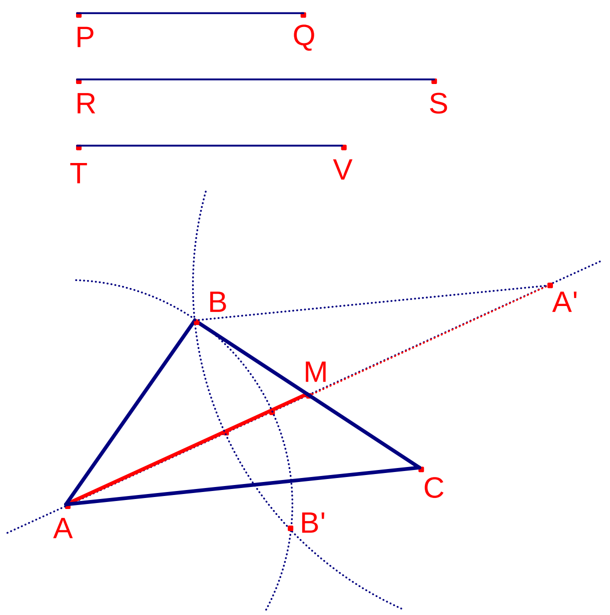
FLAT*landia*

Il problema di Ottobre 2005

Dati tre segmenti PQ, RS, TV, costruire un triangolo ABC in cui AB = PQ, AC = RS e la mediana relativa al terzo lato sia congruente a TV.
E' sempre possibile la costruzione richiesta?

Giustificare la costruzione e motivare le risposte.

La nostra costruzione



AM = TV
MA' = AM
Arco di raggio PQ, centro A
Arco di raggio RS, centro A'
Punto di intersezione B (o B')
C simmetrico di B rispetto M
ABC è uno dei triangoli richiesti.

Commento

Abbiamo ricevuto tre risposte dalle scuole

- **ITI "Galileo Ferraris", San Giovanni La Punta (CT)**
- **LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)**
- **LS "Farinato", Enna (EN)**

Nel problema proposto si chiedeva di costruire un triangolo essendo dati due lati e la mediana relativa al terzo lato, poi di indagare sulle possibilità di risoluzione del quesito.
In una sola risposta vengono affrontate entrambe le richieste, con qualche carenza nelle motivazioni.

Auguriamo a tutti i partecipanti un miglior esito con i prossimi problemi.
Esplorando in rete l'archivio di FLATlandia si può osservare che quando si assegna una costruzione si intende una successione di passaggi eseguibili con riga e compasso, manualmente o con l'ausilio di un software appropriato. Non si possono accettare risultati ottenuti per successivi aggiustamenti della figura sfruttando la dinamicità, ad esempio, del Cabri-géomètre.

Abbiamo convenuto di presentare le seguenti risposte:

Alfonso Scarpino, 1 G, LS "G.B. Scorza"

Lo studente ha prima supposto il problema già risolto per discuterne le limitazioni. Non si è accorto che la figura esaminata forniva anche il percorso per costruire il triangolo richiesto e ha così proposto una costruzione molto complessa. Egli ha "scoperto" che, fissato il lato AB=PQ, il terzo vertice C di tutti i triangoli che hanno come mediana AM=TV, descrive una circonferenza. Non giustifica questa osservazione probabilmente perché gli mancano ancora le conoscenze per poterlo fare.

Soluzione

1.

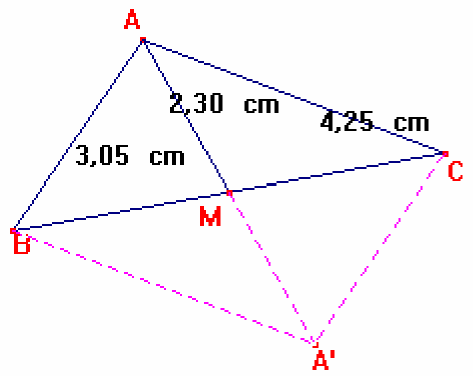


Fig. 1

La costruzione non è sempre possibile ma, supponendo di trovarla e costruendone il simmetrico rispetto al punto medio M, si ottiene il parallelogrammo ABA'C in cui una delle diagonali, AA', è il doppio della mediana AM. Ma in ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza, per cui risulta (supponendo AC > AB)

AC – AB < AA' < AC + AB ovvero

AC – AB < 2 * AM < AC + AB   da cui, infine

(AC – AB) / 2 < AM < (AC + AB) / 2

cioè la mediana deve essere maggiore della semidifferenza e minore della semisomma dei due segmenti dati. Vedi fig. 1.

2.

Riportiamo i tre segmenti PQ, RS, TV a partire dallo stesso punto A.
Tracciamo il segmento BM e lo prolunghiamo di un segmento ad esso congruente che chiameremo MC'.

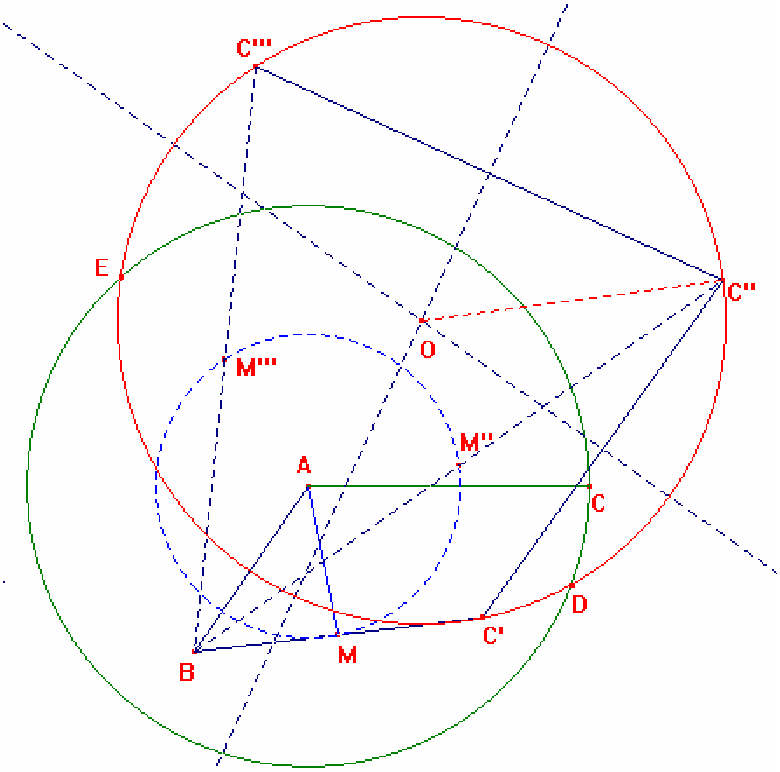


Fig. 2

Facendo ruotare il punto M sulla circonferenza di centro A e raggio AM, il punto C' descrive a sua volta una circonferenza (quella rossa nella fig. 2) **[vedi nota (*) a piè di pagina]**; tracciando anche la circonferenza di centro A e raggio AC (quella verde in fig. 2), si può notare che le due circonferenze si intersecano in due punti distinti D ed E (simmetrici rispetto ad AB).
Per costruire la circonferenza "rossa", passante per i punti C', C''e C''' è necessario individuarne il centro. A tale scopo, prendiamo 2 qualsiasi punti distinti M'' ed M''' sulla circonferenza di centro A e raggio AM e, dopo aver tracciato i segmenti BM'' e BM''' che li congiungono al punto B, prolunghiamo detti segmenti dalla parte dei punti M'' ed M''' di un segmento pari, rispettivamente, alle distanze BM'' e BM'''. I punti così ottenuti, C'' e C''' appartengono alla circonferenza che cercavamo per cui, tracciando gli assi delle corde C'C'' e C''C''', il loro punto di intersezione sarà proprio il centro O della nuova circonferenza. A questo punto basta tracciare la circonferenza di centro O e raggio OC'' per individuare i punti di intersezione D ed E con la circonferenza di centro A e raggio AC.
In questi punti, quindi, si realizza la costruzione richiesta poiché il segmento AD risulta congruente al segmento AC dato ed il punto M è il punto medio del segmento BD o BC che dir si voglia.
Analogamente per il punto E.

[(*)
Con riferimento alla figura 2 si osserva che per ogni posizione di AM si individua un punto C' tale che C'B=2MB; i punti M e B si corrispondono quindi in una omotetia di centro B e rapporto 2. Alla circonferenza di raggio AM corrisponderà la circonferenza di centro O allineato con A e B, tale che OB=2AB, edi raggio OC'=2AM.
Si può giungere alla stessa conclusione considerando, per due diverse posizioni di AM, e di C', opportune coppie di triangoli simili con vertice comune in B.]

In fig. 3 è riportata la costruzione finale del triangolo ABC.

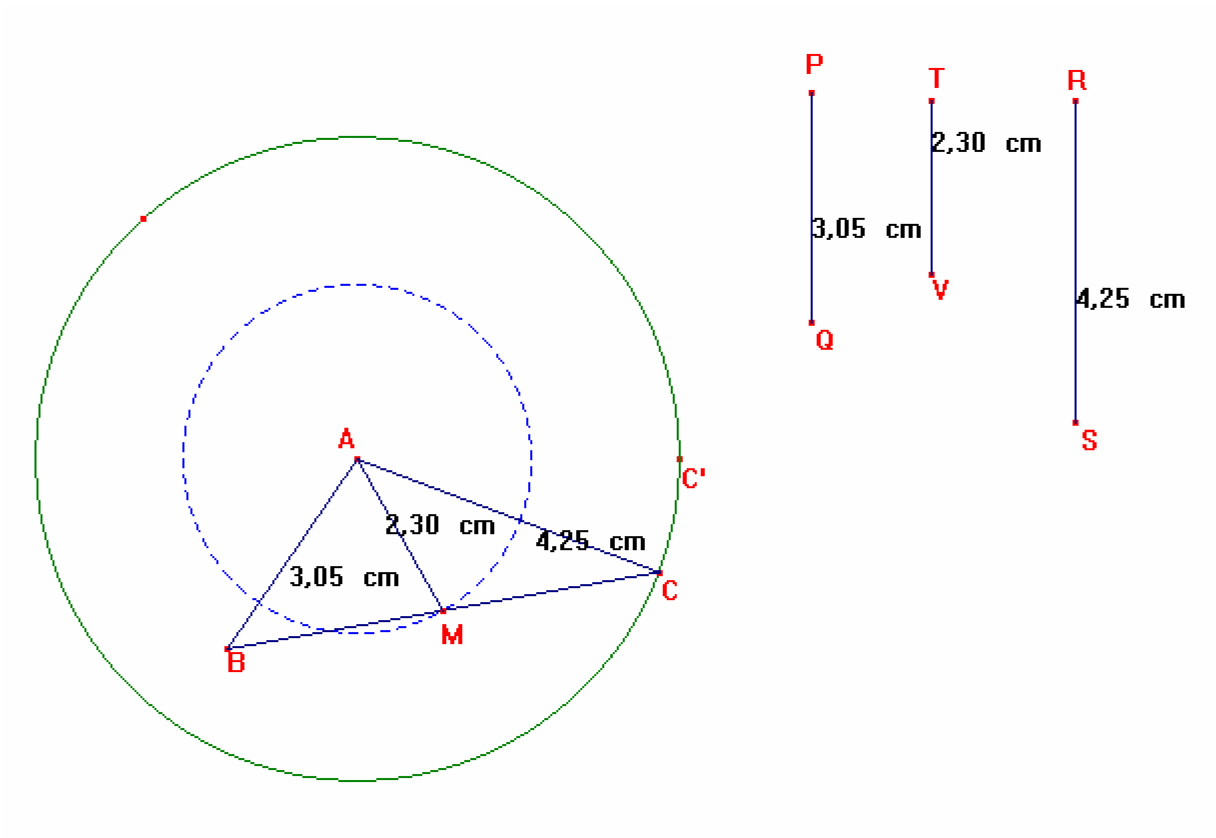


Fig. 3

Classe 3C, LS “Farinato”

Risposta incompleta, manca la costruzione del triangolo; viene presentata solo una discussione delle possibilità di soluzione descrivendo nelle varie fasi la figura di riferimento.

Soluzione

La soluzione del problema è stata fatta partendo dal caso particolare che si verifica quando PQ risulta uguale a RS e di seguito, estendendo le considerazioni al caso di PQ diverso da RS.
Consideriamo i due segmenti consecutivi AB e AC (rispettivamente uguali a PQ ed RS) ed indichiamo con â l'angolo compreso tra di essi. Se AB e AC devono essere lati di un triangolo, deve aversi: $0° < \hat{a} < 180°$. Al variare dell'angolo â, la mediana relativa al lato BC varierà tra 0 (per $\hat{a} \sim 180°$) e PQ (=RS) (per $\hat{a} \sim 0°$).
Nel caso particolare di PQ=RS=m, dovrà essere: $0 < TV < m$.
Se PQ è diverso da RS, supponiamo essere $PQ > RS$.
Quando l'angolo â tende a diventare nullo, il punto C tende a cadere sul segmento AB e la mediana relativa al lato BC tende ad essere uguale al segmento $RS + 1/2(PQ - RS) = 1/2(PQ+RS)$.
Quando l'angolo â tende ad assumere il valore 180°, il punto C tende a cadere sulla retta alla quale appartiene il segmento AB e la mediana relativa al lato BC tende ad essere uguale a $1/2(PQ+RS) - RS = 1/2(PQ - RS)$.
Al variare dell'angolo â, la mediana relativa al lato BC varierà tra $1/2(PQ - RS)$ (per $\hat{a} \sim 180°$) e $1/2(PQ+RS)$ (per $\hat{a} \sim 0°$).
Il risultato generale, che comprende come caso particolare il risultato trovato quando PQ = RS, è:
$1/2(PQ - RS) < TV < 1/2(PQ+RS)$.