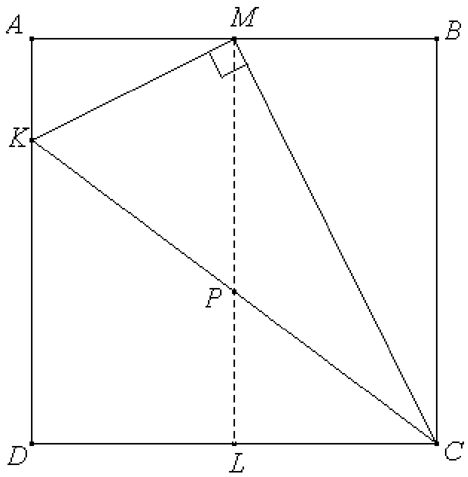
FLATlandia

Flatlandia 5-19 Maggio 2008

Il testo del problema:

1) Nel quadrato *ABCD*, indichiamo con *M* il punto medio di *AB*. La retta perpendicolare a *MC* in *M* interseca il lato *AD* nel punto *K*. Dimostrare che il triangolo *BCM* è simile al triangolo *KCM*
2) Le lunghezze dei lati del triangolo rettangolo *KDC* sono proporzionali ai numeri di una nota terna pitagorica. Quale? Giustificare la risposta.
3) Verificare che l'area del triangolo *BCM* è media proporzionale tra l'area del triangolo *AKM* e quella del quadrato.



Commento

Abbiamo ricevuto otto risposte così suddivise: due dalle Scuole Medie, quattro dal biennio delle Scuole Superiori (due dallo stesso Liceo) e due dal triennio delle Scuole Superiori (sempre III anno). Il problema poneva tre domande (tra loro collegate): nel primo quesito si chiedeva di dimostrare la similitudine di due triangoli; nel secondo quesito si chiedeva di stabilire la proporzionalità tra le lunghezze dei lati di un dato triangolo rettangolo e una nota terna pitagorica (e quindi, in sostanza, di individuare un'altra similitudine); infine, nel terzo quesito, di verificare la proporzionalità tra le aree di certe figure geometriche.

Nella maggior parte delle risposte pervenute i tre quesiti vengono risolti in modo sostanzialmente corretto (segnaleremo caso per caso le eventuali imprecisioni), tuttavia si deve sottolineare in alcuni casi una certa disattenzione relativamente alla correttezza del linguaggio impiegato (alcuni oscillano tra i termini "uguale" e "congruente" senza decidersi per l'uno o per l'altro) e alle notazioni utilizzate; inoltre, a volte, nella figura impiegata per svolgere il ragionamento geometrico compaiono dei punti per i quali non viene precisata la costruzione [probabilmente a questo punto comincia a farsi sentire la fatica di fine anno scolastico!].

Il problema di maggio conclude l'impegno di "lavoro" relativo all'anno scolastico 2007-2008. Cogliamo l'occasione per ringraziare tutti coloro che hanno partecipato a questa nostra attività. Ci auguriamo di ritrovare tutti i nostri fedeli amici nel prossimo anno scolastico, con la speranza che altri nuovi adepti condividano il progetto Flatlandia.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

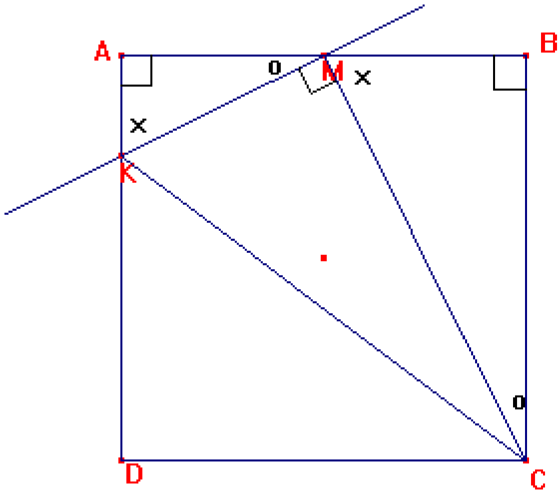
SM "C.A. Dalla Chiesa", S.Genesio ed Uniti (PV)

SM “G.B. Tiepolo”, Milano (MI)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LST “Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)
ITCG “Ruffini”, Imperia (IM)
LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
ITCG “E. Majorana”, Castrolibero (CS)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Alessandro Trancuccio, Classe 2S
Scuola Media di San Genesio e Uniti (PV)



1)

I triangoli AMK e BCM sono simili perché hanno gli angoli uguali:

AMK è il complementare di BMC perché [la somma delle loro ampiezze è uguale a] 180° - KMC (90°per ipotesi) = 90°
AKM è il complementare di AMK quindi AKM = BMC
BCM è il complementare di BMC quindi BCM = AMK
Gli angoli A e B sono di 90° per ipotesi

Se sono simili il rapporto tra [le lunghezze dei] i lati [corrispondenti] deve essere lo stesso [uguale]:

Se AM = ½ BC per costruzione, allora:
AK = ½ MB = ¼ AB
KM = ½ MC

Per poter affermare che i triangoli MBC e KMC sono simili, posso vedere se il rapporto tra i lati è lo stesso [uguale].
Ipotizzo che BC = 1

CM = √(¼ + 1) = √(5/4) = √5/2
KM = √(1/16 + ¼) = √(5/16) = √5/4
CK = √(5/4 + 5/16) = √(25/16) = 5/4

CM / BC = √5/2
MK / BM = (√5/4) / (1/2) = √5/2
CK / CM = (5/4) x (2/√5) = 5/ (2√5) = (5√5) / (2√5√5) = (5√5) / (2√25) = (5√5) / (2x5) = √5/2
Essendo i rapporti tra i lati corrispondenti uguali, i triangoli MBC e KMC sono simili.

2)

Se: AK = ¼ AD
KD = ¾ AD
CK = 5/4 e DC=1= 4/4
La terna pitagorica è 3,4,5 perché [le lunghezze dei] i lati del triangolo sono ¾ ; 4/4 ; 5/4

3)

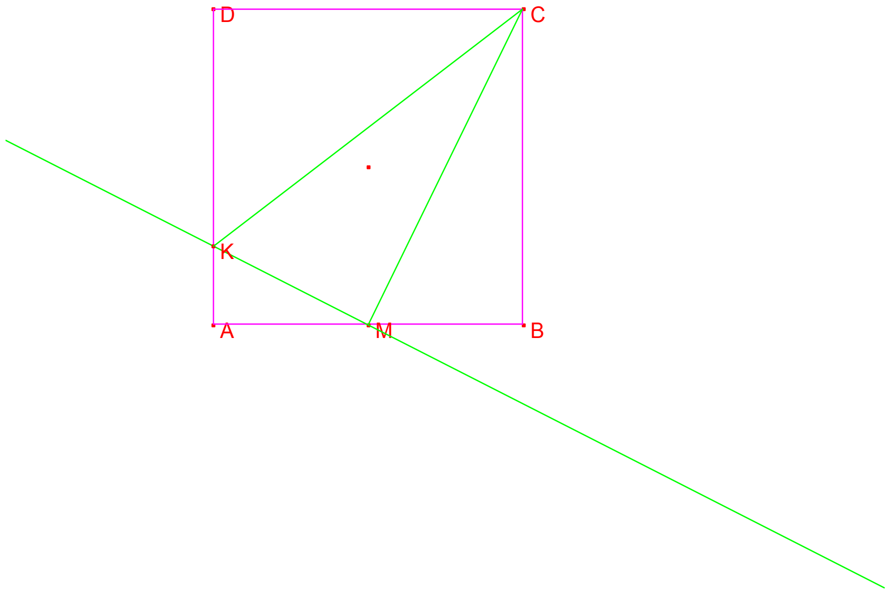
Verifico che l'area del triangolo BCM è media proporzionale tra l'area del triangolo AKM e quella del quadrato:

$\mathcal{A}$AKM / $\mathcal{A}$BCM deve essere uguale a $\mathcal{A}$BCM / $\mathcal{A}$Q

$\mathcal{A}$AKM = ¼ x ½ x ½ = 1/16
$\mathcal{A}$BCM = ½ x ½ = ¼

Perciò (1/16) / (1/4) = (1/4) / 1 perché (1/4) x (1/4) / (1/16) = (1/16) / (1/16) = 1

Andrea Blasi, Leonardo De Castro, Classe 2F
Scuola Media "G.B. Tiepolo", Milano (MI)



Ipotesi nel testo del problema

AM = MB

KM ⊥ CM

DC = CB = AB = DA

∠A = ∠B = ∠C = ∠D = 90º

1)

Considerati i triangoli MBC e KAM, essi sono simili per il primo criterio di similitudine dei triangoli, infatti:

∠A=∠B per ipotesi

∠AKM =∠CMB perché, essendo ∠KMC=90º:

∠AMK + ∠CMB = 90º

∠AMK + ∠AKM = 90º

∠AMK [∠AKM e non ∠AMK] =∠CMB

$\angle KMA = \angle MCB$ per differenza di angoli interni [perché complementari di angoli congruenti]

Quindi si può scrivere:

$CB:AM = CM:KM$

Ma essendo AM congruente a MB si può anche scrivere:

$CB:MB = CM:KM$

I triangoli MBC e KMC sono quindi simili per il secondo criterio di similitudine, poiché $\angle KMC = \angle A$ [meglio $\angle B$] e i lati che li formano sono in proporzione tra loro.

2)

$KA = \frac{1}{2} \cdot MB$ perché il rapporto di similitudine fra i triangoli KAM e MBC è ½,

dato che AM è la metà di CB per ipotesi

$KA = \frac{1}{4} \cdot DA$ perché MB è ½ di DA e quindi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$DK = \frac{3}{4} \cdot DA$

La terna pitagorica da cui deriva la terna del triangolo DKC è quella 3-4-5 poiché:

DK = 3 unità frazionarie

DC = 4 unità frazionarie

CK = 5 unità frazionarie

3)

$A(AKM) = \frac{1}{4} \cdot A(CMB)$ perché essendo ½ il rapporto di similitudine tra i triangoli,

il rapporto delle aree è il quadrato del rapporto dei lati

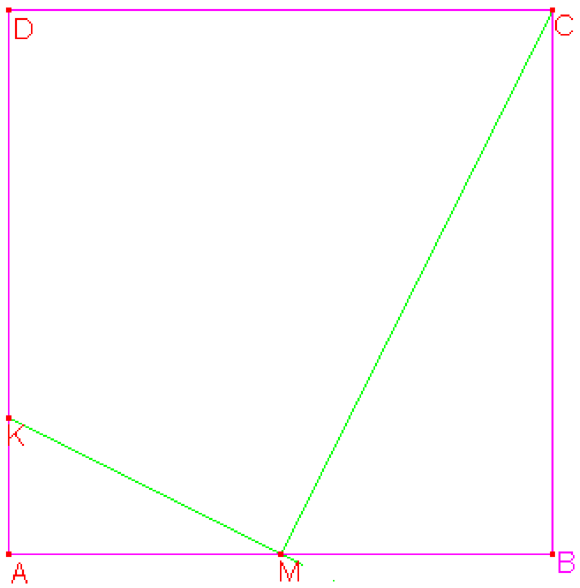
L'area di MBC è medio proporzionale tra l'area di KAM e di ABCD perché:

$A(CMB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CB : 2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \frac{1}{2} \cdot CB = (\frac{1}{2})^2 \cdot AB\ [AB^2] = \frac{1}{4} \cdot A(ABCD)$

Quindi si può scrivere:

$A(AKM) : A(CMB) = A(CMB) : A(ABCD)$

Roberto Ferraro, Pasquale Spadafora
Classe 2B, LS "Pitagora", Rende (CS)



[nella figura manca il lato KC]

1)

[La somma delle ampiezze degli] Gli angoli AMK, KMC e CMB [è 180°] (sono supplementari), quindi essendo l' angolo KMC retto CMB è complementare a AMK.
I triangoli AMK e MBC hanno:
L'angolo MCB congruente a AMK essendo entrambi complementari all' angolo CMB .
L'angolo AKM congruente a CMB essendo entrambi complementari all' angolo AMK .
Quindi sono simili.
Quindi KM/MC = AM/BC.
Ma essendo AM congruente a MB per ipotesi KM /MC = BM/BC.
Essendo i triangoli CMB e MKC (proporzionali) [con due lati corrispondenti in proporzione e l'angolo compreso congruente] sono simili.

2)

Indico con x AK.
AM = 2x essendo il triangolo AKM simile (all'!) [al] triangolo CMB avente il cateto maggiore pari (a 2cateti minori) [al doppio del cateto minore].
Essendo MB congruente a AM per ipotesi MB = 2x.
Essendo BC = 2MB, allora BC = 4x.
Essendo ABCD un quadrato DC = 4x e AD = 4x.
Essendo DA = 4x e AK = x allora DK = 3x.
Utilizzo il teorema di Pitagora sul triangolo rettangolo KDC.
($KC^2=\sqrt{(KD^2+DC^2)}$.) [le notazioni!]
$KC=\sqrt{(KD^2+DC^2)}$.
$KC=\sqrt{(9x^2+16x^2)}$.
$KC=\sqrt{(25x^2)}$.
$KC=5x$

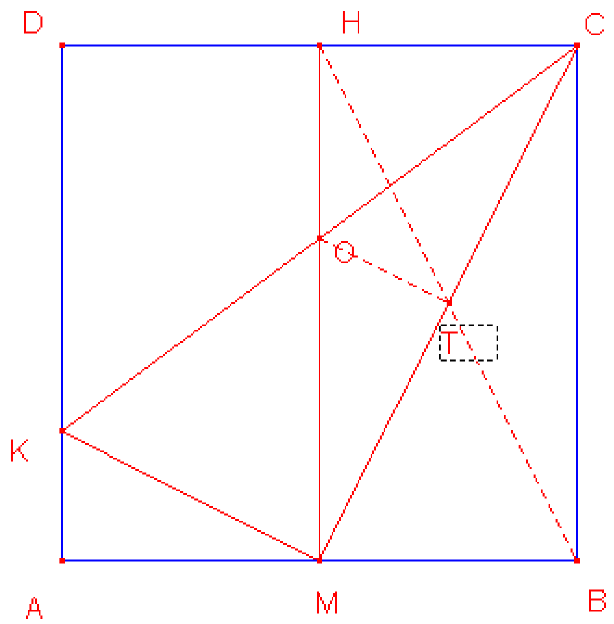
DK=3[x]
DC=4[x]   [è meglio concludere che la terna pitagorica è 3, 4, 5]
KC=5[x]

3)

L'area di BCM=MB.BC/2=2.4'2 [2*4/2] = 4 (che vuol dire?) [sarebbe opportuno indicare l'unità di misura]
L'area di AMK=AM.AK/2=2.1'2 [2*1/2] =1 .....? [un po' più di attenzione alle notazioni]
L'area di ABCD=AB.BC=4.4=16

16/4=4/1

Giuseppe Lucarelli
Classe 2E, LS "Pitagora", Rende (CS)



1)

I due triangoli MBC e KMC sono simili (se) [in quanto] hanno due angoli ordinatamente congruenti. L'angolo CBM è congruente all'angolo KMC perché entrambi sono retti. Quindi (si deve) [basta] dimostrare che l'angolo BCM è congruente all'angolo MCK.
Innanzitutto va detto che l'angolo MCB + l'angolo CMB =90°, ma anche l'angolo CMH + l'angolo CMB =90°. Di conseguenza l'angolo BCM è congruente all'angolo CMH [perché alterni interni].
Ora tracciamo HB che è la diagonale del rettangolo MBCH, e tracciamo la perpendicolare a CM [dal punto?], che incontrerà questa nel punto T [perché...], che è punto medio di CM, perché centro di simmetria delle diagonali del rettangolo MBCH, che, come noto, è un [particolare] parallelogramma. Ora consideriamo i triangoli OTM e OTC, essi hanno:
OT in comune; MT congruente a TC perché T, come detto è punto medio; Gli angoli OTM e OTC congruenti perchè retti. I due triangoli sono dunque congruenti per il Primo Criterio di Congruenza

dei triangoli. Di conseguenza gli angoli HMC e KCM sono congruenti. Per la proprietà transitiva, dunque, gli angoli BCM e MCK sono congruenti. Quindi i due triangoli sono simili.

2)

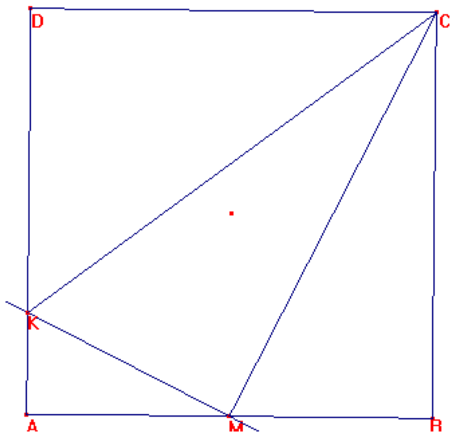
Le lunghezze dei lati del triangolo KDC sono proporzionali alla terna pitagorica “3-4-5”.
Indichiamo con “a” [la lunghezza del] il lato DC del quadrato ABCD, AM misura dunque “a/2” mentre AK misura “a/4” (perché?). Quindi KD è uguale ad “a-a/4”che è uguale a “3/4a” [meglio(3/4)a]. CK, applicando il teorema di Pitagora, misurerà “5/4a” [(5/4)a]. La proporzione “(3/4)a : 3 = (5/4)a : 5 è (giusta) [soddisfatta] perchè il prodotto dei medi, “(15/4)a” è uguale a quello degli estremi. Anche la proporzione “(3/4)a : 3 = a : 4” [è soddisfatta] perché sia il prodotto dei medi che quello degli estremi è uguale a “3a”. Dunque la tesi è dimostrata.

3)

L’area del triangolo BCM è uguale al semiprodotto di BM e BC. BC = a; BM = a/2. Quindi l’area è uguale ad “$a^2/4$”. L’area del triangolo AKM è uguale al semiprodotto di AK e KM, cioè “$a^2/16$”. L’area del quadrato ABCD è uguale ad “a^2”. L’area di BCM è media proporzionale tra l’area di AKM e quella di ABCD poiché la proporzione “$a^2/16 : a^2/4 = a^2/4 : a^2$” è giusta [soddisfatta]. Infatti il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, “$a^4/16$”.

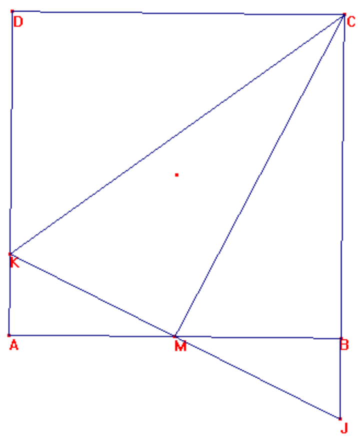
Andrea Medaglia, Andrea Barbesta
Classe 2, LST "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)

1)



Nel quadrato *ABCD*, indichiamo con *M* il punto medio di *AB*. La retta perpendicolare a *MC* in *M* interseca il lato *AD* nel punto *K*. Dimostrare che il triangolo *BCM* ha gli angoli congruenti a quelli del triangolo *KCM* [è simile al triangolo *KCM*].

KMC = CBM perché Retti.



[Come è stato costruito il punto J?]

Considero [i triangoli] **AKM** e **BMJ**. Sono congruenti perché hanno:
BM = AM perché M è punto medio;
KMA = BMJ perché opposti al vertice;
KAM = MBJ perché retti.
Quindi sono **congruenti** per il **secondo criterio** e avremo: **KM=MJ.**
Ora considero il triangolo in figura **ACJ [KCJ]**. È **isoscele** perché ha l' **altezza** CM relativa ad AB **perpendicolare nel punto medio**. Quindi è anche bisettrice dell' angolo KCJ, e quindi avremo:
BCM=MCK per dimostrazione precedente
Ora per differenza di angoli congruenti avremo anche:

MKC=CMB

2)

Adesso considero i triangoli **BMJ** e **BMC.**
Sono **simili** perché hanno tutti gli **angoli congruenti**, infatti:

JBM = CBM perché retti
BJM = BMC perché entrambi congruenti a MKC.
JMB = BCM per differenza di angoli congruenti.

Sono simili anche **KAM e MBC**, perché KAM è congruente ad un triangolo simile a BMC (BJM)
Essendo, nel triangolo BMC, BM metà di BC, anche per KAM avrò la stessa relazione, quindi **KA = BM/2.**

AB = l
BM = l/2
BC = l
KA = l/4

Nel triangolo KDC ho le seguenti misure dei lati espresse in funzione di l:

CD = l
DK = 3/4l [meglio (3/4)l] essendo KA = l/4
CK=5/4l [(5/4)l] per il teorema di Pitagora.

Quindi la terna pitagorica a cui sono proporzionali i lati è: **5,4,3.**

3)

Calcolo le aree dei triangoli.

$A_{AKM}=(l/2*l/4)/2=l*l/16=l^2/16$
$A_{BMC}= l^2/4$
$A_{ABCD}= l^2$

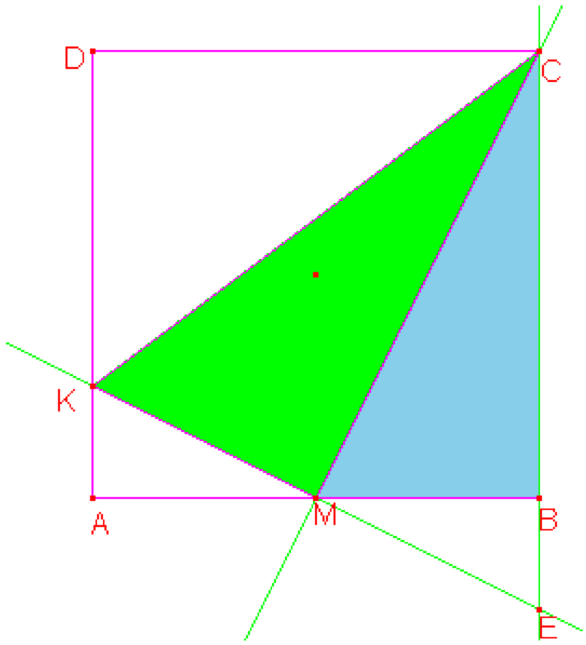
Quindi vale l’uguaglianza tra i due rapporti:

$l^2/16: l^2/4$ e $l^2/4: l^2$

Ardoino, Bortolini, Gonfalone, Di Pietro, Dulbecco, Grimaldi,
Oda, Pinto, Razzani, Sahlaoui, Scarsella, Tallone
Classe 3A Programmatori, ITCG “Ruffini”, Imperia (IM)

1)

Abbiamo disegnato la figura:



[occorre precisare la costruzione del punto E]

$\angle CMB + \angle MCB = 90°$ nel triangolo rettangolo BMC
$\angle CMB + \angle BME = 90°$ per costruzione

$\rightarrow \angle MCB \cong \angle BME$ per (la proprietà transitiva della congruenza) [le proprietà della relazione di uguagliaglianza].
Inoltre $\angle BME \cong \angle KMA$ perché opposti al vertice $\rightarrow \angle MCB \cong \angle KMA$ per la proprietà transitiva della congruenza.

Il triangolo AKM è allora simile al triangolo BCM per il primo criterio di similitudine avendo $\angle MCB \cong \angle KMA$ e $\rightarrow \angle KAM \cong \angle MBC$ perché retti

$\rightarrow$ i lati corrispondenti sono in proporzione: AK : MB = AM : CB = KM : CM

AK : AM = MB : CB = KM : CM (essendo MB ed AM congruenti per costruzione) $\rightarrow$
MB : CB = KM : CM

Ne segue che il triangolo BCM è simile al triangolo KCM per il secondo criterio di similitudine, avendo l’angolo retto ($\angle KMC \cong \angle MBC = 90°$ per costruzione) compreso fra due lati in proporzione.

2)

Per la proporzione precedente AK : AM = MB : CB, essendo MB $\cong \frac{1}{2}$ CB, si ha AK $\cong \frac{1}{2}$ AM $\rightarrow$

poiché DK $\cong$ DA – DK [AK] $\cong$ 2AM – $\frac{1}{2}$ AM $\cong \frac{3}{2}$ AM ossia DK : AM = 3 : 2

$\rightarrow$ DK : $\frac{1}{2}$ DC = 3 : 2 $\rightarrow \frac{DK}{DC} \cdot 2 = \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ DK : DC = 3 : 4

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo BCM e al triangolo KCM, si ha:

$CM^2 = MB^2 + CB^2 = \frac{1}{4} CB^2 + CB^2 = \frac{5}{4}\ CB^2$

$CK^2 = KM^2 + CM^2 = \frac{1}{4} CM^2 + CM^2 = \frac{5}{4}\ CM^2$ (tenuto conto che KM $\cong \frac{1}{2}$ CM per la similitudine del punto 1)

Ne segue :

$CK^2 = \frac{5}{4} \frac{5}{4} CB^2 = \frac{25}{16} CB^2 \rightarrow CK = \frac{5}{4} CB$ $\rightarrow$ CK : CB = 5 : 4 $\rightarrow$ CK : DC = 5 : 4 (CB e DC lati del quadrato).

Dalle due proporzioni DK : DC = 3 : 4 e CK : DC = 5 : 4, concludiamo quindi che nel triangolo KDC i lati sono proporzionali a 5, 4, 3 che sono una terna pitagorica in quanto $5^2 = 3^2 + 4^2$

3)

Sia l il lato del quadrato $\rightarrow$ Area (BCM) = $\frac{l}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2}{4}$ e Area (ABCD) = l^2

Poiché Area(AKM) = AK*AM * $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} AM^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\frac{1}{2} l)^2 = \frac{1}{16} l^2$, si può concludere che

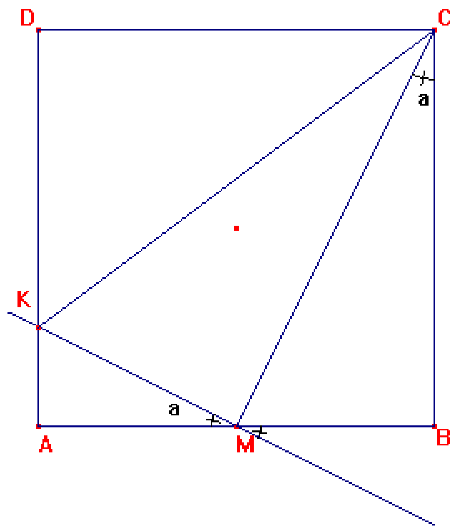
Area(AKM) : Area(BCM) = Area(BCM) : Area(ABCD), cioè:

$\frac{1}{16} l^2 : \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{4} : l^2$ uguaglianza vera per la proprietà fondamentale delle proporzioni.

Classe 3M Liceo Scientifico "Aristosseno" Taranto (TA)

1)

Indicato l'angolo AMK con α, essendo KMC = 90° per costruzione , sarà CMB = 90°-α e quindi MCB =α. Da questo deriva che i triangoli AKM e BCM sono simili (triangoli rettangoli con un angolo acuto congruente) e possiamo allora scrivere la proporzionalità tra i lati omologhi :
AM : BC = MK : CM . Essendo però AM = MB (per costruzione M è punto medio di AB) si ha pure : (*) MB : BC = MK : CM e da questa proporzione segue che anche i triangoli KCM e BCM sono simili (hanno l'angolo retto congruente e i lati che lo comprendono proporzionali).



2)

Poniamo AB = l ; sarà quindi AM =MB = $l/2$ e calcoliamo la misura dell'ipotenusa con il teorema di Pitagora: CM = $\sqrt{BC^2+MB^2} = \sqrt{l^2+\frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{5}$. Dalla proporzione (*) ricaviamo la misura di MK = $\frac{MB\cdot CM}{BC} = \frac{\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\sqrt{5}}{l} = \frac{l}{4}\sqrt{5}$ e infine, ancora applicando il teorema di Pitagora, determiniamo la misura di CK =$\sqrt{CM^2+MK^2} = \sqrt{\frac{5}{4}l^2+\frac{5}{16}l^2} = \frac{5}{4}l$.

Nel triangolo MAK calcoliamo la misura del cateto AK = $\sqrt{MK^2-AM^2} = \sqrt{\frac{5}{16}l^2-\frac{l^2}{4}} = \frac{l}{4}$

ottenendo di conseguenza che nel triangolo KDC: DK = AD – AK = $l-\frac{l}{4}=\frac{3}{4}l$,

DC = l e CK = $\frac{5}{4}l$. Le misure di questi tre lati sono proporzionali ai numeri della terna pitagorica 3, 4 e 5; infatti si ha che $\frac{3}{4}l : l : \frac{5}{4}l = 3:4:5$.

3)

Calcolando la (misura) dell'area del triangolo BCM troviamo: AREA(BCM) = $\frac{MB\cdot BC}{2} = \frac{l^2}{4}$

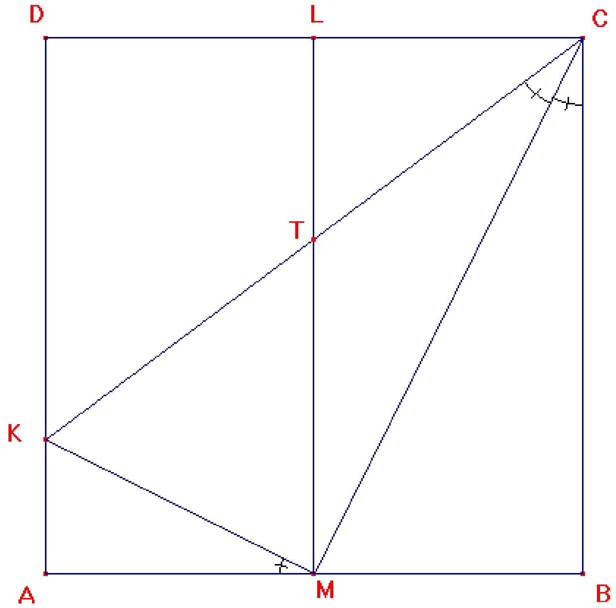
mentre AREA(AKM) = $\frac{AM \cdot AK}{2} = \frac{\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}}{2} = \frac{l^2}{16}$ e AREA(ABCD)=l^2.

Dal calcolo si vede che AREA(BCM)^2 = AREA(AKM) x AREA(ABCD) e quindi vale la

proporzione (continua): AREA(AKM) : AREA(BCM) = AREA(BCM) : AREA(ABCD), cioè l’area del triangolo BCM è media proporzionale tra l’area del triangolo AKM e quella del quadrato ABCD.

Classe 2A/G, ITCG "E. Majorana", Castrolibero (CS)

1)



Si traccia il segmento parallelo a CB e passante per M che (da forma a) [forma] 2 rettangoli congruenti. Indicando con T l'intersezione di LM con CK si avrà che i segmenti KT, TC e MT sono congruenti [perché?], e nel triangolo isoscele MTC sono congruenti gli angoli alla base $\angle$TCM e $\angle$TMC. Inoltre $\angle$MCB e $\angle$CMT sono alterni interni rispetto alla parallela LM e CB tagliata dalla trasversale CM, per cui $\angle$MCB e $\angle$MCT sono congruenti e pertanto i triangoli CMB e MKC sono simili.

2)

I lati KD, DC, CK sono proporzionali alla terna pitagorica 3,4,5.
Dimostrazione: MB : CB = 1 : 2 per costruzione, ma il triangolo CMB è simile al triangolo KAM (è simile perché l'angolo A e l'angolo B sono retti, ($\angle$KMA $\angle$BMC sono complementari < BMC) [$\angle$KMA e $\angle$BCM sono complementari all'angolo $\angle$BMC]), pertanto avremo che

KA : AM = 1 : 2 , di conseguenza

$$KD = \frac{3}{4} DA,$$

pertanto DC : DK = 4 : 3 [e CK?]

3)
Supponiamo vera la relazione:

Ar(AKM) : Ar(BCM) = Ar(BCM) : Ar(ABCD),

cioè

$$AK \cdot AM/2 : MB \cdot CB/2 = MB \cdot CB/2 : AB^2$$

che possiamo scrivere come:

$$\frac{AK.AM.2}{2.BM.CB} = \frac{MB.CB}{2.AB^2}$$

[attenzione alle notazioni!]

e semplificando otteniamo:

$$\boldsymbol{AK = {}^{MB}\!/_{2}}$$

un risultato che conosciamo vero e che ci permette di affermare che la relazione

$$Ar(AKM) : Ar(BCM) = Ar(BCM) : Ar(ABCD)$$

è vera.