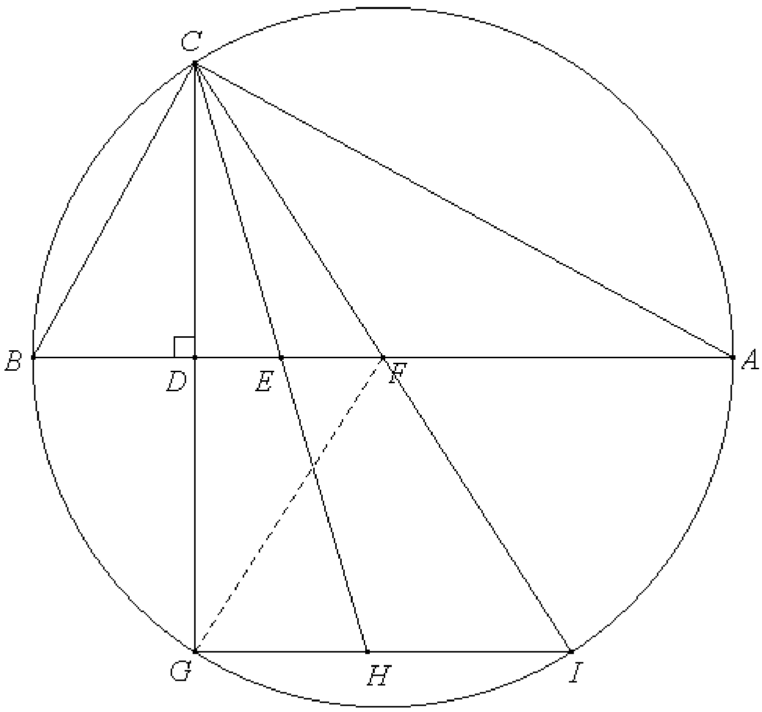
FLAT*landia*

Flatlandia 7-21 Gennaio 2008

Il testo del problema:
1) In un triangolo rettangolo *ABC* indichiamo con *CF* la mediana relativa all'ipotenusa *AB*, con *CE* la bisettrice dell'angolo *ACB* (col punto *E* appartenente all'ipotenusa *AB*) e con *CD* l'altezza relativa ad *AB*. Dimostrare che l'angolo *DCE* è congruente all'angolo *ECF* ($\angle DCE \cong \angle ECF$).
2) Tracciare la circonferenza circoscritta al triangolo *ABC* e considerare i punti *G*, *H*, *I*, rispettivamente simmetrici di *C* nelle simmetrie di centro *D*, *E*, *F*. Quali proprietà si deducono per i punti *G*, *H*, *I*?
3) La proprietà dimostrata nel punto 1) vale anche se il triangolo non è rettangolo?



Commento
Abbiamo ricevuto sei risposte così suddivise: una proveniente da una Scuola Media, tre dal biennio delle Scuole Superiori, e due dal triennio delle Scuole Superiori (sempre III anno). Il problema poneva tre domande (tra loro collegate): nel primo quesito si chiedeva di dimostrare la congruenza (o, se si preferisce, l'uguaglianza) di due angoli; nel secondo di determinare di quali proprietà godeva una terna di punti, di cui si dava la costruzione geometrica e nel terzo di verificare se la proprietà dimostrata nel primo punto, a proposito dei triangoli rettangoli, risultava valida anche per altri triangoli.
In tutte le risposte pervenute viene risolto correttamente il primo quesito, ma ci teniamo a sottolineare che in una di queste risulta poco curato l'aspetto linguistico: sarebbe auspicabile in futuro una maggiore cura nell'elaborazione del testo.
Per il secondo quesito, solo alcuni rispondono in modo sostanzialmente corretto utilizzando le similitudini tra triangoli o un'opportuna omotetia. [Vogliamo, inoltre, ricordare che un fascio di rette parallele è costituito da tutte le *infinite* rette parallele a una retta data e non da *tre* rette.]
Altri utilizzano, senza averlo preliminarmente dimostrato, il parallelismo di certe rette. [Vogliamo precisare che il teorema di Talete, senza opportune precisazioni, *non* è in generale invertibile,

mentre lo è il suo corollario applicato ai triangoli.] Altri forniscono una soluzione incompleta, oppure, dopo aver verificato con Cabri l'allineamento dei punti in esame, non ne forniscono la dimostrazione [ribadiamo ancora che Cabri *non* fornisce dimostrazioni geometriche, ma permette solo di fare congetture]. Per quanto riguarda l'ultimo quesito in una sola risposta è presente la dimostrazione per assurdo che se il triangolo non è rettangolo [ma scaleno], allora la proprietà non vale [ma nella risposta non viene preso in esame il caso particolare del triangolo isoscele sulla base AB], altri considerano il caso particolare del triangolo isoscele, ma poi forniscono un'affermazione contradditoria con quanto dimostrato nel primo quesito affermando che la proprietà non è valida per i triangoli scaleni e dimenticandosi in tal modo che ogni triangolo rettangolo avente i due cateti non congruenti è un particolare triangolo scaleno.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

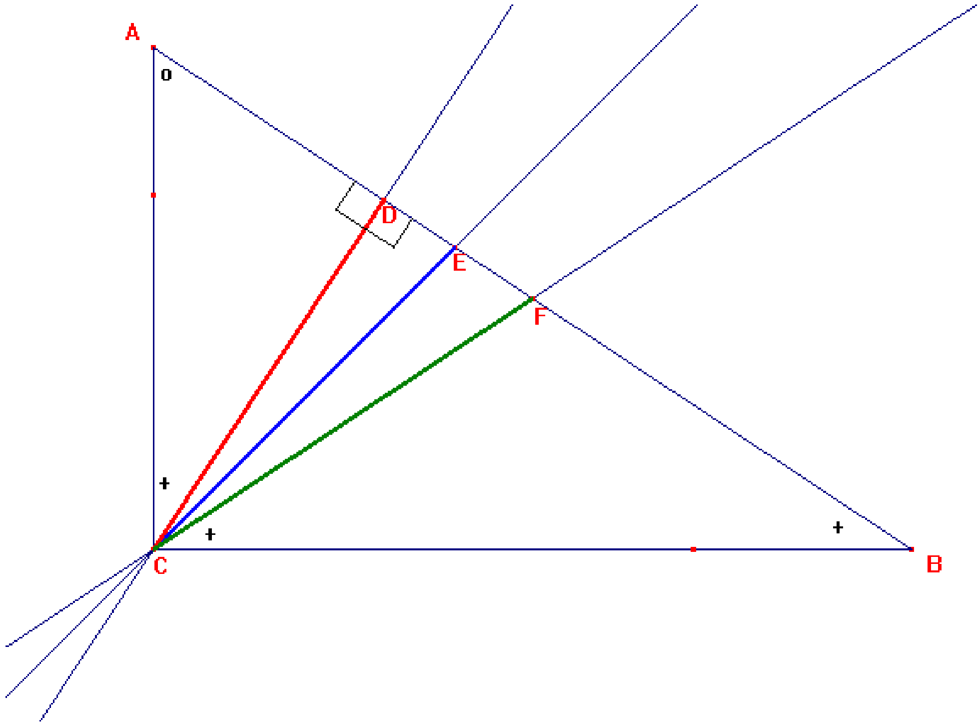
- SM "C.A. Dalla Chiesa", S.Genesio ed Uniti (PV)
- ITI, LST "F. Berenini", Fidenza (PR) [2 risposte distinte]
- ITCG "Ruffini", Imperia (IM)
- ITCG "E. Majorana", Castrolibero (CS)
- LS "Aristosseno", Taranto (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Alessandro Trancuccio, Classe 2S
Scuola Media di San Genesio e Uniti (PV)

1)



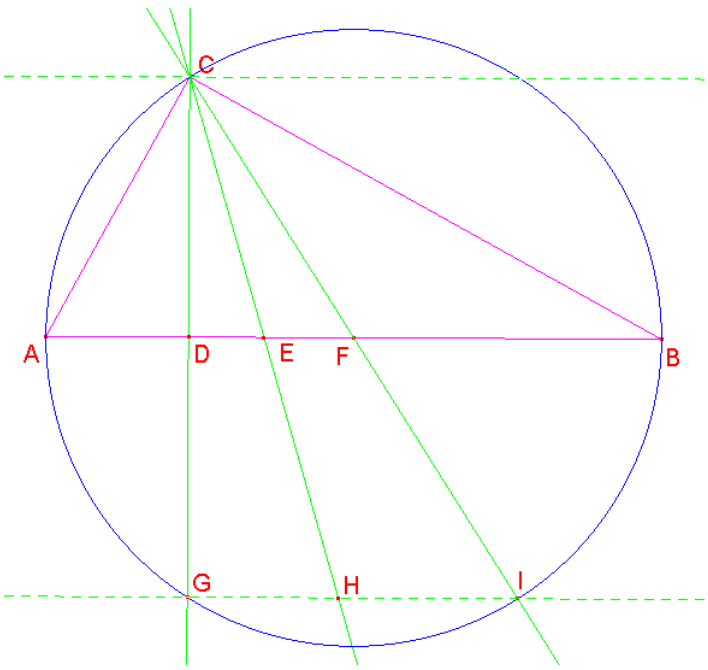
- Gli angoli ABC e FCB sono uguali essendo isoscele il triangolo FCB, perché in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è esattamente metà ipotenusa e quindi BF = CF
- Gli angoli FAC = ACF essendo isoscele il triangolo AFC, perché in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è esattamente metà ipotenusa e quindi AF = CF
- CAB + ABC = 90° perché sono angoli complementari nel triangolo rettangolo ABC
- CAB + ACD = 90° perché sono angoli complementari nel triangolo rettangolo ACD
- Quindi gli angoli ABC e ACD sono uguali perché angoli complementari di uno stesso angolo ma ACD è uguale anche all'angolo FCB per quello dimostrato al primo punto, cioè che gli angoli FCB = ABC
- SE: ACD + DCE = 45° e ECF + FCB = 45° poiché CE è bisettrice allora
  DCE = ECF perché gli angoli ACD e FCB sono uguali.

2) [[…]]

3) [[…]]

Lorenza Zanichelli, Filippo Corsini, Gianluca Ciati, Federico Boselli
Classe 2B LST "F. Berenini" Fidenza (PR)

1)
Si consideri il triangolo ABC. La sua mediana CF taglia nel punto medio il lato AB, quindi AF è congruente a FB. Se gli angoli ECA e ECB sono congruenti, in quanto CE è la bisettrice dell'angolo ACB, allora la somma degli angoli ACD e DCE è congruente alla somma degli angoli ECF e FCB (ACD + DCE congruente a ECF + FCB).
Gli angoli FBC e BCF sono congruenti perché angoli della base del triangolo isoscele FCB. Il triangolo FBC è isoscele perché FB è congruente a FC, in quanto sono raggi della circonferenza circoscritta al triangolo ABC quindi gli angoli ACF e CAF sono congruenti perché angoli alla base del triangolo isoscele ACF. Quest'ultimo è un triangolo isoscele perché FA è congruente a FC, in quanto sono raggi della circonferenza circoscritta al triangolo ABC. Essendo l'angolo ACB retto, gli angoli in CAB e CBA sono complementari, in quanto la somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto.
Si consideri il triangolo ADC. L'angolo ADC è retto perché CD è l'altezza relativa ad AB. Quindi gli angolo DAC e ACD sono complementari, in quanto la somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto. Dunque, se: CAB + ABC è congruente a DAC + ACD, allora ABC è congruente all'angolo BCF e all'angolo ACD, e se ACD + DCE è congruente a ECF + FCB, allora ABC + FCE è congruente a ABC + DCE.
Quindi FCE è congruente a DCE.



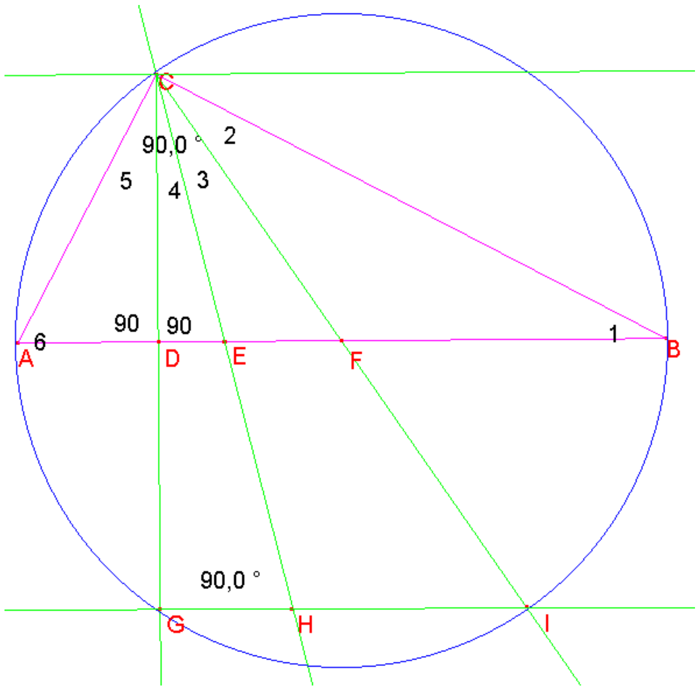
2) [[…]]

3) [[…]]

Mariachiara Parrotta, Alice Fava, Greta Scaltriti
Classe 2B ST ITIS "F. Berenini" Fidenza (PR)

1)
IPOTESI: FB ≡ AF ≡ FC.
CFB = triangolo isoscele [questa non è un'ipotesi, ma una conseguenza immediata della precedente ipotesi]
TESI: 3 ≡ 4
DIMOSTRAZIONE:

1≡2 perché angoli alla base di un [del] triangolo isoscele (formato da) [*eliminare*] CBF;
2+3≡4+5 (CE bisettrice);
5+6=angolo retto perché l'angolo ADC è retto ([la] somma degli angoli interni [di in triangolo] è [equivale a] un angolo piatto);
6+1=angolo retto perché l'angolo ACB è retto;
5≡1 perché 6+1 e 5+6 hanno la stessa ampiezza.
Quindi se si scrive l'equivalenza 2+3≡4+5 così 1+3≡ 4+1 si scopre che 3≡4.

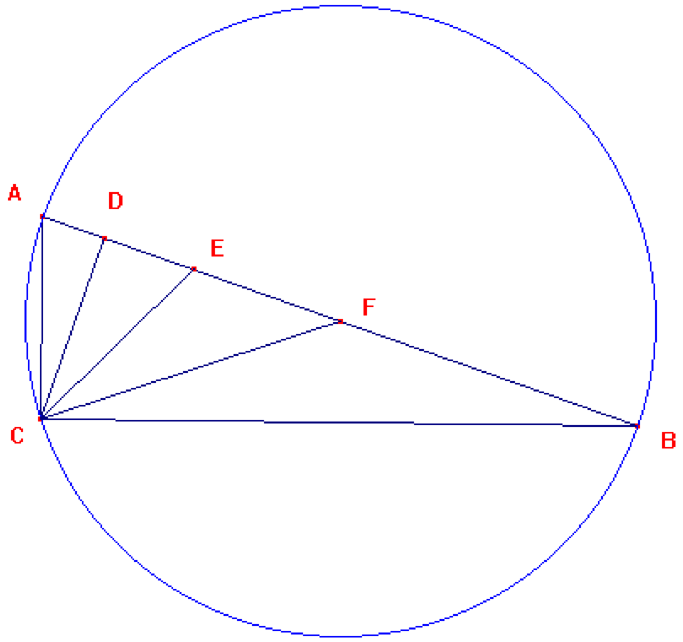


2) [[…]]

3) [[…]]

Mariano Tenuta, Classe 2 A/G
ITCG “E. Majorana” Castrolibero (CS)

1)



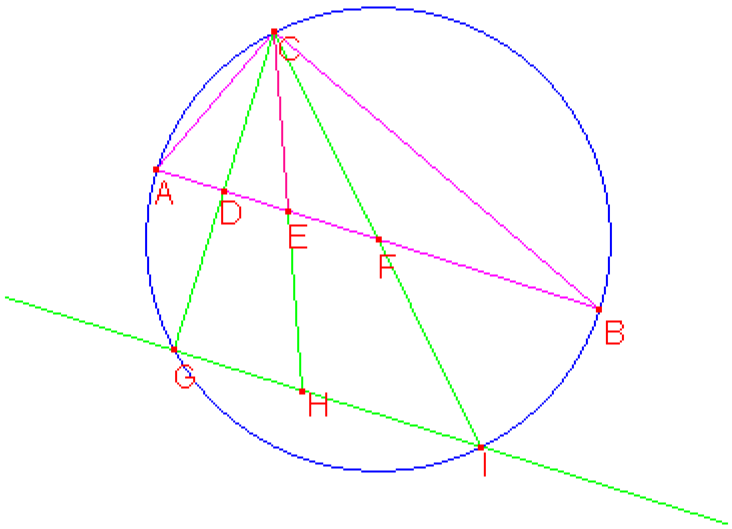
Dimostrazione primo punto:
Nel triangolo rettangolo la meridiana [mediana] CF divide il lato AB in due parti uguali [congruenti] formando due triangoli isosceli FCB e AFC.
Nel triangolo FCB sappiamo che l’angolo FCB è congruente a [all’angolo] FBC perché [angoli] alla base di un triangolo isoscele e [analogamente per il triangolo AFC] che gli angoli FAC e FCA sono anch’essi congruenti.
Inoltre [,] sapendo che gli angoli CAB e CBA, ACD e BAC sono complementari avendo [e che hanno] in comune l’angolo CAB. Si [, si] deduce, così, che gli angoli FCB , FBC e ACD sono congruenti. Pertanto [,] visto che gli angoli ACE e ECB sono congruenti [,] riavrà [si avrà anche]:
angolo ACE – angolo ACD = angolo DCE,
angolo ECB – angolo FCB = angolo ECF,
entrambi congruenti per [perché] differenza di angoli congruenti.

Non vengono fornite risposte ai quesiti 2 e 3.

Ardoino, Bortolini, Confalone, Di Pietro, Dulbecco, Grimaldi, Oda, Pinto, Razzani,Scarella Tallone
Classe 3A Programmatori ITCG "Ruffini" Imperia

1) Ipotesi:
∠ACB retto; AF≅ FB; ∠ACE≅∠ECB; CD ⊥ AB

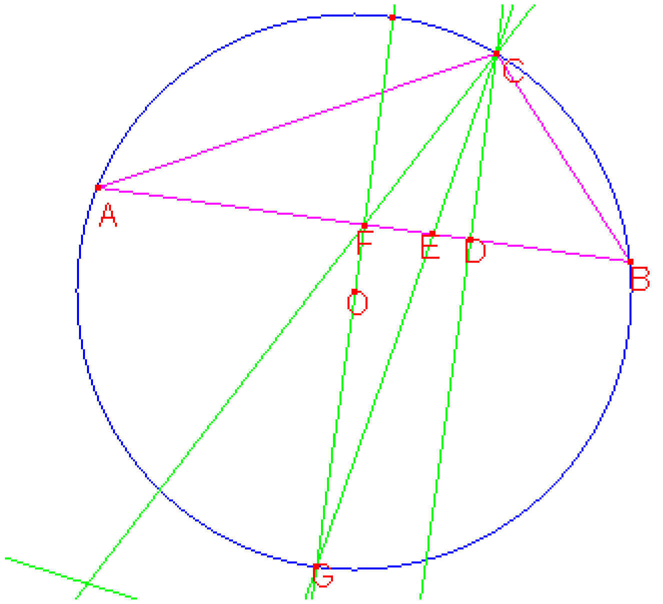
Tesi
∠ECF≅∠DCE



Premesso che CF≅FB≅AF (vedi dim. in calce *), i triangoli ACF e CFB sono isosceli → ∠BCF≅∠CBF
Si ha anche ∠CAD complementare di ∠CBF (nel triangolo ACB) e ∠ACD complementare di ∠CAD (nel triangolo ADC)
→ ∠ACD ≅ ∠CBF ≅ ∠FCB
Per ipotesi ∠ACE≅∠ECB → ∠ACE - ∠ACD ≅ ∠BCE- ∠FCB → ∠DCE ≅ ∠ECF (differenza di angoli congruenti)

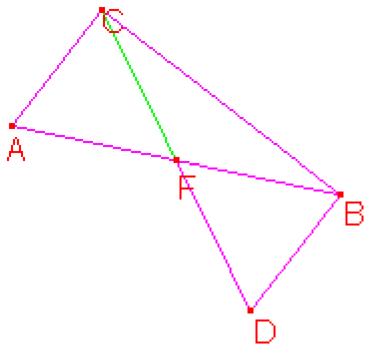
2) Il triangolo ACB è inscritto nella semicirconferenza di diametro AB. G appartiene alla circonferenza perché AB⊥ CG (il diametro perpendicolare ad una corda è asse della corda).
Il punto I appartiene alla circonferenza perché F è centro della circonferenza e CF è raggio.
I punti G, H, I risultano allineati perché:
per costruzione CG/CD = CH/CE = CI/CF = 2 → i triangoli CDE e CGH sono simili per il 2° criterio di similitudine (angolo ∠DCE in comune, compreso fra lati in proporzione) → ∠CDE≅ ∠CGH . Questi sono angoli corrispondenti formati da DE e GH tagliate da CG → DE è parallela a GH. Analogamente il triangolo CDF è simile al triangolo CGI → DF è parallela a GI. Poiché D, E, F sono allineati e la parallela a DF per G è unica, la retta GH coincide con la retta GI → G, H, I sono allineati

3) La risposta è no. [Occorre considerare a parte il caso in cui il triangolo ABC sia isoscele sulla base AB].
Sia ∠ACB non retto e per assurdo sia ∠FCE≅ ∠ECD.
Tracciamo la circonferenza circoscritta al triangolo ABC, avente quindi il centro sull'asse di AB.



La bisettrice di ∠ACB e l’asse di AB hanno in comune G punto medio dell’arco AB (l’asse divide la corda AB, e quindi l’arco sotteso in due parti congruenti e la bisettrice divide l’arco su cui insiste ∠ACB in due parti congruenti).
Poiché CD e FG sono parallele, in quanto entrambe perpendicolari ad AB,
∠FGC≅ ∠GCD [=∠ECD] (alterni interni)→ il triangolo FCG risulta isoscele → FC≅ FG → F risulta appartenente all’asse della corda CG → F è coincidente con O → [AB è un diametro →] ∠ACB [il triangolo ABC] è inscritto in una semicirconferenza → [∠ACB] retto, ma questo è assurdo.

<u>* Dimostrazione connessa al punto 1)</u>

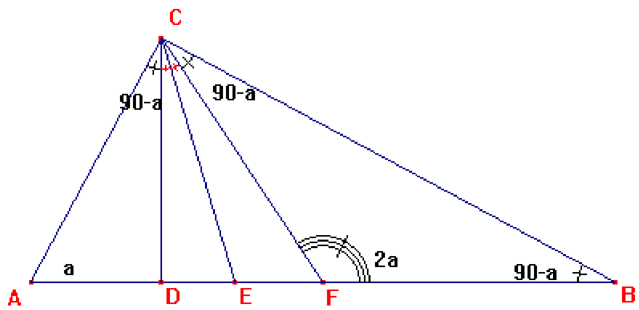


Costruiamo il triangolo FDB in modo che C e D siano simmetrici rispetto ad F. Si ha ∠AFC≅ ∠BFD , perché opposti al vertice. AF≅ FB per ipotesi → il triangolo ACF≅ FDB (per il 1° criterio di congruenza) → AC≅ DB e ∠CAF≅ ∠FBD. Essi sono alterni interni formati da AC e DB tagliate da AB → AC è parallela a DB → ∠ACB≅ ∠DBC = 90° → i triangoli ACB e DBC sono congruenti per il 1° criterio (CB in comune, ∠ACB≅ ∠DBC e AC ≅ DB) → CD ≅ AB → CF≅ ½ CD≅ FB≅ AF.

Classe 3M Liceo Scientifico "Aristosseno" Taranto

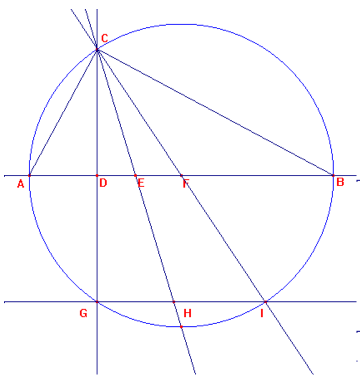
1)

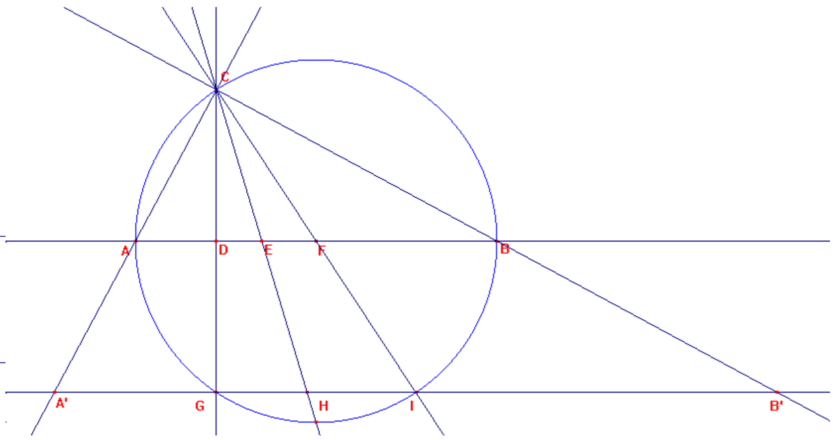
Se tracciamo la mediana CF relativa all'ipotenusa nel triangolo rettangolo ABC , poiché un triangolo rettangolo è sempre inscrittibile in una circonferenza ,la mediana CF è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo (AB è il suo diametro) e perciò risulta CF=AF=FB . I triangoli AFC e CFB sono entrambi isosceli . Saranno allora congruenti i loro angoli alla base : FAC = ACF ed FCB = FBC .Si ha però anche CFB = 2BAC in quanto un angolo al centro è sempre il doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco (BC) . Possiamo dedurre allora che FCB = FBC = 90°-BAC e nel triangolo rettangolo CDA è pure ACD=90°-BAC . Se quindi FCB = ACD e CE è la bisettrice dell'angolo retto ACB, gli angoli DCE ed ECF sono congruenti perché differenze di angoli congruenti. Più precisamente : DCE = 45°- ACD = 45°- FCB =ECF .



2)

Considerati i punti G, H ed I simmetrici di C nelle simmetrie centrali di centri rispettivamente D, E ed F per definizione di simmetria si ha : CD = GD , CE = HE e CF = IF
I punti G , H ed I sono però anche i corrispondenti dei punti D, E ed F nell'omotetia di centro C e rapporto 2 e, i punti G , H ed I sono allineati sulla retta parallela ad AB (l'omotetia trasforma rette in rette parallele) ed i triangoli CDF e CGI sono simili. Sono pure omotetici i triangoli CDE e CGH , CEF e CHI e quindi : GH = 2DE , HI = 2EF , così come GI = 2DF .I segmenti CG,CH e CI sono rispettivamente altezza, bisettrice e mediana del triangolo rettangolo trasformato di ABC nell'omotetia suddetta.





3) [[…]]