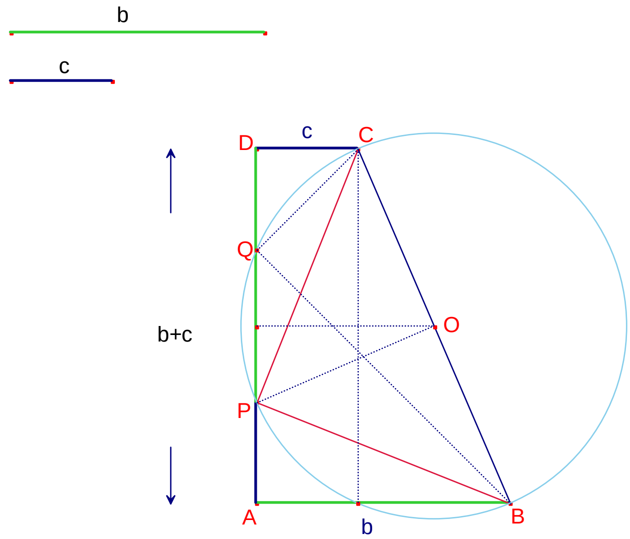
FLAT*landia*

Il problema di Dicembre

Sono dati due segmenti **b** e **c** (**b**>**c**).
Disegnare con essi un trapezio rettangolo ABCD di basi AB=**b**, DC=**c** e di altezza AD=**b+c**.

1) Verificare, e poi dimostrare, che la circonferenza di diametro CB incontra il lato AD in due punti che chiameremo P e Q (AP<AQ).

2) Determinare in funzione di **b** e **c** la lunghezza della corda PQ, le distanze di P e Q dai vertici A e D del trapezio e l'area del triangolo BPC.



Commento

Abbiamo ricevuto tre risposte dalle seguenti scuole:

SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)
LS "A. Righi", Bologna (BO)
LS "Aristosseno", Taranto (TA)

Diamo il benvenuto agli studenti del LS "Righi", contiamo di vederli ancora impegnati nei quesiti che proporremo.
Nel problema dato si dovevano determinare le intersezioni fra un un lato di un particolare trapezio rettangolo, costruito mediante due segmenti assegnati, e la circonferenza avente come diametro il lato obliquo. Per non appesantire il problema, abbiamo chiesto di dimostrare l'esistenza di tali punti dopo aver verificato dalla figura che sono interni al lato AD (altezza del trapezio).
Si chiedeva inoltre la misura di alcuni elementi della figura in funzione di quella dei segmenti dati.

Il trapezio assegnato presentava alcune caratteristiche che potevano essere giustificate sia con considerazioni di geometria sintetica, sia ricorrendo al calcolo algebrico.
Questo aspetto risulta anche nelle risposte ricevute; in esse i quesiti vengono risolti con approcci diversi che commenteremo brevemente:

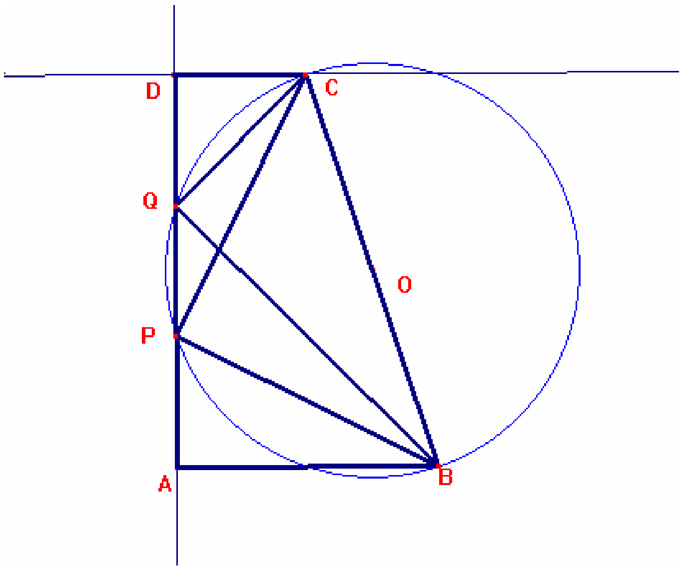
- SM “C.A. Dalla Chiesa”: alcuni studenti della classe 3S hanno costruito sul lato AD i due punti per i quali dovrà necessariamente passare la circonferenza data, utilizzando opportuni triangoli rettangoli. Questo ha permesso poi di rispondere in modo immediato alle successive domande.

- LS “Aristosseno”: gli studenti della classe 3D hanno dimostrato l’esistenza di tre intersezioni fra il trapezio e la circonferenza (oltre gli estremi C e B), confrontando con il raggio la distanza fra il centro e i lati AD e AB.
Da questa distanza deducono rapidamente le misure richieste.
Propongono anche una risoluzione per via analitica.

- LS “A. Righi”: gli studenti della classe 2B dimostrano l’esistenza delle due intersezioni con il lato AD, valutando la sua distanza dal centro della circonferenza. Non indagano ulteriormente sulle caratteristiche geometriche della figura, rispondono alle successive domande ricorrendo esclusivamente al calcolo algebrico.

NOTA: *Le nostre osservazioni sono scritte in parentesi quadra. In doppia parentesi quadra sono indicate le parti omesse.*

Chiara Veronesi, Francesco Bonalda, Francesca Giacovelli,
Gaia Pallestrini, Alfredo Rivero
Classe 3S Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa"
San Genesio ed Uniti (PV)

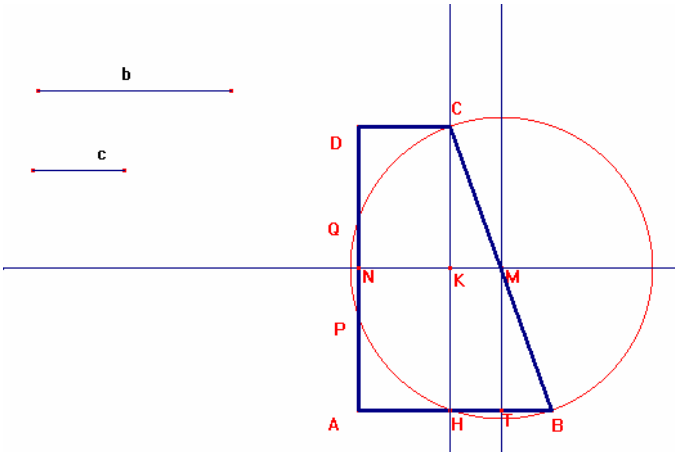


1. Tracciamo un segmento AB = b e una retta "r" perpendicolare al segmento passante per A, con il compasso puntiamo in A con apertura AB e troviamo il punto Q **[era più corretto assegnargli temporaneamente un altro nome]**, tale che AQ = AB = b. Prendiamo poi un punto D sulla retta "r" in modo che DQ = c sia minore di QA. Ora tracciamo una retta "s" perpendicolare ad AD e passante per D. Con il compasso con apertura DQ puntando in D troviamo l'intersezione con la retta "s" che chiamiamo C. Unendo i punti C e B troviamo il trapezio ABCD.
I triangoli DCQ e QAB sono triangoli rettangoli isosceli per costruzione, quindi gli angoli acuti misurano 45°. Allora L'angolo CQB = 90° e quindi il triangolo CQB è un triangolo rettangolo di ipotenusa CB.
Prendiamo su AD un punto P **[vedi punto Q]** tale che AP=c. Consideriamo i triangoli PDC e PAB. Sono due triangoli rettangoli uguali perché AB = PD = b e AP = DC = c. Pertanto gli angoli ABP = DPC e APB = DCP ed essendo gli angoli DPC e APB complementari risulta che CPB è un angolo retto.
Il triangolo CPB è quindi un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa CB.
I triangoli CQB e CPB sono triangoli rettangoli ed hanno come ipotenusa lo stesso segmento CB, quindi la circonferenza ad essi circoscritta avrà come diametro il segmento CB. Quindi i punti Q e P appartengono sia al segmento AD che alla circonferenza di diametro CB e pertanto la circonferenza sarà secante al segmento in questi due punti.

2. Poiché:
DQ = PA = c
QA = DP = b
La lunghezza della corda sarà :QP = b-c.
Considero il triangolo rettangolo ABP: $PB^2 = b^2 + c^2$; essendo il triangolo CPB un triangolo rettangolo isoscele PB = PC, la sua area sarà:
Area = $PB^2/2 = (b^2 + c^2)/2$

Classe 3 D, Liceo Scientifico "Aristosseno"

Taranto (TA)



1) Dopo aver costruito la figura è immediato constatare che la circonferenza incontra AD in due punti. Per la dimostrazione, tracciate da M la parallela e la perpendicolare e da C la perpendicolare alla base AB del trapezio, si ha che da CM = MB, per il teorema di Talete, segue che AN = ND e CK = KH =MT

Essendo AD = $b + c$, AN = ND = $\frac{b+c}{2}$ e

MN = AB – **T**B = AB – T**H** = AB – (MN – CD) da cui MN = (AB + CD)/2 = $\frac{b+c}{2}$

(ovvero: il segmento che unisce i punti medi dei lati di un trapezio è parallelo alle basi e congruente alla loro semisomma)

Da MN = MT < MB (nel triangolo rettangolo MTB il cateto è sempre minore dell'ipotenusa) deriva che la circonferenza di centro M e raggio MB è secante sia AB che AD , essendo la distanza del suo centro da questi due segmenti minore del suo raggio.

2) Le corde intercettate dalla circonferenza sui due lati AB e AD sono HB (perché l'angolo CHB è retto) e PQ; esse sono congruenti perché equidistanti dal centro della circonferenza (MN = MT). Essendo HB = $b - c$, anche PQ = $b - c$.

Il segmento MN è asse della corda PQ ;sarà quindi AP = QD = $\frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} = c$

mentre AQ = PD = $\frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} = b$

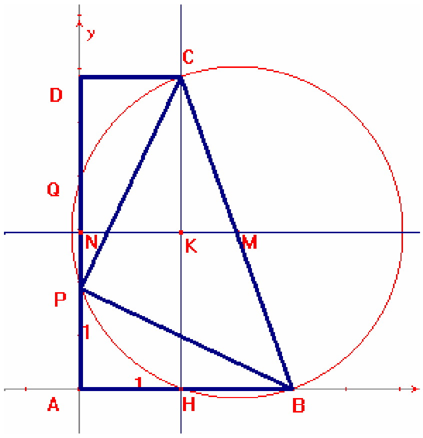
L'area del triangolo BPC , infine , si può calcolare in due modi:

a) essendo PB = PC = $\sqrt{b^2 + c^2}$ (ipotenuse dei triangoli rettangoli congruenti BAP e PDC), il triangolo BPC è la metà del quadrato inscritto nella circonferenza per cui

S(BPC) = ½ (b^2+c^2)

b) sottraendo dall'area del trapezio il doppio dell'area di ciascuno dei due triangoli congruenti BAP e PDC : S (PBC) = $\frac{(b+c)^2}{2} - 2\frac{bc}{2} = \frac{b^2+c^2}{2}$.

Abbiamo risolto il problema anche per via analitica, avendo trattato in classe la circonferenza.



Fissato quindi un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui A $\equiv$O (0,0), B(b,0), C(c,b+c) e D(0,b+ c), il punto medio M di BC ha coordinate ($\frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}$) e il raggio della circonferenza è la metà di BC: MB = ½$\sqrt{(b-c)^2+(b+c)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{b^2+c^2}$

L'equazione della circonferenza di centro M e raggio MB è allora:

$$\left(x-\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{b^2+c^2}{2}$$

Risolvendo il sistema formato dall'equazione della circonferenza e da quella dell'asse y , otteniamo le ordinate dei due punti di intersezione della circonferenza con tale asse, ovvero le ordinate dei punti P e Q.

$$\begin{cases} x^2+y^2-(b+c)x-(b+c)y+bc=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-(b+c)y+bc=0 \\ x=0 \end{cases}$$ P(0,c) e Q (0,b)

La lunghezza della corda PQ = b-c è la distanza tra i due punti trovati; AP = QD = c e AQ = PD = b.

L'area del triangolo PBC la calcoliamo utilizzando il **[valore assoluto del]** determinante:

S(PBC) = ½ $\left\| \begin{matrix} b & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 \\ c & b+c & 1 \end{matrix} \right\|$ = ½(b^2+c^2). **[Come simbolo di determinante non si usa di solito la doppia linea]**

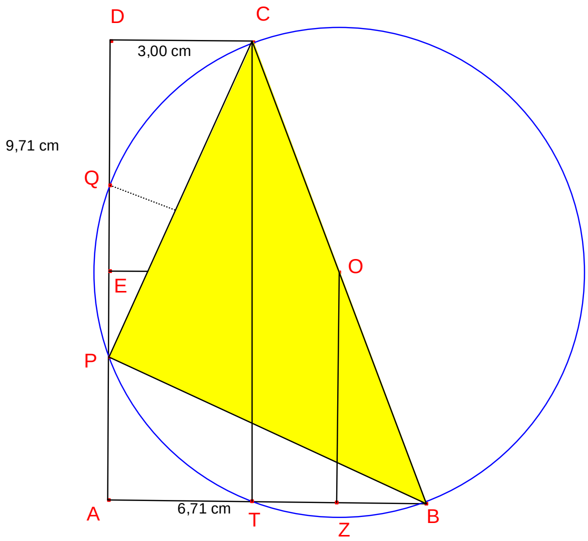
Classe 2B PNI, Liceo Scientifico “A. Righi”
Bologna (BO)

Ipotesi

AB = b
DC = c
DA = b+c
b > c
2r = CB
ABCD trapezio rettangolo

Tesi

1) DA è secante a cfr. M
2) QP = ?
PA = ?
A(BPC)=?



1) Dimostrazione
[Sia OE la distanza da O del lato AD. OE è parallela alle basi]
Considero DA: è composto da DE + EA, congruenti tra loro per il teorema del fascio di rette parallel: DE = **E**A = (c+b)/2
Considero EO: per teorema noto è congruente alla metà della somma delle due basi,
EO = (c+b)/2
Perciò DE = EO
Nel triangolo rettangolo **[CHO, H intersezione di EO con l’altezza CT]**, il cateto CH = DE < CO (ipotenusa), ma EO = DE perciò EO < CO.
È così dimostrata la prima tesi

2) Dimostrazione

Applicando il teorema di Pitagora al trg. CTB si ottiene che CB = $\sqrt{2(b^2+c^2)}$ da cui essendo CO=CB/2 abbiamo

$$CO = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)}}{2}$$

Applicando il teorema di Pitagora al trg. EPO si ottiene

$$EP = \sqrt{QO^2 - EO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)}}{2}\right)^2 - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2-2bc+c^2}{4}} = \frac{b-c}{2}$$

QP è doppio di EP perché la perpendicolare condotta dal centro ad una corda la dimezza

QP = 2EP = b-c

AP = EA – EP = (b+c-b+c)/2 = c

PBC è un trg. rettangolo poiché inscritto in una semicirconferenza.

Notiamo che i triangoli **[rettangoli]** DPC e PAB sono congruenti essendo DC=PA=c, DP=AB=b **[quindi PB = PC]**

$PB = \sqrt{b^2 + c^2}$

L'area del trg. PBC=(PB*PC)/2= $\frac{\sqrt{(b^2 + c^2)^2}}{2} = \frac{b^2 + c^2}{2}$