FLAT*landia*

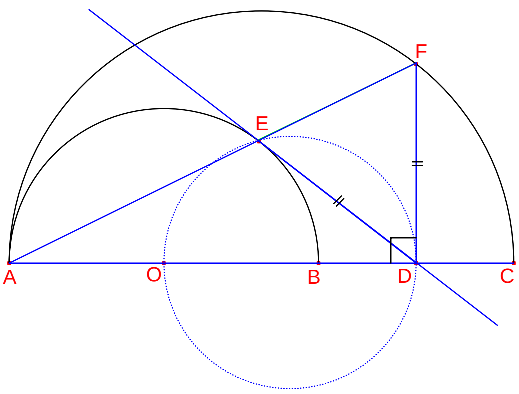
Il problema di Maggio 2007

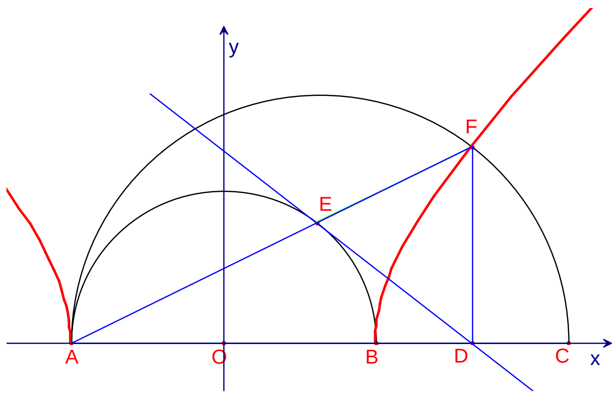
Presi tre punti allineati A, B, C (AB < AC) tracciare in uno stesso semipiano le semicirconferenze di diametro AB e AC.

a) Detto D il punto medio di BC, costruire la retta per D tangente alla semicirconferenza di diametro AB. Sia E il punto di contatto.
b) Detto F il punto in cui la retta AE incontra la semicirconferenza di diametro AC, determinare la natura dei triangoli EDF e ADF.
c) Detto O il punto medio di AB, dedurre che $OD^2 - DF^2 = OA^2$

.
E' facoltativo studiare il luogo descritto da F al variare di C sulla retta AB

Giustificare la costruzione e motivare le risposte.





Equazione luogo: $x^2 - y^2 = OA^2$, $y>0$

Commento

Abbiamo ricevuto tre soluzioni dalle scuole:

- **LS “Aristosseno”, Taranto (TA)**
- **LST, ITI “Berenini”, Fidenza (PR)**
- **SM “C.A. Dalla Chiesa”, San Genesio ed Uniti (PV)**

Nel problema proposto, date due semicirconferenze tangenti internamente, si chiedeva di costruire la retta tangente alla minore da un punto assegnato e di individuare le caratteristiche di due triangoli opportunamente ottenuti all’interno della semicirconferenza maggiore. Si chiedeva inoltre di dimostrare la relazione che intercorre fra i quadrati costruiti su tre segmenti della figura, assegnata in modo da portare poi alla scoperta di un luogo geometrico, il cui studio era richiesto come parte facoltativa.

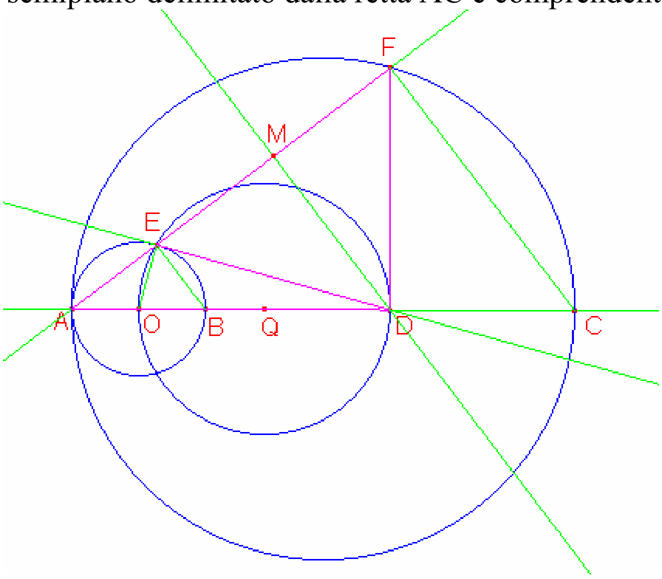
Nella risoluzione proposta dalla classe 2M del LS “Aristosseno” non viene descritta inizialmente la costruzione della retta tangente richiesta.
Si sono comunque dimostrate in modo corretto e completo le successive due richieste; non viene risolta la parte facoltativa sul luogo geometrico.

La soluzione proposta della classe 2B ST del “Berenini” presenta la costruzione della retta tangente in modo corretto. Complete anche le parti b) e c), con dimostrazioni analoghe a quelle presentate dalla classe 2M del LS “Aristosseno”.
La risoluzione degli allievi del “Berenini” presenta anche la parte facoltativa, in modo quasi corretto, in quanto vi si afferma che il luogo è un’iperbole equilatera, mentre il punto F descrive solo una parte dell’iperbole, quella costituita dai punti di ordinata positiva. Si fornisce l’equazione del luogo, ma non si studiano completamente le sue caratteristiche.

Apprezzabile la risoluzione prodotta dagli allievi della classe 3S della scuola media “C.A. Dalla Chiesa” sia per la costruzione della retta tangente sia per la dimostrazione delle caratteristiche dei due triangoli attraverso l’applicazione delle proprietà delle omotetie. Utilizzando il software Cabri hanno anche dedotto che il luogo geometrico descritto dal punto F è un “ramo di iperbole”.

Classe 2B, Liceo scientifico tecnologico
ITI “Berenini”, Fidenza (PR)

Premessa: si consideri il semipiano delimitato dalla retta AC e comprendente i punti E,F ed M.



a. Si traccia la semicirconferenza di diametro AB e centro O. Per disegnare la tangente ad essa passante per D, ricordando che il raggio è perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza, occorre disegnare la semicirconferenza di diametro DO e centro nel punto medio di OD. Il punto di intersezione E fra le due semicirconferenze è il punto di tangenza perché vertice dell’angolo retto OED. Esso risulta essere retto perché appartenente al triangolo DOE inscritto nella semicirconferenza OD e quindi rettangolo in E.

b.

Il triangolo EDF è isoscele infatti :
Congiungendo C con F risulta che l’angolo CFA è retto perché il triangolo CFA è inscritto nella semicirconferenza di diametro AC; analogamente congiungendo B con E risulta che l’angolo BEA è retto (perché il triangolo BEA è inscritto nella semicirconferenza di diametro AB). Condotta da D la parallela ad FC sia M il suo punto di intersezione con AF. Risulta che l’angolo DME è retto perché corrispondente di CFE rispetto alle parallele DM e FC tagliate dalla trasversale EF. Inoltre per il teorema di Talete essendo per costruzione BD congruente a DC per costruzione anche EM congruente a MF(segmenti corrispondenti a segmenti congruenti). Pertanto MD è altezza e mediana del triangolo EDF che risulta così isoscele.

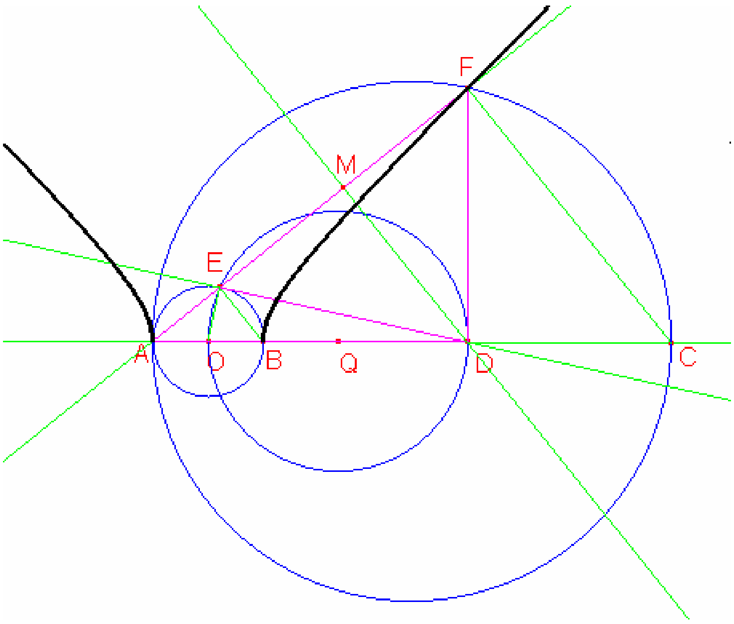
Il triangolo ADF è rettangolo in D infatti, detto α l’angolo EAO congruente ad AEO perché angoli alla base del triangolo isoscele AEO (isoscele perché AO e OE raggi della semicirconferenza di diametro AB) risulta che l’angolo EOD è 2α, perché ogni angolo esterno di un triangolo è congruente alla somma dei due angoli interni a lui non adiacenti.

- essendo l’angolo OED retto (come dimostrato nel punto a), l’angolo ODE del triangolo ODE risulta essere uguale a 90 – 2α (perché in ogni triangolo la somma degli angoli interni è 180°).
- L’angolo FED è uguale a 90 – α perché dato dall’angolo piatto AED meno l’angolo AEO e l’angolo OED.
- Essendo l’angolo DME retto (come dimostrato nel punto b1), l’angolo MDE risulta uguale ad α in quanto angolo interno del triangolo EDM ottenuto da 180-(90+90- α)

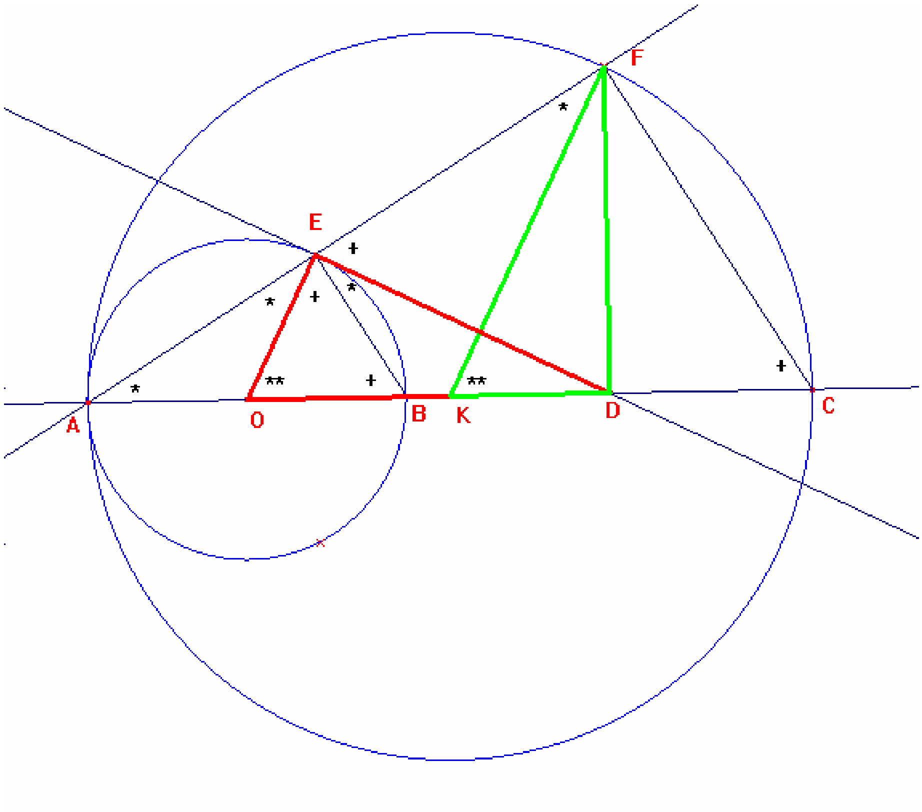
- L'angolo MDF è congruente all'angolo EDM in quanto DM altezza e mediana del triangolo isoscele EDF è anche bisettrice.
- Pertanto l'angolo FDA è retto perché somma di ADE (90-2α) con EDM (α) e MDF (α).

c. Poiché il triangolo ODE è rettangolo in quanto E punto di incontro tra il raggio OE e la tangente ED, per il teorema di Pitagora si ha: $OE^2 = OD^2 - ED^2$. Ricordando che OE e OA sono congruenti perché raggi di una stessa circonferenza e ED e DF sono congruenti perché lati del triangolo isoscele EDF, sostituendo OE con OA e ED con DF si ha: $OA^2 = OD^2 - DF^2$

Facoltativo:
Considerato un riferimento cartesiano di centro O e asse delle ascisse AC, il punto F ha ascissa OD e ordinata DF. Pertanto la relazione del punto c) $OD^2 – DF^2 = OA^2$ rappresenta l'equazione di un' iperbole equilatera di semiasse OB: $x^2 – y^2 = OB^2$ **[di cui il punto F descrive solo la parte con ordinate positive]**



Chiara Veronesi, Francesca Giacovelli, Victoria Pimentel
Classe 3S ScuolaMedia “C.A. Dalla Chiesa”
San Genesio ed Uniti (PV)



1. Abbiamo tracciato la tangente alla circonferenza di diametro AB in questo modo: abbiamo considerato il segmento OD, cercato il punto medio (H) e tracciata una circonferenza di raggio OD/2 e centro H che ha incontrato la circonferenza di diametro AB nel punto E.
Indichiamo con K il centro della circonferenza di diametro AC.
Indichiamo con “a” e “b” la misura dei seguenti segmenti: AO=OB=a e BD=DC=b
I triangoli AEB ed AFC sono rettangoli perché inscritti in una semicirconferenza e omotetici con centro di omotetia in A perché hanno un angolo in comune, l’angolo EAB e i lati corrispondenti sono paralleli: AE//AF e AB//AC.
I triangoli AOE ed AKF sono triangoli isosceli perché AO = OE=raggi ed AK=KF=raggi e sono omotetici perché hanno un angolo in comune, l’angolo EAO e i lati corrispondenti paralleli: AE //AF e AO//AK. Di conseguenza anche OE sarà parallelo KF e quindi saranno uguali gli angoli EOB=FKD perché corrispondenti rispetto alle rette parallele OE//KF.
Consideriamo i triangoli OED ed KFD, essi hanno: OD=KF= a+b (perché se il diametro AC= 2a +2b allora il raggio misura a+b) , OE=KD= a (la misura di KD è “a” perché il raggio KC=a+b e se togliamo la misura di DC=b troviamo che KD=a), e gli angoli EOB=FKD quindi i triangoli OED e FKD sono triangoli congruenti e pertanto si avrà ED=FD.
Considero la relazione di Pitagora applicata al triangolo EOD: $OD^2 = EO^2 + ED^2$. per quello che abbiamo sopra dimostrato possiamo riscrivere questa relazione in questo modo $OD^2 = AO^2 + FD^2$ che era quello che bisognava dimostrare.

2. Abbiamo verificato con Cabri (usando lo strumento traccia) che il luogo che F descrive al variare di C sulla retta AB è una curva che a noi è sembrata un ramo di iperbole.