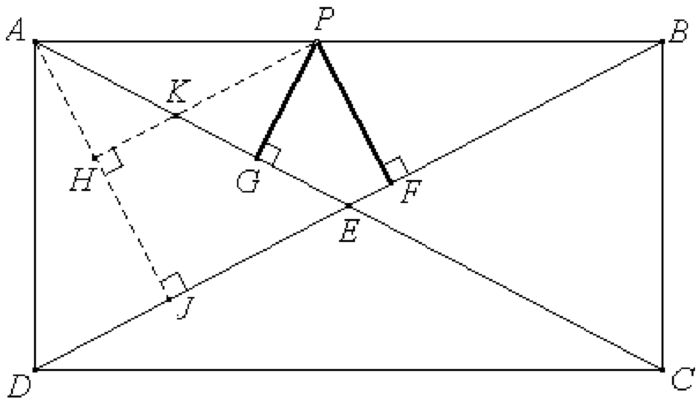
FLATLANDIA

Problema Marzo Aprile 2009

Il testo del problema:

È dato un rettangolo *ABCD*. Da un punto *P* del lato *AB* si conducano i segmenti di perpendicolare *PF* e *PG* alle due diagonali *AC* e *BD* rispettivamente.
1) Dimostrare che la somma delle lunghezze dei segmenti *PF* e *PG* è costante al variare di *P* su *AB*.
2) Se *P* si trova sul prolungamento di *AB*, la proprietà suddetta (riferita ora alle rette sostegno delle due diagonali) è ancora valida? Se la risposta è affermativa dimostrarlo, in caso contrario modificare opportunamente la proprietà relativa alle lunghezze dei segmenti *PF* e *PG*.



Commento

Sono giunte otto risposte, tre da tre classi prime, una di un Istituto per Geometri e due di due diversi Licei Scientifici, quattro da studenti di classi seconde (alcuni singolarmente e altri in gruppo) delle quali una da una classe seconda dello stesso Istituto per Geometri già citato e tre da studenti appartenenti tutti alla stessa classe di Liceo Scientifico [con qualche difficoltà di elaborazione e comunicazione!] e, infine, una da una classe terza di Liceo Scientifico. Il problema poneva due quesiti che riguardavano sostanzialmente la stessa figura: nel primo si chiedeva di dimostrare il permanere di una certa proprietà al variare della posizione di un punto appartenente a un dato segmento; nel secondo si chiedeva se tale proprietà era ancora valida nel caso in cui il punto in questione fosse libero di spostarsi sul prolungamento del precedente segmento e, in caso di risposta negativa, di modificare opportunamente la proprietà in esame.
Dobbiamo subito rilevare una certa mancanza di accuratezza nella stesura delle risposte e, in alcune di queste, una scarsa attenzione alla simbologia impiegata [forse comincia a farsi sentire la stanchezza di fine anno scolastico!]. In alcune delle risposte pervenute viene dimostrata in modo sostanzialmente corretto la costanza della somma (punto 1) o della differenza (punto 2) delle due lunghezze; in alcune viene precisato anche il valore. Si devono rilevare diverse imprecisioni, sia geometriche che di linguaggio, e l'utilizzo di certe relazioni geometriche che dovrebbero essere dimostrate. Inoltre è presente una certa confusione tra un segmento e la relativa lunghezza, che comporta un passaggio un po' troppo disinvolto dalla congruenza di segmenti all'uguaglianza delle loro lunghezze. Ci preme sottolineare che dire che "un punto sta fuori di un certo segmento" non equivale ad affermare che tale punto appartiene al prolungamento del segmento in questione. Inoltre in alcune risposte si afferma che le diagonali di un rettangolo si dimezzano deducendo che i triangoli formati dalle semidiagonali sono isosceli: ovviamente occorre precisare anche che le diagonali sono uguali. Infine in due risposte l'infelice simbologia impiegata ha reso il testo praticamente illeggibile.

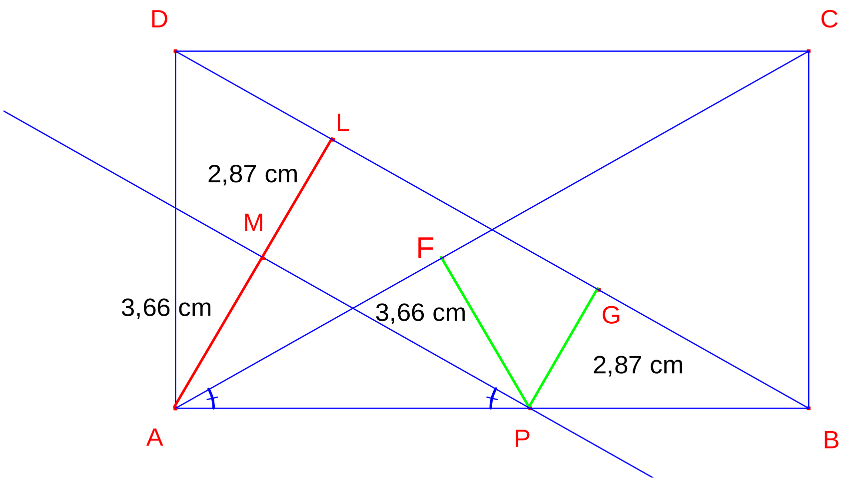
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- LS “G. Marinelli, Udine (UD)
- ITCG “E. Majorana”, Castrolibero (CS)
- LST “Cesaris”, Casalpusterlengo, (MI)
- LS “Pitagora”, Rende (CS)
- LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
-

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

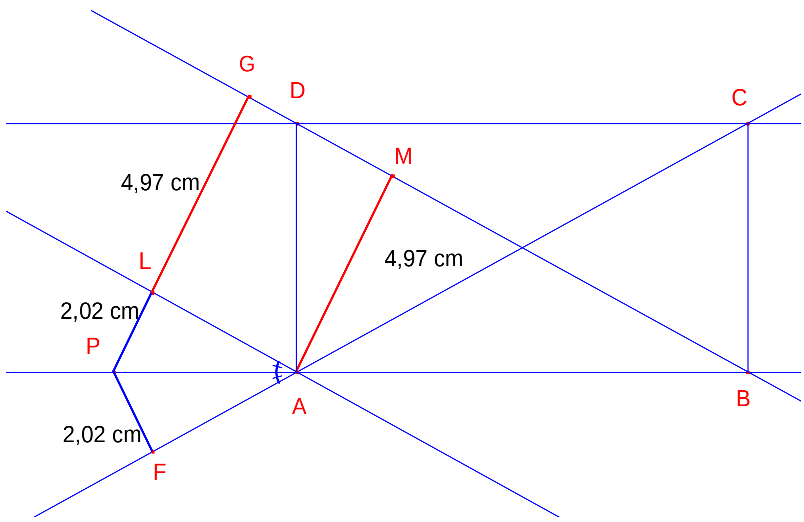
Soluzioni
Manuel De Rose
Classe 1 A/geom. ITCG "E. Majorana", Castrolibero (CS)

1)



Osserviamo che quando il punto P coincide con il punto A, la somma di PF e PG corrisponde al segmento AL che è perpendicolare a DB. Mandiamo, allora, [una] la retta parallela alla diagonale BD passante per il punto P, questa retta interseca il segmento [AG] AL nel punto [H] M. Per costruzione il segmento PG è congruente a ML perché entrambi sono contenuti tra due rette parallele e sono perpendicolari al segmento DB. Per dimostrare che la somma delle lunghezze dei segmenti PF e PG è costante al variare di P su AB, basta dimostrare la congruenza dei segmenti FP e AM.
I triangoli AMP e PFA sono congruenti per il secondo criterio di congruenza. Infatti:
1) hanno il lato AP in comune;
2) gli angoli AMP e AFP sono congruenti perché retti;
3) gli angoli MPA e FAP sono congruenti. Infatti essendo gli angoli GBP e MPA angoli corrispondenti rispetto alle rette parallele BD e PM tagliate dalla trasversale AB, ed essendo l'angolo GBP congruente all'angolo FAP per ipotesi (essendo angoli [delle] (che le due) diagonali (formano col lato AB) del rettangolo ABCD).
Pertanto i segmenti PF e AM sono congruenti (e quindi PF + PG = AM + ML = AL = costante).

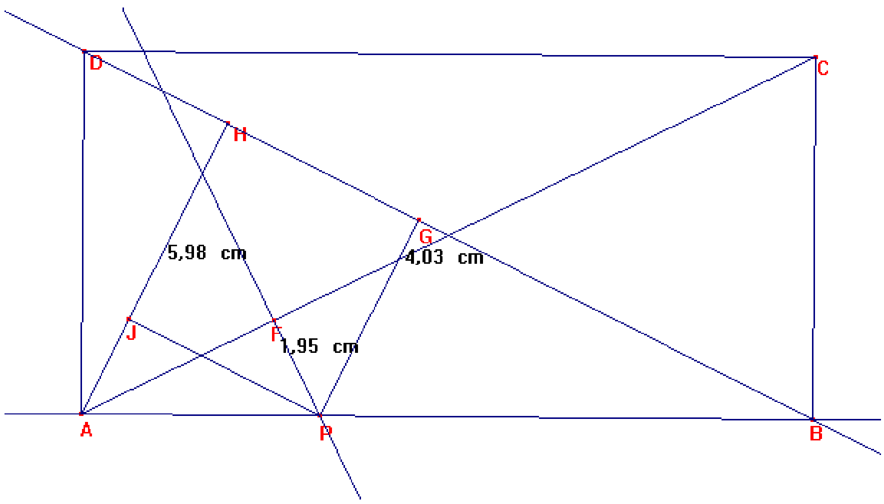
2)



Se P si trova sul prolungamento di AB la somma dei segmenti PF e PG non è più costante. Mentre diventa costante la loro differenza.
Con lo stesso metodo usato in precedenza, facciamo scorrere il punto P sulla retta AB fino a quando esso non coincide con il punto A. Facciamo poi scorrere il punto P sul prolungamento del segmento AB. Mandiamo [una] la retta parallela alla diagonale BD passante per il punto [P] A, la quale interseca il segmento PG nel punto L. Ora sappiamo che AM è congruente a GL perché entrambi sono contenuti tra due rette parallele e sono perpendicolari al segmento BG. Per dimostrare che la differenza di PG e PF è costante al variare di P sul prolungamento di AB, basta dimostrare la congruenza dei segmenti PL e PF.
I triangoli PLA e PFA sono congruenti per il secondo criterio di congruenza. Infatti:
1) hanno il lato PA in comune;
2) gli angoli ∠PLA e ∠PFA sono congruenti perché retti;
3) [gli angoli] l'angolo ∠DBA è congruente a [∠PFL] ∠PAL perché sono angoli corrispondenti rispetto alle rette parallele BD e AL e alla trasversale BP e gli angoli ∠CAB e ∠[PFA] PAF sono congruenti perché sono opposti al vertice; sapendo inoltre che gli angoli CAB e ABD sono congruenti perché [ricavati] formati dalle diagonali [di un] del rettangolo (con il lato AB), di conseguenza anche gli angoli FAP e LAP sono congruenti [perché ...].
Pertanto PF è congruente a PL.

Marcello Zani
1 LST "Cesaris", Casalpusterlengo (MI)

1)



IPOTESI:
ABCD è un rettangolo
P appartiene ad AB
PF è perpendicolare ad AC
PG è perpendicolare ad [AC] BD
AH è perpendicolare ad BD
PJ è perpendicolare ad AH
TESI:
PF+PG=costante
DIMOSTRAZIONE
Traccio da A la perpendicolare AH alla diagonale BD
Traccio da P la perpendicolare PJ ad AH
Considero il triangolo AHB. Esso ha [gli angoli] (JAP) e ABH (ABO [dove O è ...]) [[sono]] [tra loro] complementari.

Considero il triangolo AFP. Esso ha l'angolo AFP retto per ipotesi. Pertanto gli angoli FAP (OAB) e APF sono complementari.
Considero gli angoli OAB e ABO. Essi sono congruenti perché ABCD è un rettangolo [in quanto...]. Dunque APF e JAP sono congruenti perché complementari di angoli congruenti.
Considero i triangoli AJP e AFP. Essi hanno:

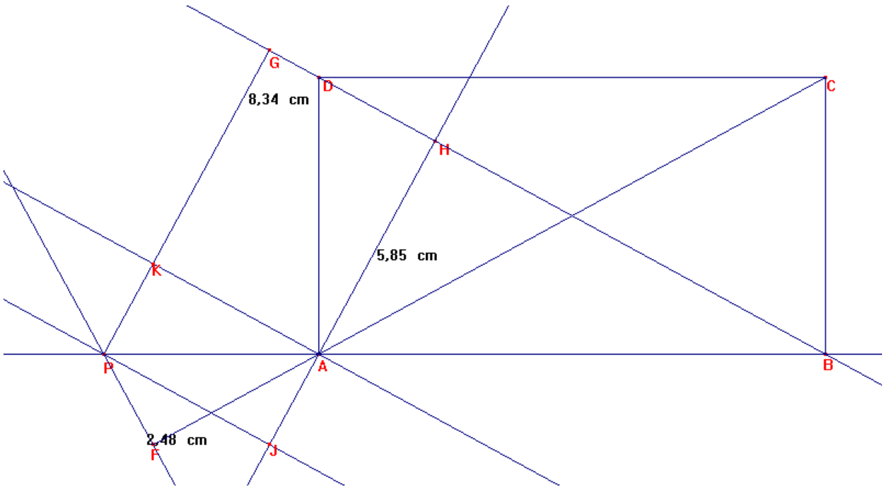
- AP in comune
- Gli angoli AFP e AJP congruenti perché retti
- Gli angoli JAP e APF congruenti per dimostrazione precedente

Pertanto i triangoli AJP e AFP sono congruenti per il secondo criterio di congruenza [[generalizzato]].
Di conseguenza **AJ ≅ FP**
Considero il poligono JPGH. Esso ha:

- L'angolo PGD retto
- L'angolo AHB retto
- L'angolo PJH retto

Pertanto il poligono JPGH è un rettangolo. In particolare **PG ≅HJ**
Quindi AJ + JH ≅ FP + PG perché congruenti a due a due.
Pertanto la somma di FP e PG è costante al variare di P su AB perché uguale a AJ + JH ≅**AH** la cui misura non dipende da P

2)



Traccio da A la perpendicolare AK al segmento PG.
Si può dimostrare che |PG-PF| (differenza delle distanze dalle rette delle diagonali) **[**≅] = AH e pertanto non dipende da P.
Prendendo P sul prolungamento dalla parte di A la dimostrazione è analoga alla precedente e si può sintetizzare così:

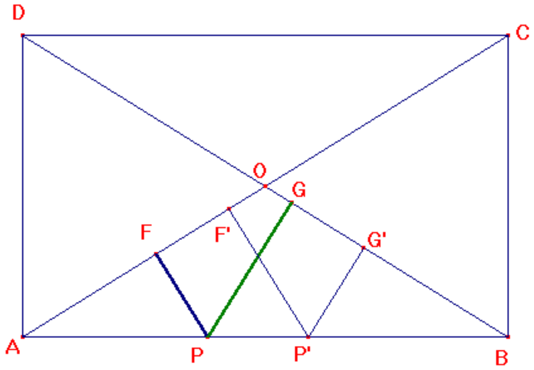
- [KAGH] KAHG rettangolo (quindi KG ≅ AH)
- [PHAJ] PKAJ rettangolo (quindi PK ≅ AJ)
- PAF ≅ APJ (quindi AJ≅ PF) .

Di conseguenza PF ≅ PK; AH ≅ PG –PK ≅ PG – PF
PERTANTO
Quando P appartiene al segmento AB la somma tra PF e PG è costante, quando P [[non]] appartiene al [prolungamento del] segmento AB è costante la loro differenza.

Per Di Vora Raffaele, classe 1H LS "G: Marinelli", oltre ad alcuni errori, è abbastanza difficile decifrare la simbologia.

Andrea Iorfida, Mirko Malfi
2° Geometri, ITCG "E. Majorana", Castrolibero (CS)

1)



I triangoli rettangoli APF e PGB sono simili per aver uguali gli angoli acuti $\angle PAF$ e [$\angle PGB$] $\angle PBG$ (essendo OAB un triangolo isoscele).
Ne [seguente] segue la proporzione:

PF : PG = AP : PB

Applicando la proprietà del comporre avrò:

(PF + PG) : PF = (AP + PB) : AP,   (PF + PG) : PF = AB : AP,

analogamente

(PF + PG) : PG = AB : PB;

da cui otteniamo:

$$\text{PF + PG} = \frac{PF \cdot AB}{AP} \quad (*) , \qquad \text{PF + PG} = \frac{PG \cdot AB}{PB}.$$

Dalla relazione (*) si deduce che la somma dei segmenti richiesti dal problema si ottiene moltiplicando la lunghezza dalla base AB del rettangolo per il rapporto $\frac{PF}{AP}$; se cambio la posizione del punto P in una nuova posizione P', e applichiamo lo stesso ragionamento ai triangoli $AP'F'$ e $P'G'B$, la somma richiesta sarà data dal prodotto del segmento AB per il rapporto $\frac{P'F'}{AP'}$. Ma [questo] il rapporto $\frac{PF}{AP}$ è uguale al rapporto $\frac{P'F'}{AP'}$ per la similitudine dei triangoli APF et AP'F' (essendo P' F' parallelo PF [perché...]). Si conclude, pertanto, che la somma PF + PG è indipendente dalla posizione di P su AB.

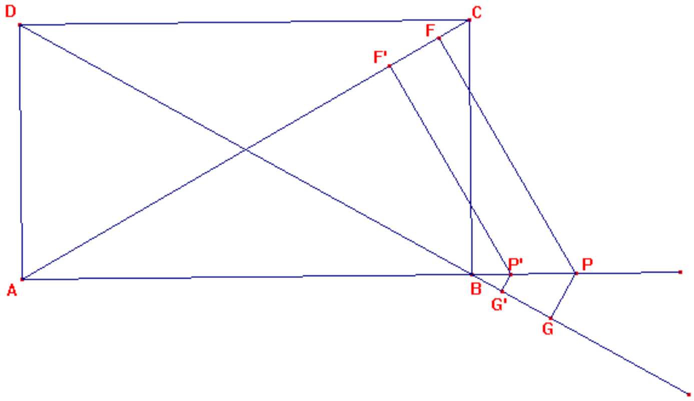
2)
Il triangolo AFP è simile a [PGB] BGP perché triangoli [retti] rettangoli [avente] aventi $\angle FAP \cong \angle PBG$.
Segue la proporzione PF : PG = AP : PB
Applicando la proprietà dello scomporre si ha:

(PF – PG) : PF = (AP – PB) : AP,   (PF – PG) : PF = AB : AP,

$$\text{PF – PG} = \text{AB} \cdot \frac{PF}{AP}.$$

Cambiando la posizione del punto P in P' otteniamo la relazione:

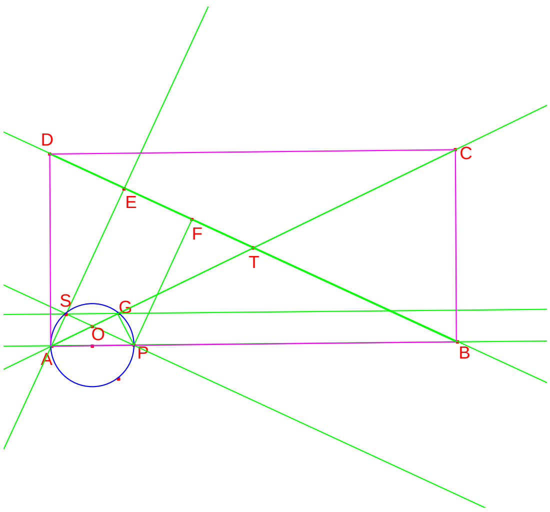
$$\text{PF – PG} = \text{AB} \cdot \frac{P'F'}{AP'}.$$



Ma questo rapporto è uguale al precedente per la similitudine dei triangoli APF e $AP'F'$.
Si conclude, pertanto, che si mantiene costante non la somma, ma la differenza fra i segmenti PF e PG.

Francesca Salituro
2B, LS "Pitagora", Rende (CS)

1)



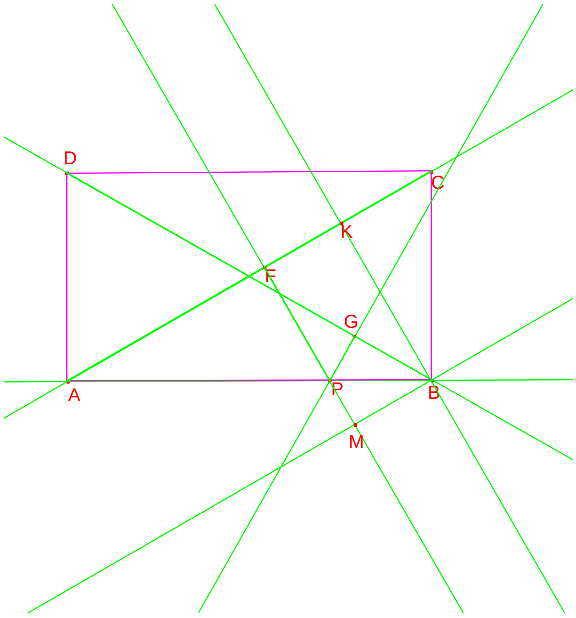
Costruiamo un rettangolo ABCD con il software cabri e tracciamo le diagonali AC e BD. Prendiamo un punto P generico sulla base AB. Tracciamo le rette perpendicolari alle due diagonali. Indichiamo con F e G rispettivamente i punti di incontro delle perpendicolari con [AC] BD e [BD] AC. Verifichiamo con il programma cabri che spostando il punto P sul segmento AB la somma di PF e PG non cambia, e, nella posizione limite cioè quando P coincide con A o B, la somma dei segmenti PF e PG coincide con l'altezza [AE] del triangolo [ABO] ABD.
Dimostriamo che anche nella posizione generica di P su AB [[...]] si ha PF + PG = AE.
Tracciamo la parallela a DB passante per P che interseca AE nel punto S. Il quadrilatero ESPF è un rettangolo in quanto:
EF è parallelo a SP per costruzione
SE e PF sono paralleli poiché entrambi perpendicolari alla diagonale DB.
$\angle$SEF e $\angle$EFP sono retti in quanto formati da rette perpendicolari alla diagonale DB.
I triangoli rettangoli ASP e AGP hanno in comune l'ipotenusa [APO] AP quindi sono inscrivibili nella circonferenza di diametro AP.

I due triangoli sono congruenti in quanto:
∠GAP è congruente a ∠SPA perché ∠GAP e ∠TBA sono congruenti in quanto [[∠TBA è congruente a <OPA perché]] angoli alla base del triangolo isoscele ATB e ∠TBA è congruente a ∠OPA perché corrispondenti rispetto alle parallele SP e EB tagliate dalla trasversale AB. Per la proprietà transitiva [<SAP] ∠GAP è congruente a <SPA.
AP è in comune.
I triangoli sono congruenti per il secondo criterio [generalizzato].
Essendo PF congruente a ES e PG congruente a AS allora [per somma di segmenti congruenti] AE = PG + PF.

2) [[…]]

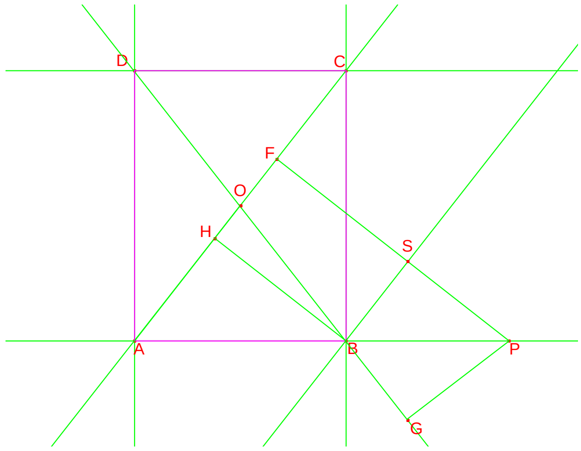
Martina Cosentino
2B, LS “Pitagora”, Rende (CS)

1)



Costruiamo un rettangolo ABCD con il software [Cabrì] Cabri e tracciamo le diagonali AC e BD. Prendiamo un punto P generico sulla base AB. Tracciamo le rette perpendicolari alle due diagonali. Indichiamo con F e G rispettivamente i punti di incontro delle perpendicolari con AC e BD. Verifichiamo con il programma cabri che spostando il punto P sul segmento AB la somma di PF e PG non cambia, e, nella posizione limite cioè quando P coincide con A o B, la somma dei segmenti PF e PG coincide con l’altezza [KB] del triangolo ABO [essendo O...].
Dimostriamo che anche nella posizione generica di P su AB la somma di PG e PF è congruente al segmento KB. Tracciamo la parallela a KF passante per il punto B.
il quadrilatero [FMKB] FMBK risulta essere un rettangolo poiché:
FK e MB sono paralleli per costruzione;
KB e FM sono paralleli perché entrambi perpendicolari alla diagonale AC;
∠BKF e ∠KFP sono retti perché KB e FP rispettivamente sono perpendicolari alla diagonale AC.
Consideriamo i triangoli MPB e [MGB] PGB, essi hanno:
PB in comune;
∠PGB e ∠PMB sono congruenti perché entrambi retti, essendo ∠PMB angolo del rettangolo [FMKB] FMBK, e [<PGB] PG perpendicolare [a] BD per costruzione.
∠GBP e ∠PBM sono congruenti essendo OAB un triangolo isoscele in quanto in un rettangolo le diagonali [sono uguali] e si [dimezzano] intersecano nel relativo punto medio , di conseguenza ∠OAB è congruente [a] ∠OBA perché angoli alla base di OAB;
∠OAB è congruente [a] ∠ABM perché angoli alterni interni rispetto alle due rette parallele AC e MB tagliate dalla trasversale AB e per la proprietà transitiva anche ∠OBA e ∠ABM sono congruenti.
I triangoli MPB e [MGB] PGB sono congruenti per il secondo criterio [generalizzato], di conseguenza:
essendo GP congruente a PM allora PF + PG è congruente a FP + PM [e quindi] congruente a FM che per [una] precedente dimostrazione è congruente a KB che è l’altezza del triangolo ABO.

2)



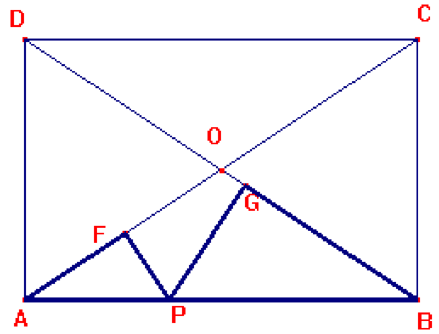
Abbiamo verificato con il programma [Cabrì] Cabri che la proprietà che lega i segmenti PF e PG quando il punto P è [fuori dalla] sul prolungamento della base AB è che la loro differenza rimane costante.

Traccio l’altezza [BH relativa ad AO] del triangolo OAB, e mando la parallela a HF passante per B.
Considero i triangoli SPB e BGP [essendo S...], essi hanno:
BP in comune;
∠OAB e ∠OBA sono congruenti perché angoli alla base del triangolo isoscele AOB.
∠SBP congruente a ∠OAB perché corrispondenti rispetto alle parallele BS e AF tagliate dalla trasversale AB. <OBA e <PBG sono congruenti in quanto opposti al vertice.
Per la proprietà transitiva allora anche <SBP sarà congruente a <PBG.
I due triangoli sono congruenti, di conseguenza:
SP è congruente a PG.
Il quadrilatero HFSB è un rettangolo perché:
HF parallelo a BS per costruzione.
HB parallelo a FS perché entrambi [paralleli] perpendicolari alla diagonale AC.
Allora:
PF – PG = PF – PS = FS = BH.
Poichè la distanza fra due parallele rimane sempre invariata allora spostando il punto P [fuori da] sul prolungamento di AB, [BH] PF – PG rimane costante.

Del gruppo Mariana De Rose, Valentina Leto e Alessandra Quintieri [Carmine William Amato che fine ha fatto?], oltre ad alcuni errori, è abbastanza difficile decifrare la simbologia.

3H, LS "Aristosseno", Taranto (TA)

1)

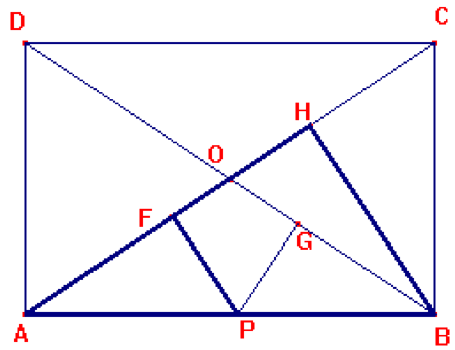


Effettuata la costruzione della figura, osserviamo che i triangoli *APF* e [*PBG*] *BPG* sono simili, essendo rettangoli e avendo gli angoli *OAB* e *OBA* congruenti. Scriviamo allora la proporzione:

$$PF : PG = AP : PB$$

Applicando la proprietà del comporre alla proporzione si ha :

$(PF + PG) : PF = (AP + PB) : AP$ da cui segue che: $PF + PG = \dfrac{PF \cdot AB}{AP}$.

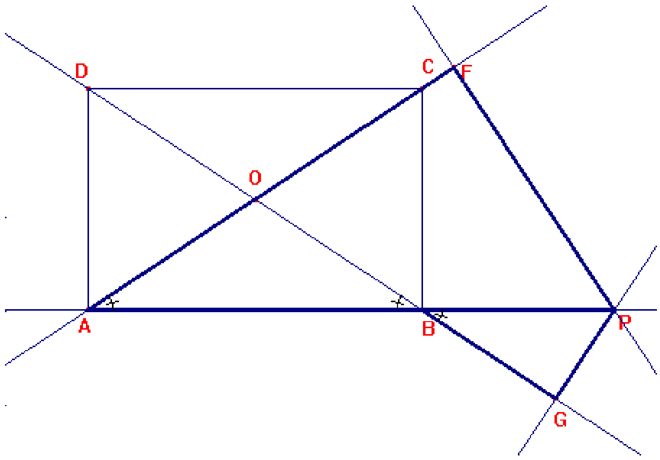


Al secondo membro di questa uguaglianza troviamo la misura di *AB* che è costante ed il rapporto $\dfrac{PF}{AP}$ che è anch'esso costante al variare di *P* su *AB* , essendo uguale al rapporto $\dfrac{BH}{AB}$ fra la distanza di *B* dalla diagonale *AC* ed il lato *AB*, data la similitudine fra i triangoli *APF* ed *ABH*. (il rapporto $\dfrac{PF}{AP}$ è fra l'altro il seno dell'angolo OAB che non varia)

2)

Nel caso in cui il punto *P* è sul prolungamento di *AB*, consideriamo i triangoli *APF* e *PBG*: essi sono simili in quanto triangoli rettangoli aventi gli angoli *PAF* e *PBG* congruenti.

(Infatti *OAB* = *OBA* perché angoli alla base di un triangolo isoscele e *OBA* = *PBG* perché angoli opposti al vertice)



Possiamo scrivere allora la proporzione: $PF : PG = AP : BP$.
Applicando la proprietà dello scomporre: $(PF - PG) : PF = (AP - PB) : AP$, cioè:
$(PF - PG) : PF = AB : AP$.

Da questa si ricava che: $PF - PG = \dfrac{PF \cdot AB}{AP}$ con AB costante ed il rapporto $\dfrac{PF}{AP}$ anch'esso costante [perché uguale a $\dfrac{BH}{AB}$] come nel punto 1). In questo secondo caso è perciò costante la differenza delle lunghezze dei due segmenti PF e PG.