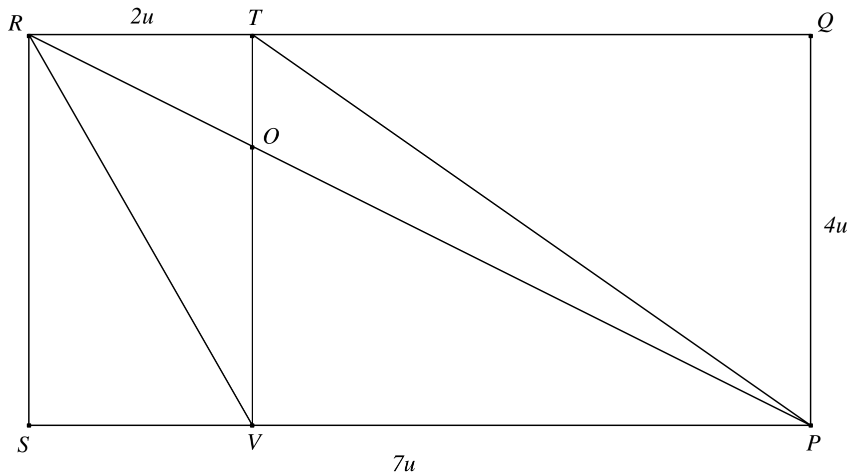
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" ***[(Edwin A. Abbott)]***

Flatlandia 11-26 Febbraio 2010

Il testo del problema:
Nel rettangolo *SPQR*, i lati *SP* e *PQ* misurano, rispetto a una stessa unità di misura, 7 e 4. Preso un punto *T* sul lato *QR*, distante 2 da *R*, condurre da T il segmento di perpendicolare *TV* ad *SP*. Congiungere *R* con *V* e con *P* e poi *T* con *P* e indicare con *O* il punto comune a *PR* e *TV*.
a) Calcolare le aree dei triangoli *ROV* e *TOP*.
b) Che cosa si può dedurre da tale risultato?
c) La proprietà osservata vale per qualsiasi posizione del punto *T* in un generico rettangolo?
NOTA. Della proprietà osservata in c) dare (possibilmente) sia una dimostrazione algebrica che una geometrica.



Commento

Abbiamo ricevuto cinque risposte così suddivise: una da una Scuola di Roma di nome "Aristofane" (senza altra precisazione) inviata da una studentessa che non precisa il suo livello scolare, due dal biennio delle Scuole Superiori (entrambe dallo stesso Liceo), due da classi terze delle Scuole Superiori (anche in questo caso dello stesso Liceo). Il problema poneva tre domande: le prime due tra loro collegate, mentre la terza chiedeva di generalizzare, se possibile, quanto precedentemente dimostrato. Nel primo quesito si chiedeva di calcolare le aree di due triangoli interni a un rettangolo di date dimensioni; nel secondo quesito si chiedeva di dedurre dal precedente risultato una proprietà comune ai due triangoli. Infine, nell'ultimo quesito, si chiedeva di generalizzare, se possibile, quanto stabilito nelle prime due risposte al caso di un rettangolo generico, fornendo (se possibile) sia una dimostrazione algebrica che una geometrica. In quattro delle risposte pervenute vengono risolti in modo sostanzialmente corretto i primi due quesiti (salvo piccole imprecisioni). Per il terzo quesito (quello relativo alla generalizzazione), alcuni mostrano di non aver compreso il significato del testo: c'è chi si perde nei calcoli algebrici, c'è chi confonde una risoluzione numerica (che fa

quindi riferimento a un rettangolo di dimensioni fissate) con una algebrica e c'è chi non sembra aver chiaro quale strategia risolutiva adottare.
Un'osservazione che crediamo importante: quando si scrive un'uguaglianza che coinvolge enti geometrici [ma questo non vale solo per la geometria!] bisogna prestare attenzione alla "omogeneità" dei due membri dell'uguaglianza. Ad esempio, se al primo membro compare un segmento, al secondo membro non può comparire un numero reale. Inoltre alcuni utilizzano come altezza del triangolo un segmento che in realtà è solo congruente alla vera altezza.
Infine vogliamo sottolineare ancora una volta la necessità che nei diversi elaborati inviateci siano chiaramente presenti i nomi dei risolutori, la classe e la scuola di appartenenza.
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
Scuola??? "Aristofane", Roma
LS "Carlo Cafiero", Barletta (BA)
LS "Righi", Bologna

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni
Clara Antonucci, Classe?
Aristofane, Roma

a)
[Non è presente alcuna figura!]

SOLUZIONE
$A_{ROV} = 20/7$ $\qquad$ $A_{TOP} = 20/7$

SPIEGAZIONE
L'area del triangolo ROV è pari all'Area del triangolo RSP meno [l'area del] il triangolo RSV meno [l'area del triangolo] VOP.
In simboli:
$A_{ROV} = A_{RSP} - A_{RSV} - A_{VOP}$
E anche [procedendo in modo analogo]:
$A_{TOP} = A_{RPQ} - A_{TPQ} - A_{ROT}$
Sappiamo che $A_{RSP} = A_{RPQ}$, e che entarmbe [entrambe] valgono 4×7:2, cioè 14
$A_{RSP} = A_{RPQ} = 14$
Sostituendo sopra:
$A_{ROV} = 14 - A_{RSV} - A_{VOP}$
$A_{TOP} = 14 - A_{TPQ} - A_{ROT}$
Inoltre
$A_{RSV} = 2 \times 4 : 2 = 4$
$A_{TQP} = 5 \times 4 : 2 = 10$
Quindi
$A_{ROV} = 14 - 4 - A_{VOP}$
$A_{TOP} = 14 - 10 - A_{ROT}$
Mancano solo l'area di [del triangolo] RTO e quella di [del triangolo] VOP. Le basi le abbiamo [Di tali triangoli conosciamo le basi RT e VP]. Otteniamo l'altezza [Determiniamo le relative altezze].
[I triangoli] RTO e RPQ sono simili. (Come del resto [sono simili] anche [i triangoli] VOP e PRS, e i suddetti 4 triangoli [sono simili] tra loro. **Nota1**)

Il rapporto tra i [le lunghezze dei] lati, nel caso di [dei triangoli simili] RTO [e RPQ] è quindi RT/RQ, cioè 2/7. Nel caso di VOP [e PRS il rapporto tra le lunghezze dei lati] è 5/7.
Da qua [questi risultati] possiamo ricavare il [corrispondente] rapporto delle Aree: 4/49 per RTO e RPQ e 25/49 per VOP e PRS.
Quindi

$A_{OVP} = 25/49\times 14$ $\qquad$ $A_{VOP} = 50/7$

$A_{ROV} = 14 - 4 - 50/7 = 10 - 50/7 = 70/7 - 50/7 = 20/7$

$A_{RTO} = 4/49\times 14;$ $\qquad$ $A_{RTO} = 8/7$

$A_{TOP} = 14 - 10 - 8/7 = 4 - 8/7 = 28/7 - 8/7 = 20/7$

$A_{ROV} = A_{TOP} = 20/7$

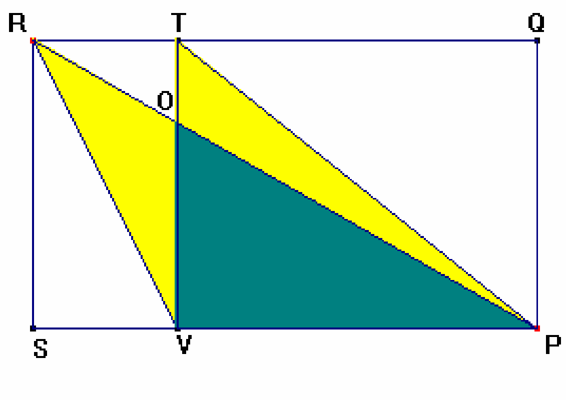
Nota1

Come so che tali triangoli sono simili? L'angolo ∠ORT e [l'angolo] ∠PRQ sono congruenti (in quanto coincidono).
Anche l'angolo ∠RTO e l'angolo ∠RQP sono congruenti. Infatti ∠RQP è retto per costruzione [per ipotesi], mentre ∠RTO lo è perché TV è un segmento, sempre per costruzione perpendicolare a RQ.
L'ultimo angolo non può che essere uguale nei due triangoli, in quanto uno solo porta entrambi a "quota" [la somma delle tre ampiezze deve valere] 180°.
Quindi tutti gli angoli [corrispondenti] sono congruenti, quindi [e di conseguenza] i due triangoli sono simili.
Un discorso analogo si applica per la similitudine tra [i triangoli] POV e PRS.

b) [[…]]

c) [[…]]

G. Bosso, P. Compierchio, C. Di Gioia, L. Fiorella, F. Rizzi, Classe 2I PNI
LS "Carlo Cafiero", Barletta (BA)



a) calcoliamo l'area dei triangoli ROV e TOP

<u>Dimostrazione geometrica:</u>

Calcoliamo le aree dei triangoli $\overset{\Delta}{RVP}$ e $\overset{\Delta}{TVP}$.

Area $_{RVP} = \dfrac{VP \cdot SR}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Area $_{TVP} = \dfrac{VP \cdot TV}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$

I due triangoli sono pertanto equivalenti e potevamo giungere allo stesso risultato considerando che gli stessi hanno la base in comune (VP) e le altezze congruenti (TV ≅ SR).

Notiamo che tali triangoli possono essere visti come somma di due triangoli:

$\overset{\Delta}{RVP} \equiv \overset{\Delta}{ROV} + \overset{\Delta}{OVP}$ e $\overset{\Delta}{TVP} \equiv \overset{\Delta}{TOP} + \overset{\Delta}{OVP}$

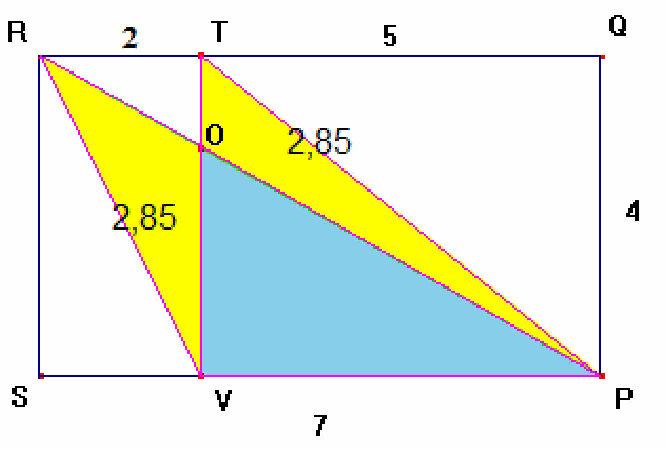
Per la dimostrazione precedente ($\overset{\Delta}{RVP} \equiv \overset{\Delta}{TVP}$) si ha :

$\overset{\Delta}{ROV} + \overset{\Delta}{OVP} \equiv \overset{\Delta}{TOP} + \overset{\Delta}{OVP} \rightarrow \overset{\Delta}{ROV} + \cancel{\overset{\Delta}{OVP}} \equiv \overset{\Delta}{TOP} + \cancel{\overset{\Delta}{OVP}} \rightarrow \overset{\Delta}{ROV} \equiv \overset{\Delta}{TOP}$

[Il punto *a*) del testo del problema chiedeva di *calcolare* l'area dei due triangoli. Si veda comunque la "dimostrazione algebrica" più avanti.]

b) Da tale risultato deduciamo che i due triangoli ROV E TOP sono equivalenti.

<u>Dimostrazione algebrica</u>



Consideriamo i triangoli RTO e VOP.
Essi sono simili poiché hanno gli angoli congruenti; infatti:

-RÔT ≅ VÔP ≅ α (angoli opposti al vertice)

-$\hat{RTO} \cong \hat{OVP} \cong \beta$ (angoli retti)

-$\hat{TRO} \cong \hat{OPV}$ (differenza di angoli congruenti:

$$180° - (\alpha + \beta) \cong 180° - (\alpha + \beta)$$)

Essendo i due triangoli simili, i loro lati corrispondenti sono in proporzione, pertanto

RT : VP = TO : OV → 2 : 5 = TO : 4 – TO → 5TO = 2(4 – TO) → 5TO = 8 – 2TO → 7TO = 8 → $TO = \frac{8}{7}$; $OV = 4 - TO \rightarrow OV = 4 - \frac{8}{7} \rightarrow OV = \frac{20}{7}$

Possiamo ora calcolare le aree dei triangoli ROV e TOP

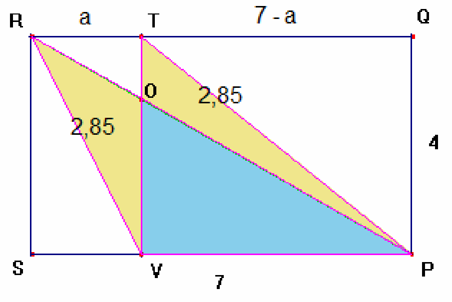
$$Area_{TOP} = \frac{TO \cdot VP}{2} = \frac{8}{7} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{20}{7}$$

$$Area_{VOR} = \frac{OV \cdot SV}{2} = \frac{20}{7} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{20}{7}$$

Pertanto anche questo calcolo delle aree ci dimostra che i due triangoli ROV e OTP sono equivalenti.
[Questa è una dimostrazione numerica che risponde al quesito posto nel punto *a*)]

c) Vediamo ora se la proprietà dimostrata al precedente punto vale anche quando la posizione del punto T è variabile sul segmento RQ.

La dimostrazione è analoga a quella precedente solo che in questa fase al posto dei numeri utilizzeremo le lettere, il punto T disterà dal punto R a [unità] ($0 < a < 7$) e la proporzione diventerà:



$a : (7 - a) = TO : (4 - TO) \rightarrow TO \cdot (7 - a) = a \cdot (4 - TO) \rightarrow 7TO - \cancel{a \cdot TO} =$
$= 4a - \cancel{a \cdot TO} \rightarrow TO = \dfrac{4a}{7}$; $OV = 4 - \dfrac{4a}{7} \rightarrow OV = \dfrac{28 - 4a}{7}$

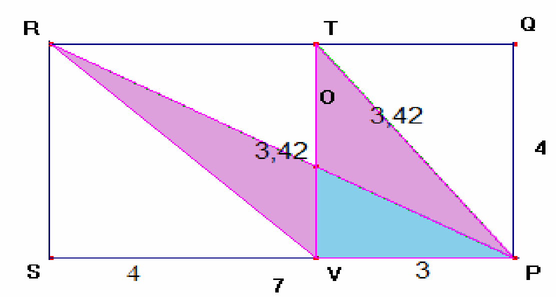
Successivamente calcoliamo le aree dei triangoli ROV e TOP e verifichiamo che esse sono equivalenti [uguali]:

$$Area_{TOP} = \frac{TO \cdot VP}{2} = \frac{4a}{7} \cdot (7 - a) \cdot \frac{1}{2} = \frac{14a - 2a^2}{7}$$

$$Area_{VOR} = \frac{OV \cdot SV\ [RT]}{2} = \frac{28 - 4a}{7} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{4(7 - a)}{7} \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{14a - 2a^2}{7}$$

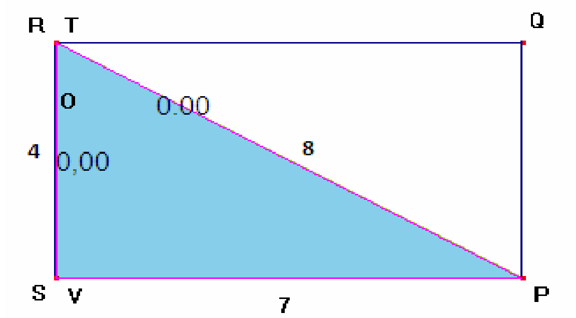
Potremo concludere che:
Le aree dei triangoli ROV e TOP resteranno sempre equivalenti qualsiasi sia la distanza di T da R.

Nella figura qui accanto ad esempio la distanza di T da R è 4. Le aree risultano comunque uguali.



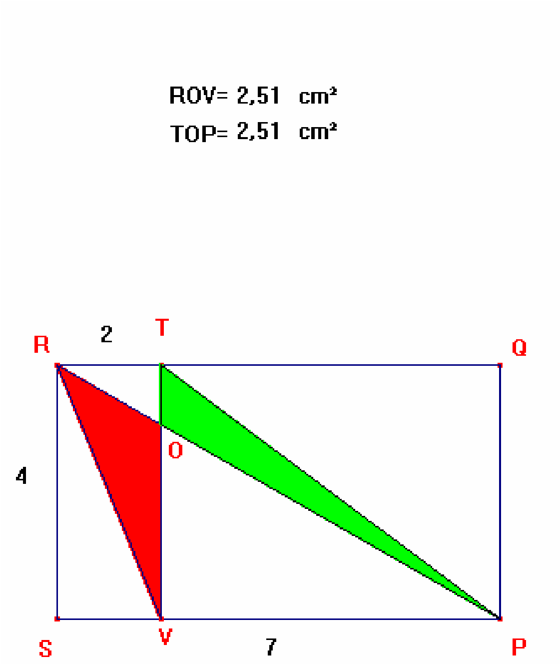
Cosa accade se il punto T coincide con gli estremi del segmento RQ?

Se il punto T coincide con R i triangoli ROV E TOP diventano rispettivamente i segmenti RS e RP in tal caso le aree sono entrambe uguali a 0.

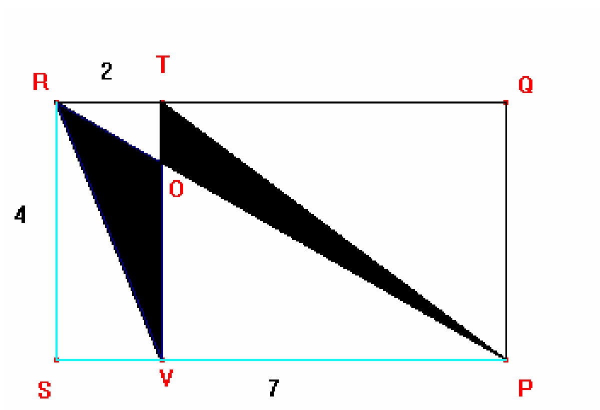


Se invece il punto T coincide con Q i triangoli ROV E TOP diventano rispettivamente i segmenti RP e QP e anche in questo caso le aree sono entrambe uguali a 0.

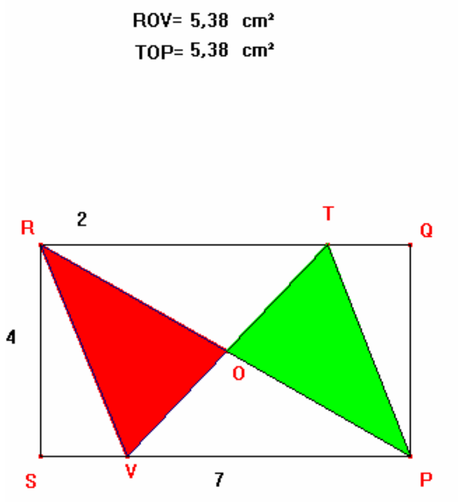
G. Vitrani, Classe 2B
LS “Carlo Cafiero”, Barletta (BA)



Se considero i triangoli RSP e OVP, vedo che sono simili per il 1° criterio di similitudine, allora posso scrivere la proporzione 4:OV = 7:5 e otteniamo OV = 20/7.
L’area di ROV triangolo è allora (OV×RT)/2 = (20/7×2)/2 = 20/7
Osservando la figura capisco inoltre che TO = [TV – OV] = 4 – 20/7 = 8/7
L’area di TOP triangolo è allora (TO×VP)/2 = (8/7×5×1/2) = 20/7
COSA OSSERVO: I TRIANGOLI TOP E ROV HANNO LE STESSE AREE [AREA UGUALE].
PERCHE? Sappiamo che l’area di un triangolo si trova [utilizzando l’espressione] (B×H)/2, possiamo osservare che i triangoli RVP e TVP hanno quindi la stessa area (come si può capire meglio dalla figura sotto); osservo poi che se da queste due aree tolgo una stessa parte di area (nel nostro caso l’ area del triangolo OVP), le due aree rimarranno comunque uguali. I 2 TRIANGOLI ROV E TOP SONO ALLORA EQUIVALENTI



La proprietà assegnata vale inoltre per qualunque punto di T sul segmento RQ:



c) [[…]]

R. Cesari, Classe 3F PNI
LS "Righi", Bologna

a)

Sapendo che i triangoli TOR e QPR sono simili posso impostare la proporzione TO:PQ = TR:QR e quindi sostituendo trovo TO che vale 8/7. QT [PV] vale 5 e quindi l'area del triangolo TOP sarà 20/7. Sapendo che OV è uguale alla differenza tra QP e TO, quindi 20/7, e TR è uguale a 2, l'area del triangolo ROV è 20/7.

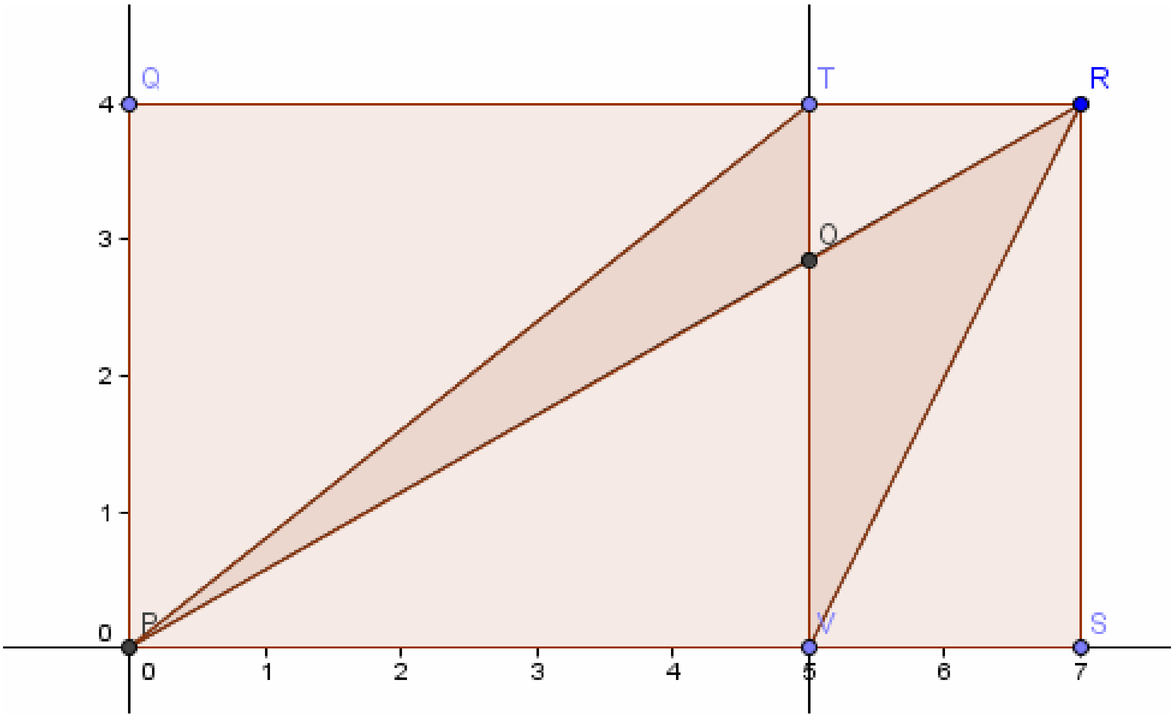
b)

Si può dedurre che i due triangoli sono equivalenti.

c)

Ciò si poteva dedurre anche dal fatto che i triangoli TRP e TRV sono equivalenti perché hanno la stessa base e le altezze [congruenti], quindi lo saranno anche i triangoli TOP e ROV perché differiscono rispettivamente dai triangoli TRP e TRV per il solo triangolo TOR. Algebricamente posso dimostrarlo così: l'area del triangolo TOP posso scriverla come: $\frac{TO*(b-TR)}{2}$ dove b è la misura della base del rettangolo. L'area del triangolo ROV invece sarà: $(h-TO)*\frac{TR}{2}$ dove h è l'altezza del rettangolo. Se vado ad eguagliare le due espressioni trovo b:h=TR:TO, e come avevo precedentemente detto il triangolo TOR è simile a PQR, che ha per lati la base e l'altezza del rettangolo. Quindi posso concludere che i due triangoli saranno sempre equivalenti.

[La dimostrazione è abbastanza anomala perché segue un ragionamento "a posteriori"]



M. Iandolo, Classe 3E
LS "Righi", Bologna

a)
Dati

RQ // SP (3)
PQ // RS
RS ⊥ SP
SP = 7k
PQ = 4k (1) dove k ∈ R
T ∈ RQ
RT = 2k
TV ⊥ SP (2)
V ∈ SP
R, O, P allineati
T, O, V allineati

[Se k è la lunghezza del segmento scelto come unità, allora k = 1. Inoltre le uguaglianze SP = 7k, PQ = 4k e RT = 2k rischiano di essere prive di senso, in quanto a primo membro compare un segmento e a secondo membro un numero reale.]

RISOLVO
Poniamo TO = x
=> OV = 4k – x per la (1), la (2) e la (3) essendo infatti segmenti di ⊥ compresi tra rette // essi sono tra loro ≅
=> $A_{ROV} = T_3 = (OV*RT)/2 = [(4k – x)*2k]/2 = (4k – x)*k$
=> $A_{TOP} = T_2 = (TO*TQ)/2 = [x*(7k – 2k)]/2= 5kx/2$

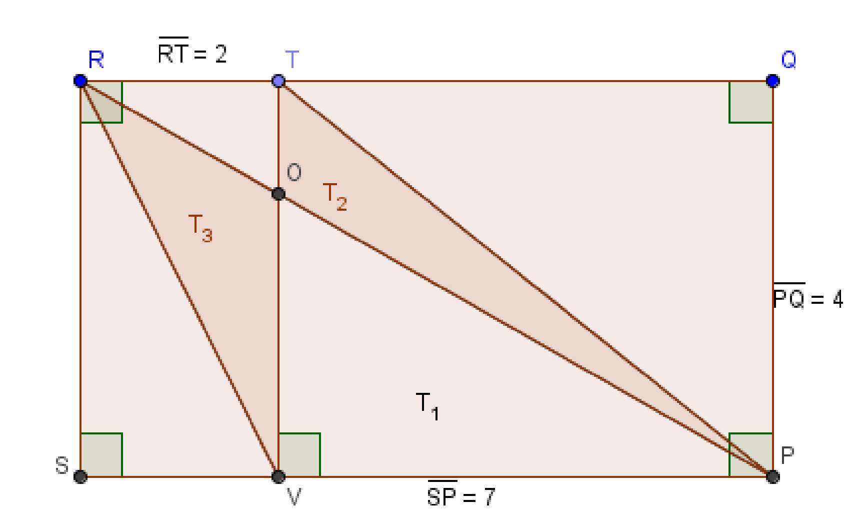
Ma i triangoli RVP e TVP sono equivalenti perché hanno la stessa base (VP) e la stessa altezza (RS) [hanno altezze congruenti (TV e RS)]
=> ROV equivalente TOP perché differenza di triangoli equivalenti (RVP equivalente TVP per dimostrazione precedente e OVP in comune [parte comune dei due triangoli]).
=> $T_3 = T_2$

$(4k - x)*2k/2 = 5kx/2$

$4k - x = 5x/2$

$x = 8k/7$

=> $A_{ROV} = A_{TOP} = 20k^2/7$.



b)
Dal risultato ottenuto al punto a) si può facilmente dedurre (avendolo anche dimostrato) che i triangoli ROV e TOP sono equivalenti.

c) La proprietà osservata nel punto b) vale per qualsiasi posizione del punto T in un generico rettangolo, in quanto TV ⊥ SP e T ∈ RQ per ipotesi, qualunque sia il rettangolo e qualunque sia la distanza di T da R.

DIMOSTRAZIONE ALGEBRICA della proprietà espressa nel punto c)

DATI
RQ // SP
PQ // RS
RS ⊥ SP
T ∈ RQ
TV ⊥ SP
V ∈ SP
R, O, P allin.
T, O, V allin.
$A_{ROV} = A_{TOP}$?

RISOLVO
VP= x
RT = m
PQ = y
TO = n => VO = y – n

$\Rightarrow A_{RVP} = (x*y)/2$ e $A_{TVP} = (x*y)/2$

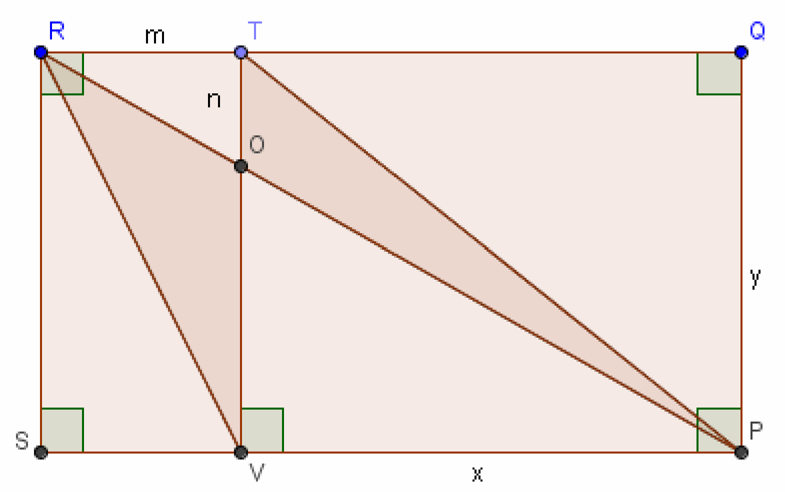
Ma $A_{ROV} = [(y - n)*m]/2$

$A_{TPO} = (n*x)/2$ (2)

$A_{OVP} = [(y - n)*x]/2$

$\Rightarrow A_{ROV} = A_{RPV} - A_{OVP} = (x*y)/2 - [(y - n)*x]/2 = (x*y - x*y + x*n)/2 = (x*n)/2$

$\Rightarrow A_{ROV} = A_{TPO}$ per la (2).



DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA

Ipotesi
- RQ // SP (1)
- PQ // RS
- RS ⊥ SP
- T ∈ RQ
- TV ⊥ SP
- V ∈ SP
- R, O, P allineati

Tes { $A_{ROV} = A_{TOP}$

DIMOSTRAZIONE

Considero i triangoli RVP e TVP. Essi hanno b = VP e h = TV [= RS] perché essa è la distanza tra due rette // per ipotesi (1)

=> RVP equiv TVP

$\Rightarrow A_{RVP} = A_{TVP}$.

Ma $A_{RVP} = A_{ROV} + A_{OVP}$ e $A_{TVP} = A_{TOP} + A_{OVP}$

$\Rightarrow A_{ROV} + A_{OVP} = A_{TOP} + A_{OVP}$

$\Rightarrow A_{ROV} = A_{TOP}$.

c.v.d.