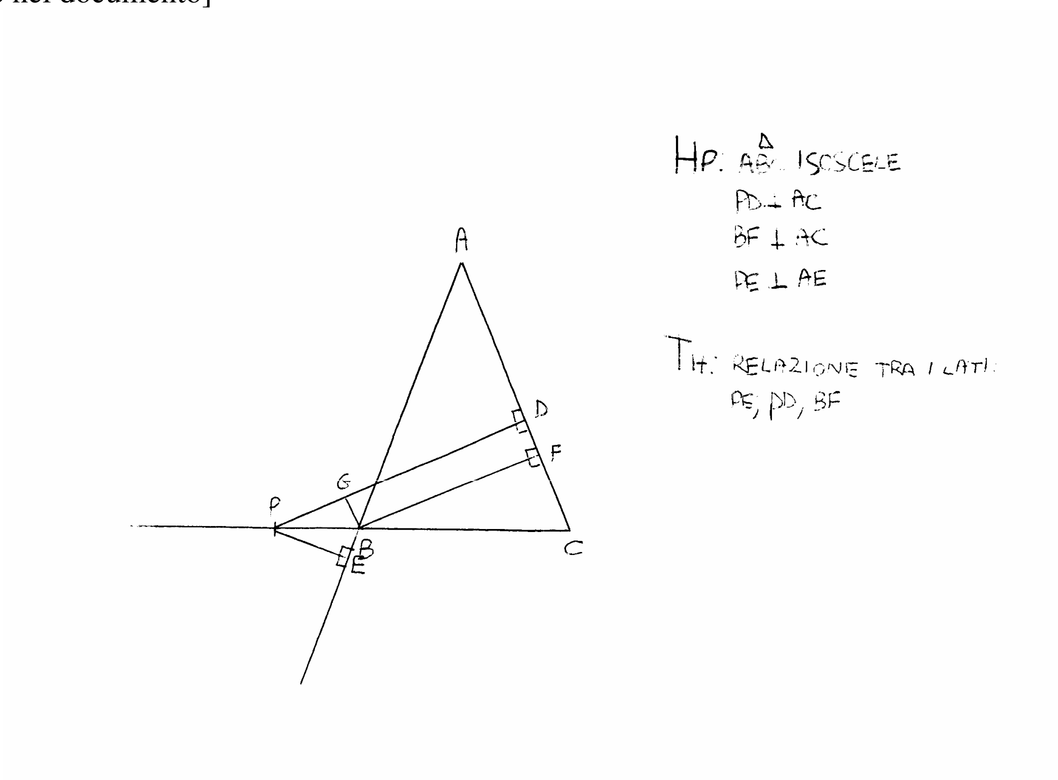
- PB in comune,
- $\angle HPB \equiv \angle EBP$ come precedentemente dimostrato.

Quindi sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare $PE \equiv HB$ perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.
Quindi dato che $BF \equiv FH+HB$, per la proprietà transitiva [per le proprietà della relazione di congruenza fra segmenti] $BF \equiv DP+PE$.

C.V.D.

Stefano Biffi
Classe 1E, LS "A. Banfi", Vimercate (MI)

[L'Ipotesi, la Tesi e la figura <u>non</u> possono essere elaborate "a mano", poi catturate con uno scanner e inserite nel documento]

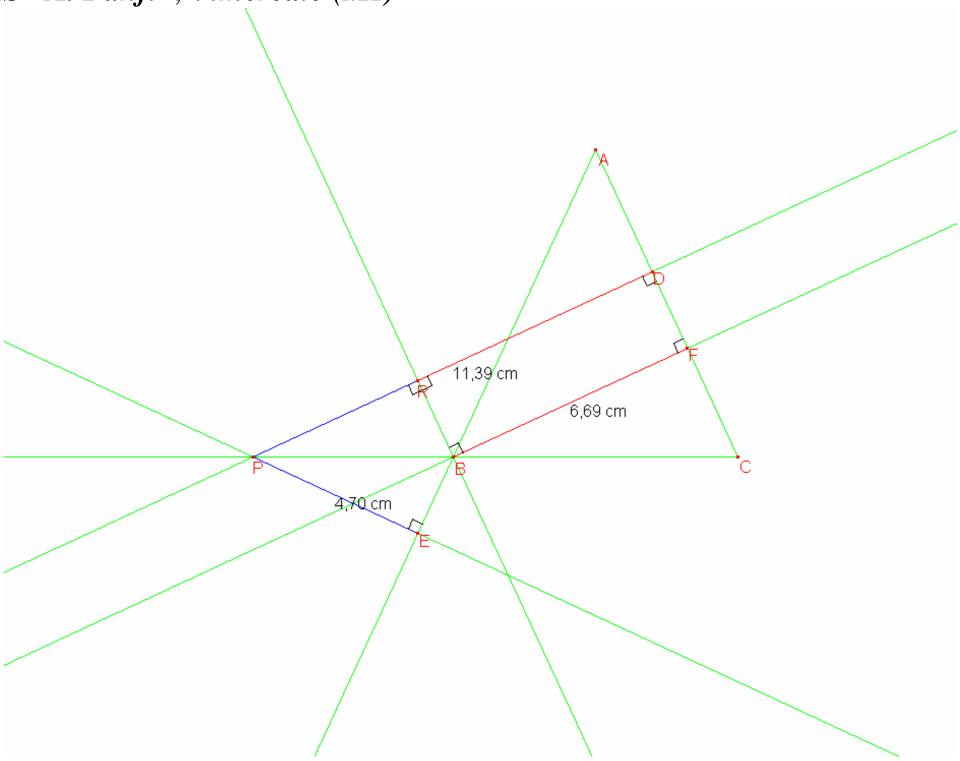


Dimostrazione:

Da B traccio la perpendicolare al segmento PD e sia G il punto in cui tale perpendicolare incontra il segmento PD.
Il quadrilatero GBDF [GBFD] è un rettangolo per definizione (gli angoli ∠GDF e ∠DFB sono retti per ipotesi, l'angolo ∠BGD è retto per costruzione, l'angolo ∠GBF [è retto] per differenza di angoli (360°-somma altri tre))[,] quindi GD è congruente a BF perché lati opposti in un rettangolo.
L'angolo ∠FCB è congruente all'angolo ∠ABC perché angoli alla base in un triangolo isoscele.
L'angolo ∠PBE è congruente all'angolo ∠ABC perché opposti al vertice.
Quindi per la proprietà transitiva della congruenza [fra angoli] l'angolo ∠ABC è congruente all'angolo ∠PBE.
L'angolo ∠BPE è congruente all'angolo ∠FBC perché complementari di angoli congruenti.
L'angolo ∠GPB è congruente all'angolo ∠FBC perché angoli corrispondenti formati dalle parallele PD e FB (perpendicolari a una stessa retta) e tagliate dalla trasversale PC.
Quindi gli angoli ∠GPB e ∠BPE sono congruenti per la proprietà transitiva della congruenza [fra angoli].
Considero i triangoli rettangoli PGB e PEB; essi hanno:
PB in comune
l'angolo ∠GPB congruente all'angolo ∠BPE come precedentemente dimostrato.
Perciò i due triangoli sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli. in particolare PG è congruente a PE perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.
Quindi PD è congruente alla somma di BF e di PE.

Se P appartiene a BC il lato PD è la differenza tra BF e PE [e la dimostrazione?].
c.v.d.

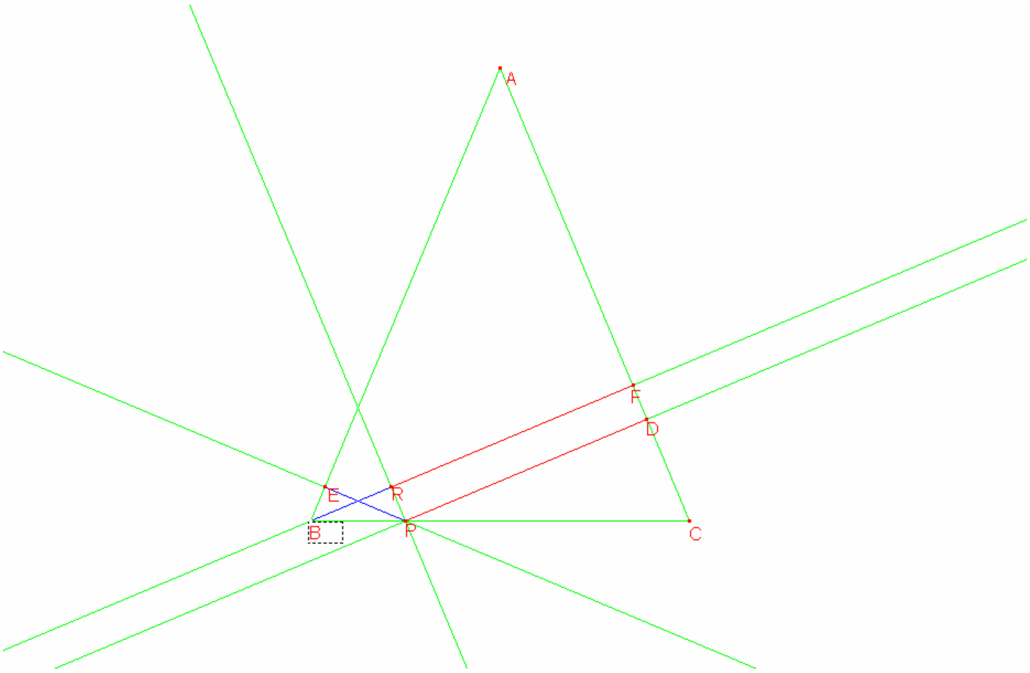
Nicolò Cristiani
Classe 1E, LS "A. Banfi", Vimercate (MI)



HP: AB = AC
PD perpendicolare AC
PE perpendicolare AB
BF perpendicolare AC

TH: PE+BF=PD

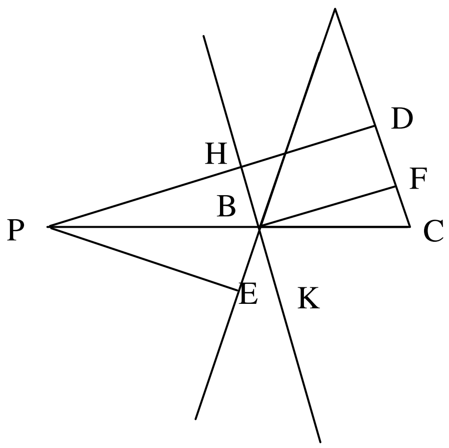
Traccio da B la perpendicolare a PD, che interseca PD nel punto R.
Quindi, essendo R un punto del segmento PD, PR+RD=PD.
Considero il quadrilatero BFDR: gli angoli ∠BFD e ∠FDR sono retti per HP [ipotesi], mentre l'angolo ∠BRD è retto per costruzione.
Quindi, poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero è di 360°, anche l'angolo RBF sarà retto. Quindi, avendo quattro angoli retti, BFDR è un rettangolo.
Poiché i lati opposti di un rettangolo sono congruenti, RD = BF.
[Inoltre] BR parallela CA perché perpendicolari allo stesso segmento PD.
Considero il triangolo isoscele ABC: [[l'angolo]] [risulta] ∠ABC=∠ACB perché angoli alla base di un triangolo isoscele l'angolo [e inoltre] ∠ACB=∠RBP perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele AC e RB (come precedentemente dimostrato) tagliate dalla trasversale PC.
Quindi ∠RBP=∠ABC per la proprietà transitiva della congruenza [fra angoli].
[Risulta anche] ∠PBE=∠ABC perché angoli opposti al vertice, quindi ∠PBE=∠RBP per la proprietà transitiva della congruenza [fra angoli].
Considero [infine] i triangoli rettangoli PRB e PBE.
[[L'angolo]] ∠PBE=∠RBP come precedentemente dimostrato [e] PB in comune.
Quindi sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare PR=PE, perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.
Quindi PE+BF=PD.



Se P fosse interno a BC, la relazione [cercata] diventerebbe PD=BF-PE perche [perché] RF=PD, per lo stesso motivo precedente (lati opposti di un rettangolo) e per dimostrare che PE congruente BR considero i triangoli rettangoli BPR e BEP:
PB in comune, l'angolo ∠EBP è congruente all'angolo ∠RPB, perché ∠EBP congruente a ∠ACB come precedentemente dimostrato, ∠RPB congruente ∠ACB per le proprietà del parallelismo [di chi?] e quindi, per la proprietà transitiva della congruenza [fra angoli] ∠EBP [è] congruente [a] ∠RPB. Perciò i due triangoli rettangoli sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare PE congruente BR perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

C.V.D.

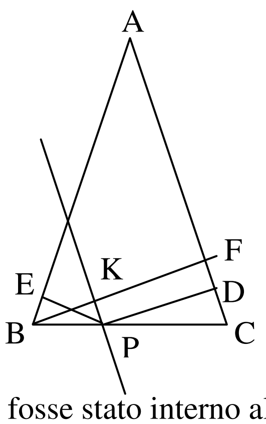
Marco Colnaghi
Classe 1E, LS "A. Banfi", Vimercate (MI)



Hp: AB=AC
PD perpendicolare AC
PE perpendicolare AB
BF perpendicolare AC

Th: PD= PE+BF

DIM: COSTRUZIONE PRELIMINARE:
Traccio la retta parallela al lato AC passante per il punto B, chiamiamo [chiamo] H il punto in cui incontra DP e K un punto sulla retta, appartenente [[alla parte di]] [al] semipiano delimitata [delimitato] da BC a cui non appartiene il punto A.
Poiché gli angoli ∠HDF e ∠DFB sono retti come l'angolo ∠DHB (perché HB, essendo parallela ad AC, sarà perpendicolare alla retta PD) allora si ha che il quadrilatero HDFB è un rettangolo per i criteri sui rettangoli.
Essendo un rettangolo un particolare parallelogramma allora si ha che HD=BF.
Gli angoli ∠ABC e ∠ACB sono congruenti [[per l' inverso del teorema sui triangoli isosceli]] [perché il triangolo ABC è isoscele sulla base BC]. Ma ∠ACB=∠KBC perché angoli alterni interni formati dalle rette parallele AC e HK, tagliate dalla trasversale CB.
Quindi ∠HBP=∠EBP perché angoli opposti al vertice ad angoli congruenti (l'angolo ∠ABC è congruente a ∠KBC per la proprietà transitiva alla [della] congruenza [fra angoli]) .
Considero ora i triangoli rettangoli EBP e PBH, essi hanno: PB in comune [e] ∠PBH=∠PBE come precedentemente dimostrato.
Quindi i due triangoli rettangoli sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare PE=PH perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.
Quindi, poiché PH=PE e HD=BF, allora [risulta che] PD è congruente alla somma di PE e BF.



Hp: AB=AC
PD perpendicolare AC
PE perpendicolare AB
BF perpendicolare AC
P appartiene a BC

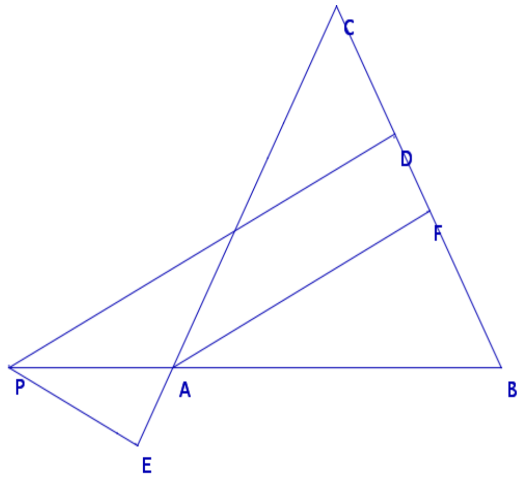
Th: BF=PD+EP

Se P fosse stato interno al lato BC:
COSTRUZIONE PRELIMINARE:
Traccio la retta parallela al lato AC passante per il punto P, questa incontra la retta BF in K.

Poiché gli angoli ∠PDF e ∠DFK sono retti come l'angolo ∠FKP (perché KP, essendo parallela ad AC, sarà perpendicolare alla retta PKF [KF]) allora si ha che il quadrilatero PDFK è un rettangolo per i criteri sui rettangoli [quali?].
Essendo un rettangolo un particolare parallelogramma allora si ha che KF=PD.
Gli angoli ABC e ACB sono congruenti [[per l' inverso del teorema sui triangoli isosceli]] [perché il triangolo ABC è isoscele sulla base BC]. Ma ∠ACB=∠KPB perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele AC e PK, tagliate dalla trasversale CB.
Quindi ∠KPB=∠KBP [∠KPB=∠EBP] per la proprietà transitiva della congruenza [fra angoli].
Considero ora i triangoli rettangoli EBP e PBK, essi hanno:
PB in comune.
KPB=KBP [∠KPB=∠EBP] come precedentemente dimostrato.
Quindi i due triangoli rettangoli sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare PE=KB perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.
Quindi, poiché KF=PD e PE=KB, allora [segue che] BF è congruente alla somma di PD e EP.

C.V.D

Ludovico Spada
Classe 1E, LS "A. Banfi", Vimercate (MI)



Hp: AB = BC [AC]
BF perpendicolare CA
PD perpendicolare CA
PE perpendicolare CA [AB]
Th: relazione PD, BF e PE

[Le etichette della figura sono totalmente sbagliate e non aderenti al testo del problema. La soluzione fa invece riferimento a una figura corretta.]

[[L'angolo]] [Risulta] ∠PBE = ∠ABC perchè [perché] angoli opposti al vertice, ma ∠ABC = ∠ACB perchè [perché] angoli alla base di un triangolo isoscele, quindi ∠PBE = ∠ACB.
Gli angoli ∠PEB e ∠BFC sono retti, quindi [[gli angoli]] [risulta] ∠EPB = ∠FBC [perché?].
I triangoli PBE, FCB e PDC sono simile [simili] perchè [perché] hanno tutti e tre gli angoli [corrispondenti] congruenti.
Quindi vale la seguente equazione:

Proporzioni tra due lati dei triangoli PDC e BFC

$$\frac{PD}{BF}=\frac{BC+PB}{BC}$$

$$\frac{PD}{BF}=1+\frac{PB}{BC}$$

Proporzioni tra due lati dei triangoli BFC e PEB

$$\frac{BF}{PE}=\frac{BC}{PB}$$

$$\frac{BF\cdot PB}{PE}=BC$$

Semplifica delle espressioni sostituendo la prima soluzione con la seconda soluzione

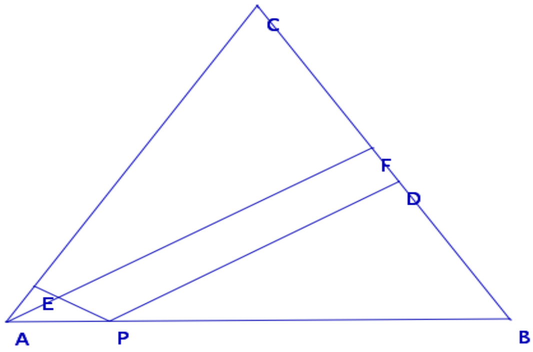
$$\frac{PD}{BF}=1+\frac{PB\cdot PE}{BF\cdot PB}$$

$$\frac{PD}{BF}=\frac{BF+PE}{BF}$$

$$PD=BF+PE$$

Quindi la relazione [cercata] è [[che]] PD = BF+PE.

Se il punto P fosse interno al lato BC:



Hp: AB = BC [AC]
BF perpendicolare CA
PD perpendicolare CA
PE perpendicolare CA [AB]
Th: relazione PD, BF e PE

[Le etichette della figura sono totalmente sbagliate e non aderenti al testo dl problema. La soluzione fa invece riferimento a una figura corretta.]

[[L'angolo]] [Risulta] ∠EBP = ∠DCP, perchè [perché] angoli alla base di un triangolo isoscele, ma [[l'angolo]] ∠BEP = ∠PDC perchè [perché] entrambi retti.
Quindi gli angoli ∠EPB e ∠DPC sono congruenti.
Gli angoli ∠FCP e ∠DCP sono congruenti perchè [perché] in comune [coincidenti], quindi sono congruenti a ∠EBP.
Gli angoli ∠BFC e ∠PDC sono entrambi retti, quindi sono congruenti.
Gli angoli ∠BFC, ∠PDC e ∠BEP sono congruenti.
Di conseguenza i triangoli PDC, CFB e PEB sono simili.
Quindi vale la seguente equazione:

Proporzioni tra due lati dei triangoli PDC e BFC

$$\frac{PD}{BF} = \frac{BC - PB}{BC}$$

$$\frac{PD}{BF} = 1 - \frac{PB}{BC}$$

Proporzioni tra due lati dei triangoli BFC e PEB

$$\frac{BF}{PE} = \frac{BC}{PB}$$

$$\frac{BF \cdot PB}{PE} = BC$$

Semplifica delle espressioni sostituendo la prima soluzione con la seconda soluzione

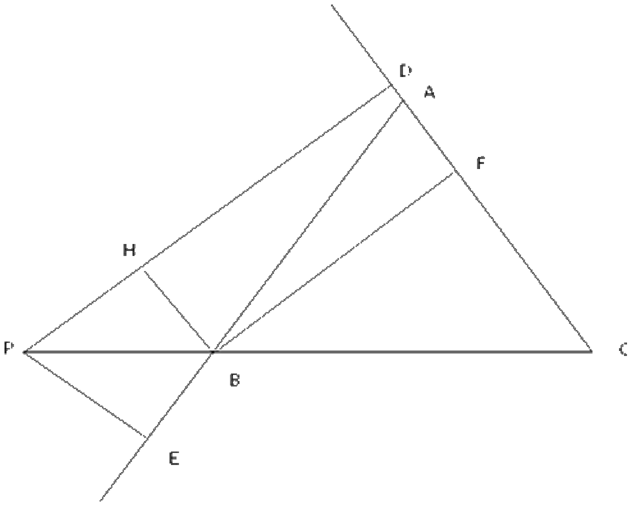
$$\frac{PD}{BF} = 1 - \frac{PB \cdot PE}{BF \cdot PB}$$

$$\frac{PD}{BF} = \frac{BF - PE}{BF}$$

$$PD = BF - PE$$

Quindi la relazione [cercata] [[non vale più e adesso]] è [ora] PD = BF – PE.

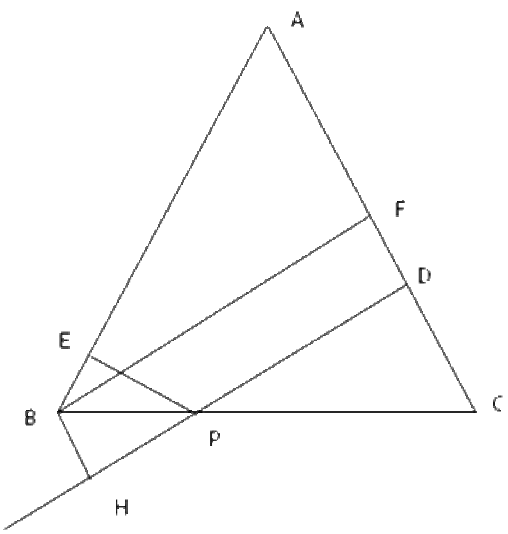
Lorenzo Sala
Classe 1E*, *LS "A. Banfi"*, *Vimercate (MI)



Ipotesi: ABC triangolo isoscele [AB = AC]
PD ⊥ AC
PE ⊥ AE
BF ⊥ AC
Tesi: PE+BF=PD

Dimostrazione: Per le proprietà dei triangoli isosceli l'angolo ∠ABC è congruente all'angolo ∠ACB in quanto angoli alla base in un triangolo isoscele. I triangoli rettangoli BCF e PCD hanno congruenti i due angoli retti e hanno in comune l'angolo ∠PCA, quindi, poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre un angolo piatto, gli angoli ∠DPC e ∠FBC sono congruenti. Ma l'angolo ∠PBE è opposto al vertice dell'angolo ∠ABC, quindi, per la proprietà transitiva della congruenza [fra angoli], gli angoli ∠PBE e ∠ACB sono congruenti. I triangoli rettangoli PBE e PCD hanno congruenti i due angoli retti e hanno congruenti gli angoli PBE e ACB come precedentemente dimostrato, quindi, poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre un angolo piatto, gli angoli BPE e CPD sono congruenti.
Traccio la perpendicolare a PD passante per B [e indico con H il punto di intersezione con PD].
Considero i triangoli rettangoli PBE e PHB essi hanno: gli angoli ∠BPE e ∠BPH congruenti, come precedentemente dimostrato, e PB in comune.
Quindi sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare PE è congruente a PH perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.
Il quadrilatero HBFD è un rettangolo per i criteri dei rettangoli [quali?] in quanto avente tre angoli retti (∠BHD per costruzione, ∠BFD e ∠HDF per ipotesi), quindi, per le proprietà dei rettangoli, i lati opposti BF e HD sono congruenti.
Come precedentemente dimostrato, PE=PH e BF=HD. Ma PD=PH+HD, quindi PE+BF=PD.
C.V.D.

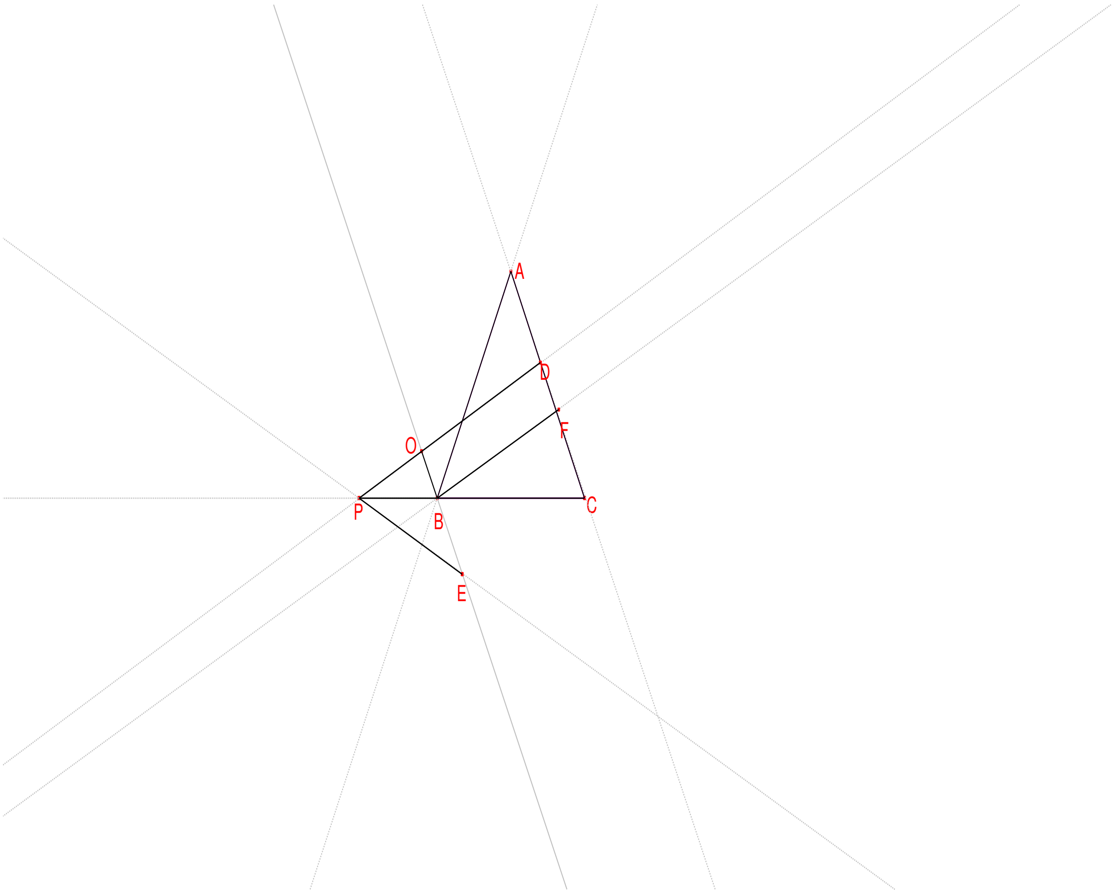
Se P appartiene a BC



Ipotesi: ABC triangolo isoscele [AB = AC]
PD ⊥ AC
PE ⊥ AE
BF ⊥ AC
Tesi: PE+PD=BF

Dimostrazione: Prolungo PD e chiamo H il punto in cui la perpendicolare a PD passante per B incontra la retta PD.
Per le proprietà dei triangoli isosceli l'angolo ∠ABC è congruente all'angolo ∠ACB in quanto angoli alla base in un triangolo isoscele. I triangoli rettangoli PEB e PCD hanno congruenti i due angoli retti e hanno congruenti ∠EBP e ∠ACB, quindi, poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre un angolo piatto, gli angoli ∠EPB e ∠DPC sono congruenti. Ma l'angolo ∠BPH è opposto al vertice dell'angolo ∠DPC, quindi ∠BPH è congruente ad ∠ACB [∠DPC], perciò per la proprietà transitiva della congruenza [fra angoli], gli angoli ∠BPH e ∠EPB sono congruenti.
Considero i triangoli rettangoli PBE e PHB essi hanno: gli angoli ∠BPE e ∠BPH congruenti come precedentemente dimostrato e PB in comune.
Quindi sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare PE è congruente a PH perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.
Il quadrilatero HBFD è un rettangolo per i criteri dei rettangoli [quali?] in quanto avente tre angoli retti; quindi, per le proprietà dei rettangoli, i lati opposti BF e HD sono congruenti.
Come precedentemente dimostrato, PE=PH e BF=HD. Ma PD+PH=HD, quindi PE+PD=BF.
C.V.D.

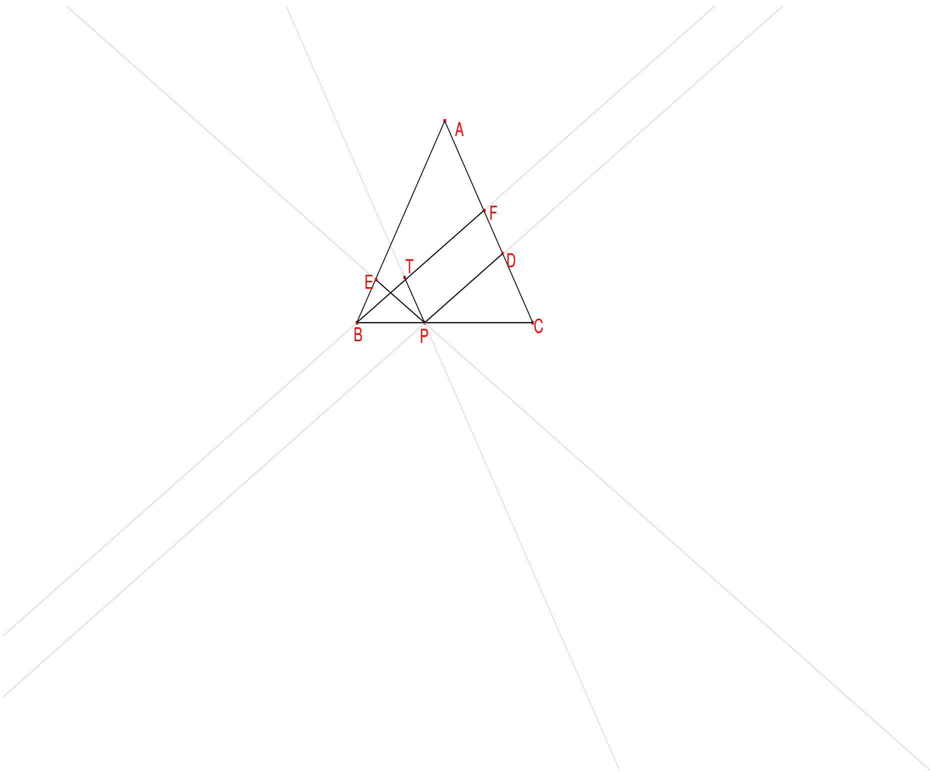
Classe 2B*, *LS "Pitagora"*, *Rende (CS)



[La figura è completamente sbagliata in quanto non rispetta le condizioni poste dal problema: in particolare PD non è perpendicolare alla retta di AC, PE non è perpendicolare alla retta di AB, ecc. …]

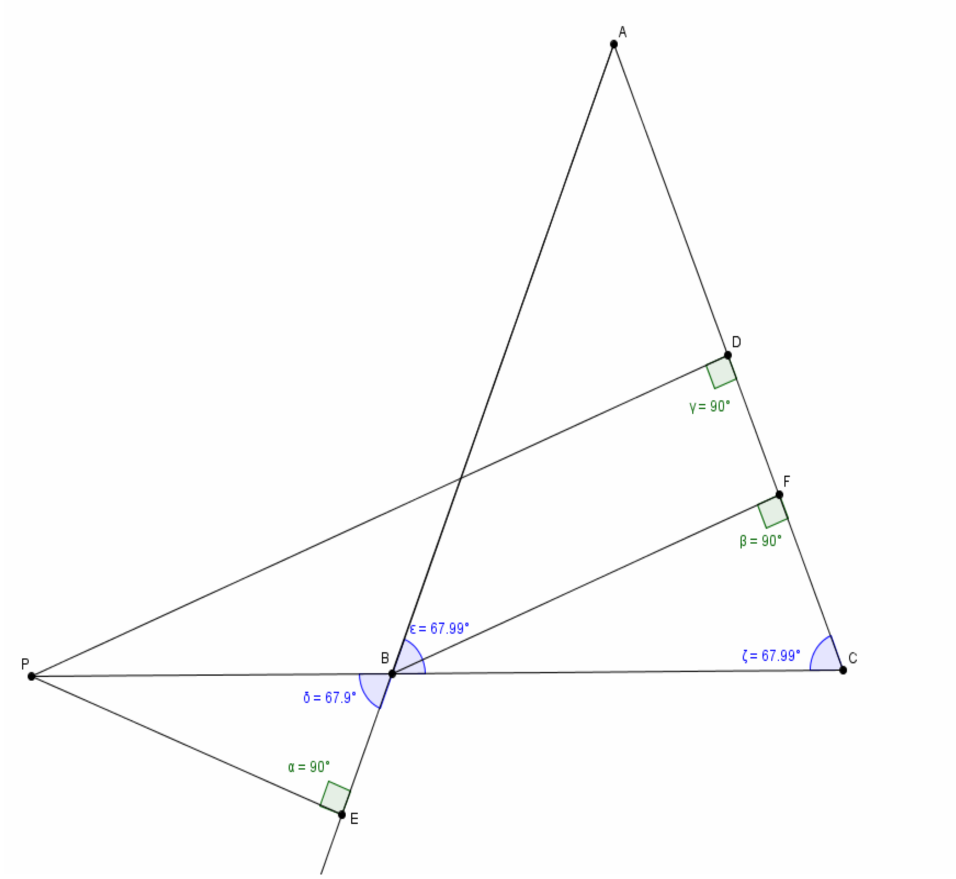
1) Facendo delle prove sulla figura con il Cabrì [Cabri] , osservo che PD ≅ PE + BF ; infatti OD ≅ BF [come è stato individuato il punto O?] perché lati opposti del rettangolo [perché tale quadrilatero è rettangolo?] OBDF [OBFD].

Dimostro che PO ≅ PE.
Considero i triangoli POB e PEB. Essi hanno:
PE^B ≅ PO^B [∠PEB ≅ ∠POB] perché retti.
PB è in comune.
OP^B ≅ BP^E [∠OPB ≅ ∠BPE] per differenza di angoli in quanto, PB^E ≅ AB^C [∠PBE ≅ ∠ABC] perché opposti al vertice e AB^C ≅ AC^B [∠ABC ≅ ACB] perché angoli alla base di [del triangolo isoscele] ABC .
I due triangoli sono congruenti per il II criterio di congruenza.
Di conseguena [conseguenza]:
PO ≅ PE



[Anche questa figura è completamente sbagliata in quanto non rispetta le condizioni poste dal problema]
2) Nel secondo caso P appartiene a BC.
Traccio da P la perpendicolare PT a BF . Considero i triangoli BEP e BPT.
Essi hanno: BE^P ≅ PT^B [∠PEB ≅ ∠PTB] perché retti e BP è in comune. TP^B ≅ EB^P [∠TPB ≅ ∠EBP] perché entrambi congruenti a DC^P [∠DCP] ; infatti EB^P ≅ DC^P [∠EBP ≅ DCP] perché angoli alla base del triangolo ABC, mentre TA^B ≅ DC^P [∠TPB ≅ ∠DCP] perché corrispondenti rispetto le parallele AC e TP [perché AC e TP sono parallele?] tagliate da BC.
I triangoli sono congruenti per il II criterio generalizzato e in particolare EP ≅ BT.
PD ≅ TF perché lati opposti del rettangolo TPDF [perché il quadrilatero TPDF è un rettangolo?], quindi BF ≅ PD + EP.

Cristina Caputo, Giacomo Di Nucci, Massimiliano Malaponte, Luca Mariotti, Davide Simoncelli
Classe 2D, LS "T. Gullace Talotta", Roma



1) P esterno a BC

HP/ AB = AC [∠CBA = ∠ACB]
∠BFC = ∠PDC = ∠BEP = 90°

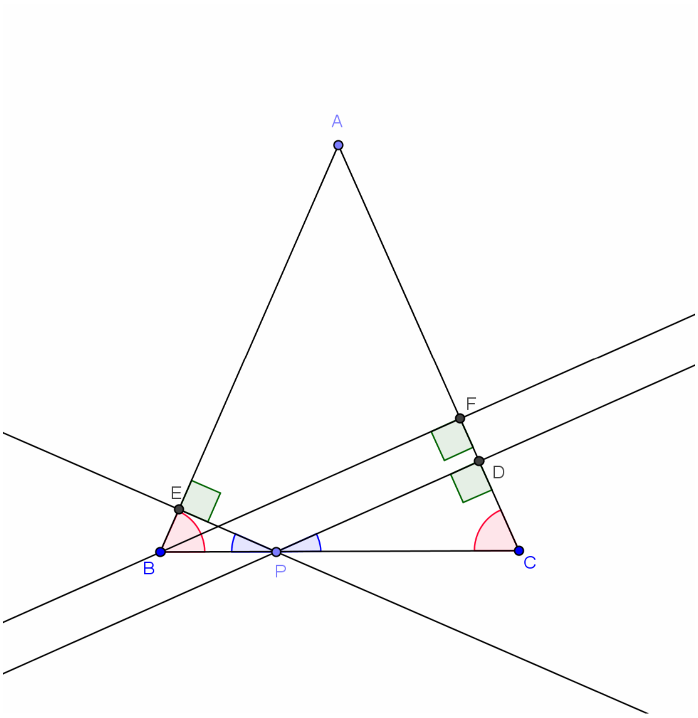
TH/ Relazione tra i segmenti PD, PE e BF
[BF + PE = PD]

Prendendo in considerazione i triangoli PDC, BFC e BEP, possiamo affermare che sono simili in quanto hanno:

- Gli angoli ∠BEP, ∠BFC e ∠PDC uguali poiché retti
- Gli angoli ∠ACB, ∠CBA e ∠PBE uguali poiché ∠B= ∠C perché il triangolo ABC è isoscele [sulla base BC] e ∠PBE= ∠CBA perché opposti al vertice

Di conseguenza i lati dei tre triangoli sono tutti in proporzione tra loro . Allora:
PE : PD = PB : (PB + BC) [Facendo riferimento ai triangoli PBE e PCD]
PE : BF = PB : BC [Facendo riferimento ai triangoli PBE e BCF]
Quindi:
a. (PB + BC) : PB = PD : PE [Facendo riferimento ai triangoli PBE e PCD]
b. BC : PB = BF : PE [Facendo riferimento ai triangoli PBE e BCF]
Applicando la proprietà del componendo [comporre] a quest'ultima proporzione:
c. (BC + PB) : PB = (BF + PE) : PE
In conclusione, considerando le proporzioni a e c e per l'unicità del quarto proporzionale: **BF + PE = PD**

1) P interno a BC



HP/ AB = AC [∠CBA = ∠ACB]
∠BFC = ∠PDC = ∠BEP = 90°
P∈ BC

TH/ Relazione tra i segmenti PD, PE e BF
[PD = BF – PE]

Consideriamo i triangoli BPE e PCD che sono simili perché:

- [[L'angolo]] ∠EBP=∠DCP per ipotesi, perché ABC è isoscele [sulla base BC];
- [[L'angolo]] ∠BEP=∠CDP=90°.

Consideriamo ora i triangoli BPE e BFC che sono simili perché:

- [[L'angolo]] ∠BEP=∠BFC=90°;
- [[L'angolo]]∠ EBP=∠FCB per ipotesi.

Considerando i triangoli simili EPB e PCD possiamo impostare la seguente proporzione:

PD:PE=PC:PB.

Possiamo però vedere PC come differenza tra BC e PB, quindi:

PD:PE=(BC-PB):PB

Considerando ora i triangoli simili BFC e BEP possiamo impostare la seguente proporzione:

BC:PB=BF:PE.

Applichiamo ora la proprietà dello scomporre e otteniamo:

(BC-PB):PB=(BF-PE):PE.

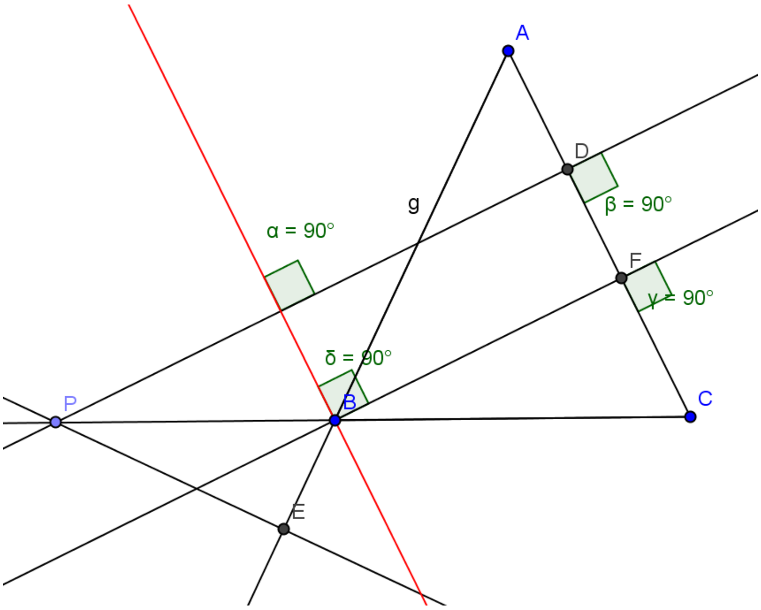
Notiamo che in entrambe le proporzioni troviamo un membro uguale cioè (BC-PB):PB.
Perciò possiamo dire che:

PD:PE=(BF-PE):PE.

Essendo [[PE presente in entrambi i membri]] [i conseguenti della proporzione uguali], allora:

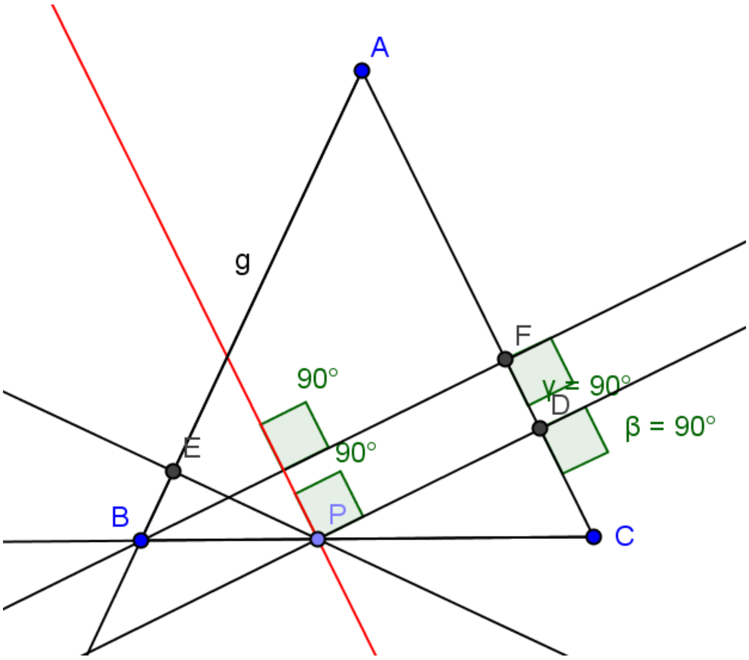
PD=BF-PE.

Simone Fragasso*, *Gianluca Giallantini*, *Leonardo Gilenardi
Classe 2D*, *LS "B.Russell"*, *Roma



P esterno a BC

Hp. AB ≅ AC
PD⊥AC, PE⊥AB
BF⊥AC
Th. relazione che intercorre tra PD, PE, BF [PD ≅ PE + BF]
Dimostrazione:
$A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$ per Hp, $P\hat{B}E \cong A\hat{B}C$ poichè [poiché] opposti al vertice => $A\hat{C}B \cong P\hat{B}E$ per la proprietà transitiva della congruenza [fra gli angoli].
Il triangolo [Per i triangoli vale la relazione] $PDC \approx PBE$ perché [[l'angolo]] $P\breve{E}B \cong P\hat{D}C$ perché retti per Hp e perché [[l'angolo]] $A\hat{C}B \cong B\hat{P}E$ come dimostrato in precedenza
=> [[l'angolo]] $B\hat{P}E \cong D\hat{P}C$.
Costruiamo LB⊥PD [nella figura manca il punto L], LB⊥BF [perché?], si ha che BF//PD perché perpendicolari alla stessa retta AC
=>LB//DF perché perpendicolari alla stessa retta PD, con PD⊥AC e BF⊥AC per Hp
=>LBFD è un rettangolo => LD≈BF [LD ≅ BF]
=>il triangolo LPB≈PBE [il triangolo LPB è simile al triangolo EPB] perché [[l'angolo]] $P\breve{L}B \cong P\breve{E}B$ poiché retti e [[l'angolo]] $L\hat{P}B \cong B\hat{P}E$ come dimostrato in precedenza e PB≈PB [PB ≅ PB] per proprietà riflessiva della congruenza [fra segmenti]
=>PL≈PE [PL ≅ PE] => PD=PL+LD =>PD≈PE+BF [PD ≅ PE + BF] (c.v.d.)



P interno a BC

Dimostrazione:

costruiamo IP ⊥FB [nella figura manca il punto I], IP ⊥PD [perché?]

FD⊥BP [FD⊥BF] per Hp =>IP// FD perchè [perché] perpendicolari alla stessa retta BF

BF⊥AC , PD⊥AC per Hp => BF//PD perchè [perché] perpendicolare [perpendicolari] alla stessa retta AC

=>IPDF è un rettangolo =>IF≈PD [IF ≅ PD]

L'angolo [Per gli angoli risulta] $B\hat{P}I \cong A\hat{C}B$ perché angoli corrispondenti formati dalle rette [parallele] FC//PI [FC e PI] tagliate dalla trasversale BC e [[l'angolo]] $A\hat{C}B \cong A\hat{B}C$ per Hp

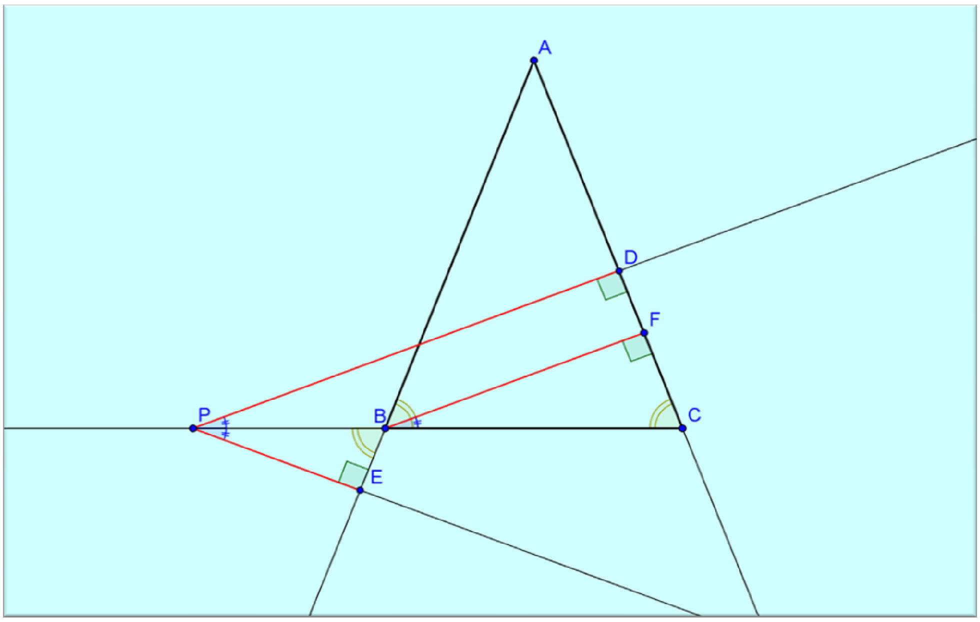
=> [[l'angolo]] $A\hat{B}C \cong B\hat{P}I$ per la proprietà transitiva della congruenza [fra angoli]

Il triangolo EBP ≅ IBP [I triangoli EBP e IBP sono congruenti] perché:

- [[L'angolo]] $I\hat{P}B \cong A\hat{B}C$ come dimostrato in precedenza
- [[L'angolo]] $B\hat{E}P \cong B\hat{I}P$ perché retti
- BP≈BP [BP≅BP] per proprietà riflessiva della congruenza [fra segmenti]

=> EP≈IB [EP≅IB] => BF≈IB+IF [BF≅IB+IF] =>BF≈PE+PD [BF≅PE+PD] (c.v.d.)

Luca De Salvia, Carlo Gasparetto
Classe 2A, LS "P.Paleocapa", Rovigo (RO)



Abbiamo:

$$\overline{PD} = \overline{PC}\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}};\ \overline{BF} = \overline{BC}\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}};\ \overline{PE} = \overline{PB}\frac{\overline{PE}}{\overline{PB}}$$

Ora, vediamo che: $\widehat{PDC} \cong \widehat{BFC} \cong \widehat{PEB} \cong \hat{R}$ [perché angoli retti] Per Ipotesi;

$\widehat{DCP} \cong \widehat{ABC} \cong \widehat{PBE}$ Perché angoli alla base di un triangolo isoscele e opposti al vertice;

Di conseguenza i triangoli $PDC; BFC$ e PBE sono simili perche [perché] aventi 3 angoli rispettivamente isometrici.

Di conseguenza:

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PB}} = \cos\widehat{DPC}$$

Per comodità chiameremo questo valore ε.

Quindi:

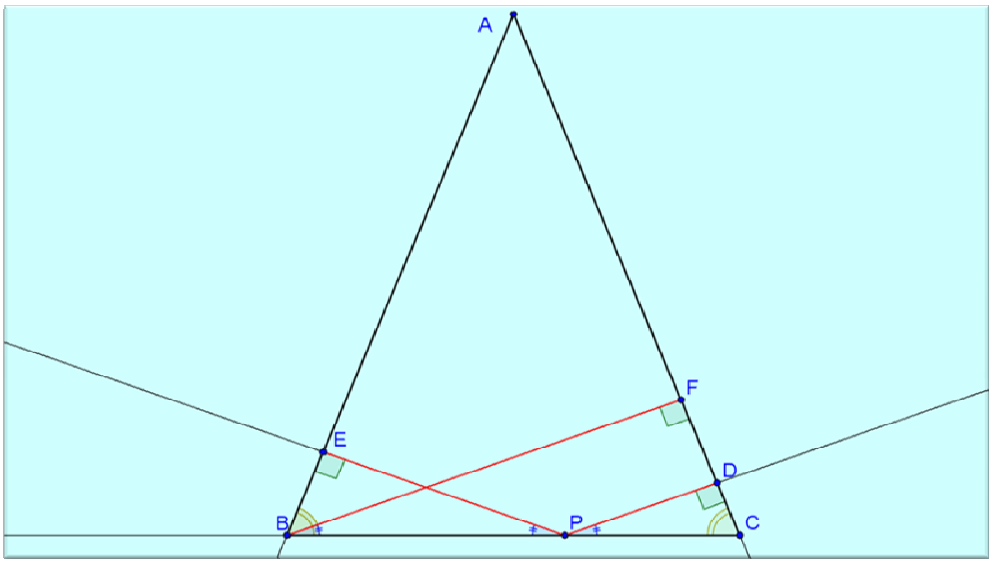
$$\overline{PD} = \varepsilon\overline{PC} = \varepsilon(\overline{PB} + \overline{BC}) = \varepsilon\overline{PB} + \varepsilon\overline{BC} = \overline{PE} + \overline{BF}$$

Oppure, usando funzioni trigonometriche:

$$\overline{PD} = \overline{PC}\cos\widehat{DPC} = \overline{PB}\cos\widehat{DPC} + \overline{BC}\cos\widehat{DPC} = \overline{PE} + \overline{BF}$$

Quindi:

$$\boldsymbol{\overline{PD} = \overline{PE} + \overline{BF}}$$



In caso P sia interno a BC, i triangoli PDC, BFC e PBE rimangono simili e i rapporti tra i lati sono invariati, quindi abbiamo:

$$\overline{PD} = \overline{PC}\cos\widehat{DPC} = (\overline{BC} - \overline{PB})\cos\widehat{DPC} = \overline{BF} - \overline{PE}$$

$$\Rightarrow \overline{PD} = \overline{BF} - \overline{PE}$$

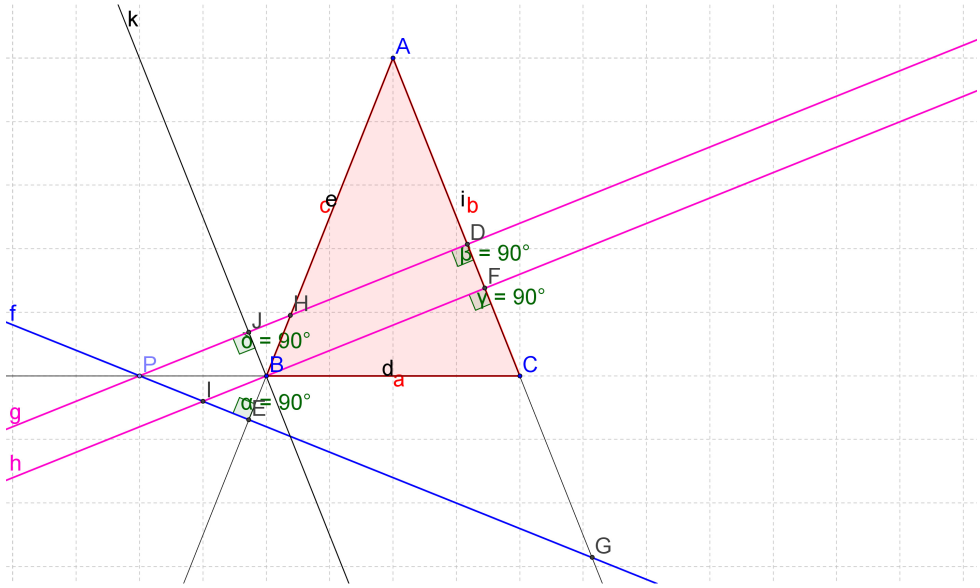
Alessio Sela
Classe 3F, LS "P.Paleocapa", Rovigo (RO)

Risoluzione 1° caso

Dal disegno qui sotto riportato si può notare che essendo PD $\perp$ AC e BF $\perp$ AC, per transitività [la relazione di perpendicolarità (tra rette) non è transitiva], PD\\BF [perché rette perpendicolari a una stessa retta sono tra loro parallele]. Traccio da B una [la] retta $\perp$ [perpendicolare] a PD e trovo J [indico con J il punto di intersezione di tale retta con PD] e posso dire che BF = PD – PJ poichè [poiché] BJDF è un rettangolo [perché?] e quindi JD = BF.

Analizzando i 2 triangoli PJB e PEB posso dire che sono isometrici [perché?].

Quindi PJ = PE => ***BF = PD - PE***



Risoluzione 2°caso

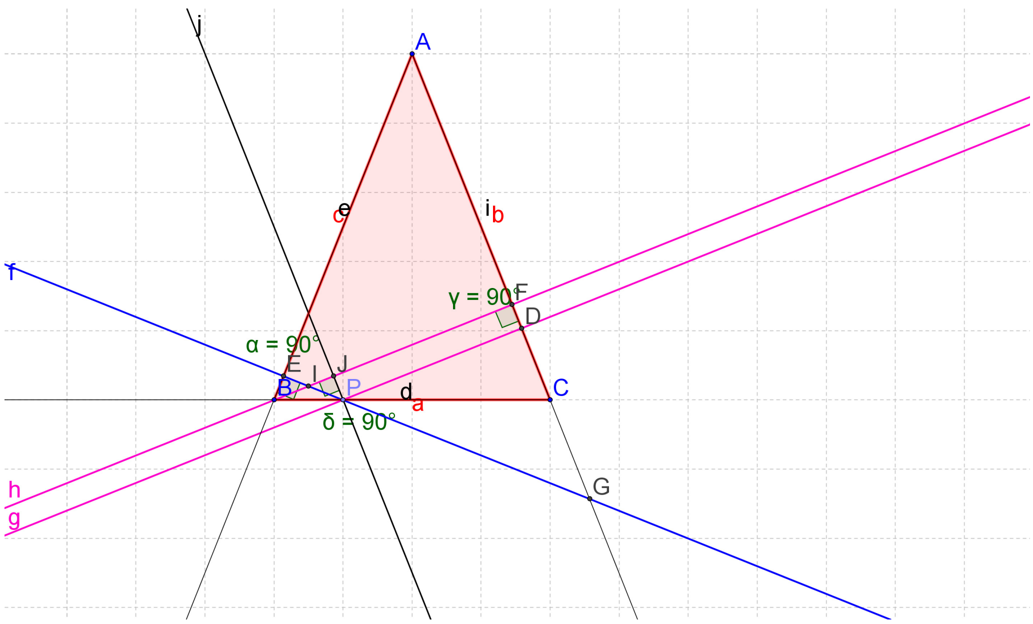
Nel caso in cui P sia interno a BC, la relazione cambia in quanto BF>PD, mentre prima [nel caso precedente] BF<PD.

Poiché PJFD è un rettangolo, essendo gli angoli JFD = FDP = PJF = 90° poiché [in quanto] rispettivamente JF $\perp$ FD e PD $\perp$ DF e BJ $\perp$ JP, [di conseguenza] JF = PD.

Confrontando i triangoli BEP e BJP posso dire che sono isometrici poiché hanno PB in comune e BEP = BJP = 90° poiché BJ $\perp$ JP e PE $\perp$ EB, deduco quindi che PE = BJ [non è sufficiente per avere l'isometria dei triangoli].

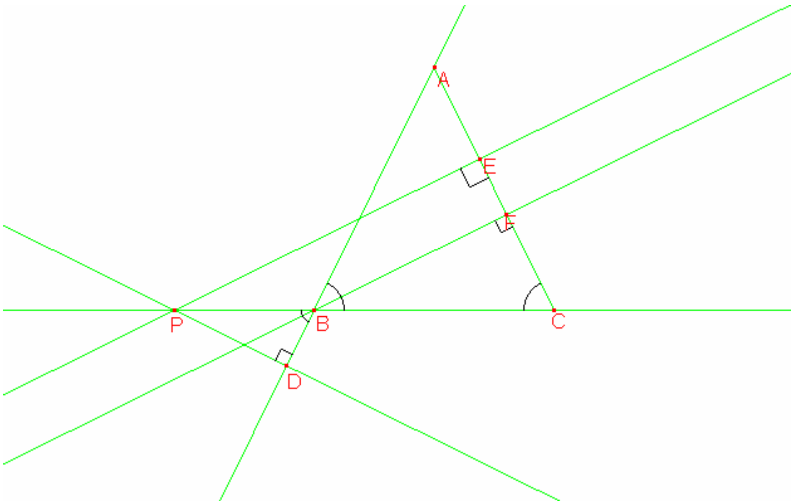
Sapendo che BF = BJ + JF e che BJ = PE e JF = PD, posso infine dedurre che

BF = PE + PD

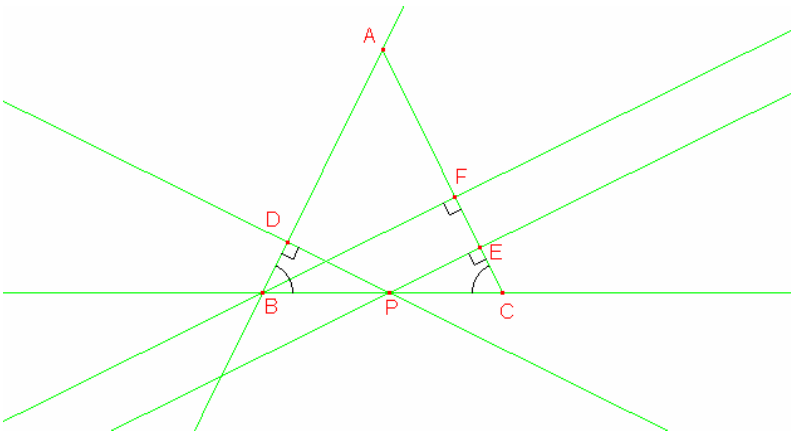


Classe 3E, ***LS "Aristosseno"***, ***Taranto (TA)***

Dalla figura si osserva che i triangoli rettangoli PEC , BFC e PDB sono simili .I primi due triangoli rettangoli hanno infatti l'angolo ∠BCA in comune ed essendo ∠BCA = ∠ABC perché il triangolo dato è isoscele [sulla base BC] e ∠ABC = ∠PBD perché angoli opposti al vertice, anche il terzo triangolo PDB è simile agli altri due. La proporzionalità fra lati omologhi che sussiste fra triangoli simili ci porta a scrivere la proporzione seguente : PE : PC = BF : BC = PD : PB .
Applicando la proprietà dello scomporre alla prima proporzione si ha:
(PE-BF):(PC-BC)=BF:BC ovvero (PE-PF):PB =BF:BC [(PE-BF):PB=BF:BC] e poiché BF:BC =PD:PB dal confronto di queste ultime due proporzioni, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti, si ha:
(PE-BF):PB = PD : PB. In questa ultima proporzione sono uguali i conseguenti e perciò sono anche uguali gli antecedenti, cioè : PE – BF = PD.



Se il punto P è preso internamente al lato BC del triangolo la relazione cambia.



In questo caso, infatti, restando il fatto che i tre triangoli rettangoli sono simili, si avranno le proporzioni seguenti: BF : BC = PD : PC = PE : BP [BF : BC = PD : PB = PE : PC]
Applicando ancora la proprietà dello scomporre alla prima di queste si ottiene:
(BF-PD):(BC-PC)=PD:PC [(BF-PD):(BC-PB)=PD:PB] ovvero (BF-PD):BP = PD:PC [(BF-PD):PC = PD:PB] poiché PD:PC = PE:BP [PD:PB = PE:PC] per la proprietà transitiva si ha: (BF-PD):BP = PE : BP [(BF-PD):PC = PE : PC] e da questa deduciamo che PF-PD=PE [BF-PD = PE].